走向IMO

数学奥林匹克试题集锦

(2007)

顾问 裘宗沪

2007年IMO中国国家集训队教练组 编

全国高中联赛

CMO(冬令营)

女子奥林匹克

西部奥林匹克

国家队集训

国家队选拔考

IMO

……

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

走向IMO：数学奥林匹克试题集锦：2007/2007年IMO中国国家集训队教练组编. —上海：华东师范大学出版社，2007.9
ISBN 978-7-5617-5568-6

Ⅰ.走… Ⅱ.2… Ⅲ.数学课-中学-试题 Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第133597号

走向IMO
数学奥林匹克试题集锦(2007)

编　　者　2007年IMO中国国家集训队教练组
策划组稿　倪　明　徐　金
文字编辑　徐惟简　陈信漪
封面设计　高　山
版式设计　蒋　克

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路3663号　邮编 200062
电　　话　021-62450163转各部　行政传真 021-62572105
网　　址　www.ecnupress.com.cn　www.hdsdbook.com.cn
市 场 部　传真 021-62860410　021-62602316
邮购零售　电话 021-62869887　021-54340188

照 排 者　南京展望文化发展有限公司
印 刷 者　句容市排印厂
开　　本　890×1240　32开
插　　页　4
印　　张　7.5
字　　数　175千字
版　　次　2007年9月第一版
印　　次　2007年9月第一次
书　　号　ISBN 978-7-5617-5568-6/G·3260
定　　价　18.00元

出 版 人　朱杰人

(如发现本版图书有印订质量问题，请寄回本社市场部调换或电话021-62865537联系)

华东师范大学出版社

2007年IMO中国队合影

后排左起：朱华伟（副领队，广州大学）、胡　涵（湖南师大附中）、
沈才立（镇海中学）、冷岗松（领队，上海大学）、
张承宇（观察员，深圳中学）、沈虎跃（观察员，镇海中学）
前排左起：杨　奔（人大附中）、付　雷（武钢三中）、王　烜（深圳中学）、
马腾宇（东北师大附中）

前　言

本书以2007年国家集训队的测试题和国家队的训练题为主体，搜集了2006年8月至2007年7月间国内主要的数学竞赛及2007年国际数学奥林匹克试题和解答，并且附上了2007年俄罗斯和美国数学奥林匹克的试题与解答.这些试题大多是从事数学奥林匹克教学和研究的专家们的精心创作，其中的一些解答源自国家集训队和国家队队员，他们的一些巧思妙解为本书增色不少.

在过去的一年中，我国中学生数学的主要赛事有2006年全国高中数学联赛（由中国数学会普及工作委员会主办）、2007年全国中学生数学冬令营（CMO）（由中国数学奥林匹克委员会主办），以及由中国数学奥林匹克委员主办的第5届中国女子数学奥林匹克（CGMO）和第6届西部数学奥林匹克（WCMO）等.在2007年国家集训队和国家队集训期间，得到了裘宗沪、王杰、潘承彪等专家们的鼓励、支持和指导，得到了吴建平先生的各方面的帮助.特别是，在国家队集训期间，潘承彪教授、李伟固教授、陶平生教授、朱华伟教授、冷岗松教授、叶中豪先生等作了专题讲座和适应性的测试.在国家集训队期间，美国国家队领队冯祖鸣先生作了专题讲座，罗炜博士、刘志鹏等参加了CMO的命题工作，再次对他们的支持表示衷心的感谢.

本书倾注了许多专家和学者的心血，书中有许多他们的创造性的工作.本书可供数学爱好者、参加数学竞赛的广大中学生、从

事数学竞赛教学的教练员、开设数学选修课的教师参考.

2006 年全国高中数学联赛和加试由吴建平整理;2007 年中国数学奥林匹克,2007 年中国国家队培训题,以及 2007 年国际数学奥林匹克(第 48 届 IMO)由冷岗松整理;2006 年第 5 届中国女子数学奥林匹克,2007 年中国家集训队测试题,以及 2007 年中国国家队选拔考试题由朱华伟整理;2006 年第 6 届中国西部数学奥林匹克由刘诗雄整理;2007 年第 4 届中国东南地区数学奥林匹克由李胜宏整理. 2007 年俄罗斯数学奥林匹克由苏淳提供,2007 年美国数学奥林匹克由熊斌提供.

