



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

北京大学数学教学系列丛书

本科生
数学基础课教材

高等代数 简明教程

上册 (第二版)

蓝以中 编著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

北京大学数学教学系列丛书

高等代数简明教程

(上册)

(第二版)

蓝以中 编著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等代数简明教程. 上/蓝以中编著. —2 版. —北京: 北京大学出版社, 2007. 7

(北京大学数学教学系列丛书)

(普通高等教育“十一五”国家级规划教材)

ISBN 978-7-301-05370-6

I. 高… II. 蓝… III. 高等代数-高等学校-教材 IV. O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 025641 号

书 名: 高等代数简明教程(上册)(第二版)

著作责任者: 蓝以中 编著

责任编辑: 刘 勇

标准书号: ISBN 978 7-301 05370 6/O · 0524

出版发行: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区成府路 205 号 100871

网 址: <http://www.pup.cn> 电子邮箱: zpup@pup.pku.edu.cn

电 话: 邮购部 62752015 发行部 62750672 理科编辑部 62752021

出版部 62754962

印 刷 者: 北京大学印刷厂

经 销 者: 新华书店

890×1240 A5 13 印张 374 千字

2002 年 8 月第 1 版 2007 年 7 月第 2 版

2007 年 7 月第 1 次印刷(总第 4 次印刷)

印 数: 11001—15000 册

定 价: 20.00 元

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究

举报电话:010-62752024 电子邮箱:fd@pup.pku.edu.cn

《北京大学数学教学系列丛书》编委会

名誉主编：姜伯驹

主 编：张继平

副 主 编：李 忠

编 委：(按姓氏笔画为序)

王长平 刘张炬 陈大岳 何书元

张平文 郑志明

编委会秘书：方新贵

责任编辑：刘 勇

国家级精品课程配套教材



普通高等教育“十五”国家级规划教材

内 容 简 介

本书是综合大学、师范院校高等代数课程教学用书。本书第一版被评为普通高等教育“十五”国家级规划教材,北京市高等教育精品教材立项项目。此教材有两个特色:一是贴切课堂教学和学生自学的实际,由浅入深,从具体到抽象,由生动直观到理性推理,使学生较为顺利地进入代数学的抽象领域;二是以代数学的研究对象和基本思想、基本方法作为全书的主线,从而保证学生受到较充分的代数学训练,在理论上达到足够的深度和高度。其科学内容符合作为现代代数学入门课程的教材所应达到的水准。第二版对全书作了系统、全面的修订,使这两个特色更臻完善。

全书共十二章,分上、下两册出版。上册(第一章至第五章)是线性代数的基础教材,内容包括向量空间、矩阵、行列式、线性空间与线性变换、双线性函数与二次型。下册(第六章至第十二章)包括三方面内容:一是带度量的线性空间及 Jordan 标准形;二是有理整数环及一元、多元多项式环,第二版中又增加了介绍群、环和域的基本概念的内容;三是 n 维仿射空间与 n 维射影空间,张量积与外代数。本书每个章节都安排了相当数量的习题作为课外练习或习题课上选用,其中的计算题在书末附有答案,较难的题则有提示。

本书可作为综合大学、高等师范院校数学系、力学系、应用数学系大学生高等代数课程的教材或教学参考书,对于青年教师、数学工作者本书也是很好的教学参考书或学习用书。

作 者 简 介

蓝以中 北京大学数学科学学院教授。1963年毕业于北京大学数学力学系,长期从事代数学和数论的科学研究和教学工作。

序 言

自 1995 年以来,在姜伯驹院士的主持下,北京大学数学科学学院根据国际数学发展的要求和北京大学数学教育的实际,创造性地贯彻教育部“加强基础,淡化专业,因材施教,分流培养”的办学方针,全面发挥我院学科门类齐全和师资力量雄厚的综合优势,在培养模式的转变、教学计划的修订、教学内容与方法的革新,以及教材建设等方面进行了全方位、大力度的改革,取得了显著的成效。2001 年,北京大学数学科学学院的这项改革成果荣获全国教学成果特等奖,在国内外产生很大反响。

在本科教育改革方面,我们按照加强基础、淡化专业的要求,对教学各主要环节进行了调整,使数学科学学院的全体学生在数学分析、高等代数、几何学、计算机等主干基础课程上,接受学时充分、强度足够的严格训练;在对学生分流培养阶段,我们在课程内容上坚决贯彻“少而精”的原则,大力压缩后续课程中多年逐步形成的过窄、过深和过繁的教学内容,为新的培养方向、实践性教学环节,以及为培养学生的创新能力所进行的基础科研训练争取到了必要的学时和空间。这样既使学生打下宽广、坚实的基础,又充分照顾到每个人的不同特长、爱好和发展取向。与上述改革相适应,积极而慎重地进行教学计划的修订,适当压缩常微、复变、偏微、实变、微分几何、抽象代数、泛函分析等后续课程的周学时。并增加了数学模型和计算机的相关课程,使学生有更大的选课余地。

在研究生教育中,在注重专题课程的同时,我们制定了 30 多门研究生普选基础课程(其中数学系 18 门),重点拓宽学生的专业基础和加强学生对数学整体发展及最新进展的了解。

教材建设是教学成果的一个重要体现。与修订的教学计划相

配合,我们进行了有组织的教材建设。计划自1999年起用8年的时间修订、编写和出版40余种教材。这就是将陆续呈现在大家面前的《北京大学数学教学系列丛书》。这套丛书凝聚了我们近十年在人才培养方面的思考,记录了我们教学实践的足迹,体现了我们教学改革的成果,反映了我们对新世纪人才培养的理念,代表了我们新时期的数学教学水平。

经过20世纪的空前发展,数学的基本理论更加深入和完善,而计算机技术的发展使得数学的应用更加直接和广泛,而且活跃于生产第一线,促进着技术和经济的发展,所有这些都正在改变着人们对数学的传统认识。同时也促使数学研究的方式发生巨大变化。作为整个科学技术基础的数学,正突破传统的范围而向人类一切知识领域渗透。作为一种文化,数学科学已成为推动人类文明进化、知识创新的重要因素,将更深刻地改变着客观现实的面貌和人们对世界的认识。数学素质已成为今天培养高层次创新人才的重要基础。数学的理论和应用的巨大发展必然引起数学教育的深刻变革。我们现在的改革还是初步的。教学改革无禁区,但要十分稳重和积极;人才培养无止境,既要遵循基本规律,更要不断创新。我们现在推出这套丛书,目的是向大家学习。让我们大家携起手来,为提高中国数学教育水平和建设世界一流数学强国而共同努力。

张继平

2002年5月18日

于北京大学蓝旗营

第二版前言

根据数学史记载,大约在公元 825 年已经出现了代数学的专门著作。在这以后的一千多年时间内,代数学始终处在蓬勃的发展之中。许多杰出的数学家,例如欧拉、高斯、伽罗瓦、希尔伯特、诺特等贡献了他们的聪明才智,作出了辉煌灿烂的成果。在近代,代数学作为数学科学的主要理论分支之一,更是被大力研讨,丰硕的理论成果如江河之水奔泻直下,令人目不暇接。代数学无疑是人类宝贵的文化宝库中的一支奇葩。一个刚刚步入人生旅程的青年,必须尽可能多和尽可能扎实地从人类文化宝库中吸取营养,才有可能创新立业。这也就是他们必须经历小学、中学和大学的长时间的学习的缘故。而在中国一切大学的数学教育中,代数学都是一门主要课程。这就是说,大学的代数学教学,应当把代数学一千多年发展中形成的精华传授给青年学生,用老一辈数学家创立的学说来武装青年一代的头脑。但是,在从事这项工作时必须掌握好分寸。内容过深,大多数学生无法接受,自然不可行。而内容过浅,课堂上只讲授一些概念和粗浅的命题,避开较为深刻的内容,学生没有接触到代数学中的精华,没有接受较严格的教育和训练,他们的素质和能力没有得到应有的提高,那就没有达到本课程教学的基本要求。这就是像华罗庚先生所说的,入宝山而空返。这个问题是本教程编写中反复斟酌的问题。作者掌握的原则是:书中既包含代数学基础理论中较为深刻的、富有启迪意义的精彩成果,使它在理论上达到应有的高度,符合现代科学技术发展的要求,同时,又让本书的内容和习题对于确实掌握中学教学计划规定的全部内容,进入大学后又能认真、扎实地学习的学生都能接受,能掌握。这也是本教程此次修订中进一步着重考虑的问题。