囿于作者的水平,加上编写时间仓促,不足和错误在所难免,请广大读者朋友批评指正,不吝指教.

2007 年 IMO 中国国家集训队教练组

2007 年 7 月

目　录

2006年全国高中数学联赛

2006年全国高中数学联赛及其加试由中国数学会普及工作委员会和浙江省数学会负责命题.

联赛试题包括6个选择题、6个填空题和3个解答题.满分150分.加试试题包括3个解答题,满分150分.

各省、市、区总分居前的同学获得赛区一等奖,2006年全国各地获得赛区一等奖的总人数为1 066名.根据教育部的规定,获得赛区一等奖的同学可以被保送进入大学.

全国高中数学联赛的另外一项任务就是产生来年1月份举行的中国数学奥林匹克(全国中学生数学冬令营)的营员,共有181名同学取得参加2007年中国数学奥林匹克的资格,这是"全国中学生数学冬令营"近年来的第一次"扩军".

说明:

1. 评阅试卷时,请依据本评分标准.选择题只设6分和0分两档,填空题只设9分和0分两档;其他各题的评阅,请严格按照本评分标准的评分档次给分,不要增加其他中间档次.

2. 如果考生的解答方法和本解答不同,只要思路合理,步骤正确,在评卷时可参照本评分标准适当划分档次评分,5分为一个档次,不要再增加其他中间档次.

一、选择题(本题满分 36 分,每小题 6 分)

1 已知$\triangle ABC$,若对任意 $t\in\mathbf{R}$, $|\overrightarrow{BA}-t\overrightarrow{BC}|\geqslant|\overrightarrow{AC}|$,则$\triangle ABC$一定为(　　).

(A) 锐角三角形　　(B) 钝角三角形

(C) 直角三角形　　(D) 答案不确定

解　令$\angle ABC=\alpha$,过A作$AD\perp BC$于D. 由$|\overrightarrow{BA}-t\overrightarrow{BC}|\geqslant|\overrightarrow{AC}|$,推出

$$|\overrightarrow{BA}|^2-2t\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+t^2|\overrightarrow{BC}|^2\geqslant|\overrightarrow{AC}|^2.$$

令 $t=\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|^2}$,代入上式,得

$$|\overrightarrow{BA}|^2-2|\overrightarrow{BA}|^2\cos^2\alpha+\cos^2\alpha|\overrightarrow{BA}|^2\geqslant|\overrightarrow{AC}|^2,$$

即$|\overrightarrow{BA}|^2\sin^2\alpha\geqslant|\overrightarrow{AC}|^2$,也即$|\overrightarrow{BA}|\sin\alpha\geqslant|\overrightarrow{AC}|$. 从而有$|\overrightarrow{AD}|\geqslant|\overrightarrow{AC}|$. 由此可得$\angle ACB=\dfrac{\pi}{2}$. 故选 C.

2 设 $\log_x(2x^2+x-1)>\log_x 2-1$,则 x 的取值范围为(　　).

(A) $\frac{1}{2}<x<1$　　(B) $x>\frac{1}{2}$,且 $x\neq1$

(C) $x>1$　　(D) $0<x<1$

解　因为$\begin{cases}x>0,\ x\neq1,\\2x^2+x-1>0,\end{cases}$解得 $x>\dfrac{1}{2}$, $x\neq1$.

由 $\log_x(2x^2+x-1)>\log_x 2-1\Rightarrow\log_x(2x^3+x^2-x)>\log_x 2$

$\Rightarrow\begin{cases}0<x<1,\\2x^3+x^2-x<2,\end{cases}$解得 $0<x<1$；或$\begin{cases}x>1,\\2x^3+x^2-x>2,\end{cases}$解得 $x>1$.

所以 x 的取值范围为 $x>\frac{1}{2}$，且 $x\neq1$. 故选 B.

3 已知集合 $A=\{x\mid 5x-a\leqslant 0\}$，$B=\{x\mid 6x-b>0\}$，$a, b\in \mathbf{N}$，且 $A\cap B\cap \mathbf{N}=\{2, 3, 4\}$，则整数对 (a, b) 的个数为(　　).