代数学是研究“运算”的科学。在19世纪中叶之前,代数学研究的是复数及其加、减、乘、除四则运算,核心问题是各种代数方程的求解和根的分布。这些研究的成果进入学校教学中,在中学是讲授二、三元一次联立方程组 and 一元一、二次代数方程,这应称为“初等代数”。进入大学后则讲授一般的多元线性方程组 and 一元高次代数方程,这在经典代数学中算是高深的学问了,因此这课程被称为“Higher Algebra”,译成中文就是“高等代数”。在伽罗瓦的工作问世之后,人们逐渐认识到,把研究领域局限在复数范围无异于作茧自缚。实际上我们面对的是形形色色缤纷多彩的世界,其中存在着各种各样的运算形式,它们都应当是代数学的研究对象。人们发现,单纯研讨这些运算的理论时,运算对象的具体背景和运算的具体内涵无关紧要,真正起作用的是它们所满足的运算法则,于是形成了抽象代数系统的理论。代数学的这些思想对于初入大学的青年是陌生的,他们在中学中接触的都是数的运算,脑子里已经形成一个观念,认为做运算的都应当是数。现在要学习的竟是一个抽象集合内的抽象运算,而且仅以几条简单的运算法则为基础就能构建起一座富丽堂皇的大厦,不少人对此迷惑不解,产生畏惧心理。有些代数学教科书又片面追求逻辑的完美,忽视人的认识规律,未经任何准备就把抽象代数学的概念硬性灌输给学生,更加大了学习的难度。因此,在高等代数课程的教学过程中历来存在诸多难点。克服学生的畏惧心理和摒弃违反教育学基本原则的教学方法,是高等代数教学中面临的一个重要课题。这个课题正是本教程着力解决的又一个关键性问题。例如,本书的重点研究对象是线性空间,这是一类最初等然而极具典型性的抽象代数系统。为了让学生从中学的初等代数知识较顺利地过渡到这个抽象代数系统,本书设计了三个阶梯。首先,从二、三元一次联立方程组前进到 m 个方程 n 个未知量的一般线性方程组,在理论上提高了一个层次,但还是停留在数的运算的领域。其次,从线性方程组引导出 m 维向量空间和矩阵,这又上升了一个层次,已经摆脱了数的限制,进入了非数的向量和矩阵的运算,但运算

对象和运算方法却是具体的。在这过程中强调指出:运算对象和运算方法的具体内涵是非本质的,关键是它们所满足的运算法则。此次修订中又进一步阐明矩阵是刻画向量空间之间的线性映射的工具。在作了这一系列准备之后,最后才上升到抽象线性空间和线性变换。这个例子中体现的由浅入深,由具体到抽象,由直观分析到理性思维,逐步过渡的方法贯穿于本教程全书。多年教学实践证明,本教程采取的这些措施不但化解了教学中的难点,而且使学生加深了对代数学基本思想的理解。这些知识都是前辈数学家智慧的结晶,它们也为从事科学工作提供了极好的范例。这对学生未来的工作与学习都将产生深刻的影响。

本书每小节后附有足够数量的习题,此次修订中又作了补充。每节的习题按难易程度依次排列。排在前面的是基本题,其任务是帮助学生检查对课程内容理解的程度。只要确实掌握了该部分课文的知识,做这些题不会有大的困难。反过来说,如果这些基本题不会做,那就没有达到该部分的基本要求,就应抓紧复习课文的内容,找出不足之处加以补充订正。排在较后面的是提高题,其目的是指导学生灵活运用所学的知识去分析问题,寻找解决问题的方法,有一定的难度。但它是学生提高自己能力必须经历的过程,应当尽可能多地接受这方面的训练。做这些题可以激励学生勇于思考创新,经过对该题涉及的知识的深入思考探索,由此及彼,由表及里,最后融会贯通,这才能较扎实地用前人创造的知识武装自己。我国有一句成语,说“开卷有益”,借用这句成语的意思,我们也可以说,思考有益。学习时多动脑思考,养成习惯,终生受益。应当指出,较难的题不是每个人都能解出,但是只要认真尽力,尽管最后没有找到解决问题的途径,但在这过程中已经帮助您大大地熟悉了该部份的知识,锻炼了您的分析问题的能力,您仍然是大有收获的。所以,不必为做不出某些较难的题而气馁。

本教程自编写与正式出版以来,已在北京大学数学科学学院作为本科高等代数课程的教材使用多年,取得良好的教学效果。此课程于2004年被评定为**国家级精品课**。本教材也先后被评为

普通高等教育“十五”国家级规划教材和“十一五”国家级规划教材。现在,作者依据教学中的实际情况,再次对此书作系统的修订,以期更加适应课堂教学和学生自学的要求。据了解,目前某些地区中学不再讲授复数的知识。但是,不懂复数是无法学习高等代数课程的。所以,此次修订时在第一章起始处添加了“复数的基本知识”这一小段以作补充。在第一版的前言中曾指出,本书用代数学的基本思想作为贯穿始终的一条主干线。为了把这个思想表达的更加明晰,此次在第九章最后添加一小节,介绍群,环和域的基本概念,实际上是对前九章中阐述的代数学思想作一个总结和提高,同时又为后面学习抽象代数课程指明了方向。最后应说明,第十一章和第十二章属于较深入的知识,此次也作了必要的修订,以使其内容更易理解。是否讲授这两章的内容,要视各校的学时安排及学生的具体情况酌定。

赵春来教授和姜健飞教授根据他们教学中的实际经验对本书的修订提出了宝贵的意见,作者在此向他们表示衷心的感谢。

作者

2006年12月

于北京大学

前 言

高等代数是综合大学和师范院校数学院(系)本科生的三门主要必修基础课(分析,几何,代数)之一,在教学计划中属于关键性的课程.编写一部符合现代科学发展水平的合格的高等代数教材,无疑是一项重要的工作.在从事这项工作时,首先要解决的问题是:代数学作为数学科学的三大理论支柱之一,它的研究对象是什么?关于这一点,段学复院士于1962年在为范德瓦尔登的“代数学”中译本所写的序言中指出:“一百多年来,尤其是本世纪以来,随着数学的发展以及应用的需要,代数学的研究对象以及研究方法发生了巨大的变革.一系列新的代数领域被建立起来,大大地扩充了代数学的研究范围,形成了所谓近世代数学.它与以代数方程的根的计算与分布为研究中心的古典代数学有所不同,它是以研究数字、文字和更一般元素的代数运算的规律及各种代数结构——群、环、代数、域、格等——的性质为其中中心问题的.”这里所说的观点,是中外数学家普遍认同的.因此,它自然应当是我们编写代数学的入门课程——高等代数教材的基本指导思想.为了使学生在两个学期的教学中对现代代数学的研究对象、基本思想和基本方法有一个初步但又是清楚的认识,我们认为下列几个基本问题是在教材编写和课堂教学中必须首先解决的.

1. 什么是贯穿高等代数教学的主干线

经典代数学的研究课题是各类代数方程的求解问题.但是很容易看出,线性方程的解本质上是向量空间和矩阵理论的一个简单的应用.自Galois的理论问世以后,又使人们认识到一元高次代数方程的求根本质上是域的结构理论,特别是域扩张和域的自同构群的理论的应用.由此人们逐渐认识到,代数的基本研究对象应当是各类代数系统及其相互关系(态射).高等代数作为代数学的入门课程,应当是以中学代数知识(即经典代数学中方程的求解问题)为出发点,

将学生逐步引导到现代代数学的基本研究对象上来. 这应当就是贯穿高等代数课程的主干线. 具体说, 就是从研究线性方程的理论入手, 引导出向量空间和矩阵的基础理论, 在此基础上再过渡到抽象的线性空间(一类最简单的代数系统)及其态射(线性映射, 特别是线性变换)的理论. 从研究中、小学中熟悉的整数理论, 经过总结提高成为有理整数环, 再过渡到一元与多元的多项式环. 通过高等代数课程的教学, 使学生初步接受抽象代数学的基本思想, 并接受抽象代数学基本方法的初步训练. 这应当是此课程教学的基本要求.

2. 在教学中如何贯彻认识论或教育学的基本原则

作为大学低年级的入门课程, 其理论的阐述应当符合人的认识规律, 即由浅入深, 从具体到抽象, 由形象直观到理性思维, 例如, 通过分析线性方程组结构的直观上的特点导出向量空间和矩阵及其运算的基本理论, 以具体的齐次线性方程组有无非零解来导出向量组线性相关与无关的抽象概念等等. 在学生熟悉了具体的向量空间和矩阵之后, 再过渡到抽象的线性空间和线性映射理论. 通过学生熟练掌握的整数及其运算上升到有理整数环, 以具体的有理整数环为范例阐述因子分解理论及商环理论(不给出一般定义), 再过渡到一个或多个不定元的多项式环. 在本教材中, 我们遵循这个原则来处理各个章节中基本概念的引入及基本理论的展开.

在一些线性代数教材中, 通过三维几何空间来引入一般向量空间. 这一做法有如下缺点: 首先, 现在高等代数与解析几何常常并列开, 学生在学习线性代数前并未熟悉三维几何空间中的向量理论(仅在中学物理中知道力、速度等向量的简单概念), 不能作为较踏实的出发点. 而且从教学实践看, 学生学习三维几何空间的向量理论并不是很轻松就掌握的. 但更重要的一点是, 从三维几何空间推广到高维空间(特别是任意数域 K 上的向量空间)是许多学生难于接受的, 因为现实空间只到三维为止, 他们难以理解为什么会有 n 维空间. 而从线性方程组结构来引入一般向量空间最为自然, 从教学实践中看, 学生易于接受. 因此, 三维几何空间在本课程中应作为线性空间一个重要、直观的例子来使用, 而不宜作为整个理论的出发点.

3. 在高等代数课程中,学生应受到哪些最基本的训练

除了与其他数学课程共同的基本训练(如逻辑思维能力等)之外,从高等代数课程本身的特点来看,似乎有以下几个方面是最主要的,应当贯穿课程始终的.

1) 代数学基本思想的训练. 代数学具有高度抽象性和一般性. 所研究的代数系统,其元素及代数运算都未有具体内容,而仅要求满足一定的运算法则,这是概括了许多具体的客观事物的共性之后形成的非常一般的规律,从而有广泛的应用. 这种抽象思维的训练,不但在数学各个方向是需要的,在其他学科及实际工作中也都是很重要的. 这是提高学生整体素质的一个重要方面. 从事抽象思维训练,是代数学的特有的优点,在本课程教学中应当紧紧抓住这一点.

2) 代数学基本方法的训练. 培养学生在抽象线性空间内处理理论问题的能力. 能把较具体的问题如线性方程组,矩阵领域的问题转化为抽象线性空间和线性变换领域的问题来处理;又会把抽象领域的问题具体化(如计算线性变换特征值转化为解代数方程). 初步学习抽象代数中普遍使用的基本方法,如线性空间的子空间的运用(在群论、环论、模论、线性结合与非结合代数中的子群、子环、子模、子代数等等的的应用都是这一普遍方法的体现),商空间的应用(对应于一般情况下商群、商环、商模、商代数的使用).

3) 线性代数基本计算,特别是求解线性方程组,求逆矩阵,计算行列式,求线性变换特征值与特征向量,用正交变换化实对称矩阵成对角形等等数字计算的训练.

4) 矩阵与多项式技巧的运用,特别是分块矩阵的使用.

5) 综合运用分析、几何、代数方法处理问题的初步训练.

4. 如何处理基本理论与实际应用之间的关系

高等代数的理论知识在数学、自然科学、工程技术以至经济人文等领域都有广泛的应用. 在教材中适当加入一些实际应用的知识和好的例题是必要的,也有助于学生提高学习本课程的积极性和兴趣. 但它作为一年级的基础课程,仍应以基本知识和基本方法的训练为

主,以期提高学生的整体素质.在本课程中不可能也没有必要花过多的精力去研究实际问题的应用.

5. 矩阵论在本课程中处于何种地位

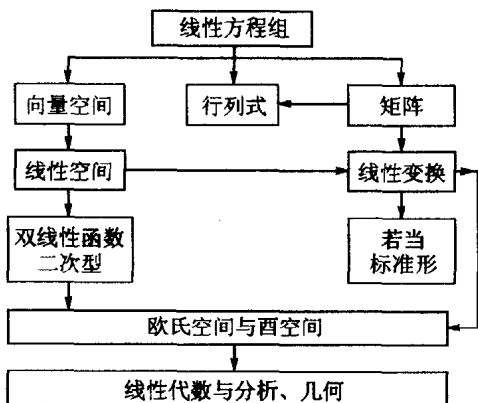
矩阵是重要的数学工具,有广泛的应用.在本课程中应包含适度的使用矩阵工具(技巧)的训练.但它不是主干线,不应占太大分量,冲击主干线.有两点要特别提出:

1) 矩阵是线性映射(变换)在取定基后的具体表现形式.矩阵论的许多问题如特征值、特征向量,相抵、相似、合同等等都可以在线性空间中很直观、简明地处理.作为数学系学生,应训练从更高观点(而不是单从计算技巧上)处理这些问题.

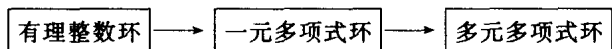
2) 有些领域矩阵使用很多,应由该方向在高等代数课基础上酌情补充讲授有关内容.本课程作为低年级大学生的基础课,应侧重基础理论,基本思想,基本方法的训练,不可能包打天下,讲授后面课程需要的一切知识.

下面对本教材的框架结构作一说明.此教材由三大部分组成.

第一部分:从线性方程组引出向量空间和矩阵,再抽象为线性空间和线性变换,再利用双线性函数和二次型在线性空间中引入度量,建立度量线性空间(欧氏空间与酉空间)及其中依赖于度量的特殊线性变换的理论,可用下面框图表示其结构.



第二部分：从中、小学的整数知识总结归纳为有理整数环，再用多项式与整数在运算中的共性（有加、乘两种运算，有带余除法等），说明这运算所产生的基本理论（整除性、因子分解等等）仅依赖于其满足的运算法则，从而导出不定元的抽象一元多项式环，再进一步讨论多元多项式环，图示如下：



在第二部分的教学中，实际上已经形成了环，特别是多项式环的基本思想，这就为将来在抽象代数课中学习环的理论打了基础。

第三部分：线性空间的张量积与外代数。

本教材按每周课堂讲授 4 学时（另加 2 学时习题课），共两个学期，每学期 18 周安排教材内容。如果学时不足或学生程度不够，则删去教材中带 * 号的章节。在每个章节中都安排了相当数量的习题作为课外作业或在习题课上选用，其中的计算题在书后附有答案，较难的题则有提示。

本教材在编写过程中得到北京大学数学科学学院领导的大力支持。院长张继平教授邀请学院中长期从事代数学科研与教学工作的徐明曜、赵春来、王杰、方新贵几位教授对教材编写的总体设想及大纲作了细致的讨论，提出了许多宝贵的意见。徐明曜、王杰两位教授把他们过去使用过的部分讲义提供给编者参考。赵春来教授对教材进行了细心的审阅，又提出了许多中肯的修改意见。特别是，学院领导邀请著名数学家项武义教授前来北京大学就高等代数教学的改革问题进行了多次座谈与讨论，使编者从中得到许多启发。编者在此向他们表示诚挚的感谢。

本教材编写自始至终都得到北京大学出版社刘勇同志的热情支持。北京高新特激光照排中心唐开宇同志为本教材的排版及多次修改付出了辛勤的劳动，在此一并致谢。

编者

2001 年 12 月
于北京大学

目 录

第一章 代数学的经典课题	(1)
引言	(1)
§ 1 若干准备知识	(4)
1. 复数的基本知识	(4)
2. 数域的概念	(9)
3. 集合论的若干概念	(10)
4. 求和号与乘积号	(15)
5. 充分必要条件	(17)
习题一	(19)
§ 2 一元高次代数方程的基础知识	(22)
1. 高等代数的基本定理	(22)
2. 根的基本性质	(24)
3. 实数域上代数方程的根	(28)
习题二	(29)
§ 3 线性方程组	(30)
1. 线性方程组概述	(30)
2. 线性方程组的解法	(32)
3. 齐次线性方程组	(43)
习题三	(44)
本章小结	(47)
第二章 向量空间与矩阵	(49)
§ 1 m 维向量空间	(49)
1. 向量组的线性相关与线性无关	(53)
2. 向量组的秩	(58)
3. 集合内的等价关系	(64)