(A) 20　　(B) 25　　(C) 30　　(D) 42

解　$5x-a\leqslant 0\Rightarrow x\leqslant\frac{a}{5}$；$6x-b>0\Rightarrow x>\frac{b}{6}$. 要使 $A\cap B\cap \mathbf{N}=\{2, 3, 4\}$，则$\begin{cases}1\leqslant\frac{b}{6}<2,\\4\leqslant\frac{a}{5}<5,\end{cases}$即$\begin{cases}6\leqslant b<12,\\20\leqslant a<25.\end{cases}$所以数对 (a, b) 共有 $C_6^1C_5^1=30$ 个. 故选 C.

4 在直三棱柱 $A_1B_1C_1-ABC$ 中，$\angle BAC=\frac{\pi}{2}$，$AB=AC=AA_1=1$. 已知 G 与 E 分别为 A_1B_1 和 CC_1 的中点，D 与 F 分别为线段 AC 和 AB 上的动点(不包括端点). 若 $GD\perp EF$，则线段 DF 的长度的取值范围为(　　).

(A) $\left[\frac{1}{\sqrt{5}}, 1\right)$　　(B) $\left[\frac{1}{5}, 2\right)$

(C) $[1, \sqrt{2})$　　(D) $\left[\frac{1}{\sqrt{5}}, \sqrt{2}\right)$

解　建立直角坐标系，以 A 为坐标原点，AB 为 x 轴，AC 为 y 轴，AA_1 为 z 轴，则 $F(t_1, 0, 0)(0<t_1<1)$，$E\left(0, 1, \frac{1}{2}\right)$，$G\left(\frac{1}{2}, 0, 1\right)$，$D(0, t_2, 0)$ $(0<t_2<1)$. 所以 $\overrightarrow{EF}=\left(t_1, -1, -\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{GD}=\left(-\frac{1}{2}, t_2, -1\right)$. 因为 $GD\perp EF$，所以 $t_1+2t_2=1$，由此推出 $0<t_2<\frac{1}{2}$. 又 $\overrightarrow{DF}=(t_1, -t_2, 0)$，$|\overrightarrow{DF}|=\sqrt{t_1^2+t_2^2}=\sqrt{5t_2^2-4t_2+1}=\sqrt{5\left(t_2-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{1}{5}}$，从而有 $\sqrt{\frac{1}{5}}\leqslant|\overrightarrow{DF}|<1$. 故选 A.

5 设 $f(x)=x^3+\log_2(x+\sqrt{x^2+1})$，则对任意实数 a, b，$a+b\geqslant 0$ 是 $f(a)+f(b)\geqslant 0$ 的(　　).

(A) 充分必要条件　　(B) 充分而不必要条件

(C) 必要而不充分条件　　(D) 既不充分也不必要条件

解　显然 $f(x)=x^3+\log_2(x+\sqrt{x^2+1})$ 为奇函数，且单调递增. 于是若 $a+b\geqslant 0$，则 $a\geqslant -b$，有 $f(a)\geqslant f(-b)$，即 $f(a)\geqslant -f(b)$，从而有 $f(a)+f(b)\geqslant 0$. 反之，若 $f(a)+f(b)\geqslant 0$，则 $f(a)\geqslant -f(b)=f(-b)$，推出 $a\geqslant -b$，即 $a+b\geqslant 0$. 故选 A.

6 数码 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{2\,006}$ 中有奇数个 9 的 2 007 位十进制数 $\overline{2a_1a_2a_3\cdots a_{2\,006}}$ 的个数为(　　).

(A) $\frac{1}{2}(10^{2\,006}+8^{2\,006})$　　(B) $\frac{1}{2}(10^{2\,006}-8^{2\,006})$

(C) $10^{2\,006}+8^{2\,006}$　　(D) $10^{2\,006}-8^{2\,006}$

解 出现奇数个 9 的十进制数个数有

$$A=C_{2006}^{1}9^{2005}+C_{2006}^{3}9^{2003}+\cdots+C_{2006}^{2005}9.$$

又由于 $$(9+1)^{2006}=\sum_{k=0}^{2006}C_{2006}^{k}9^{2006-k}$$

以及 $$(9-1)^{2006}=\sum_{k=0}^{2006}C_{2006}^{k}(-1)^{k}9^{2006-k},$$

从而得 $$A=C_{2006}^{1}9^{2005}+C_{2006}^{3}9^{2003}+\cdots+C_{2006}^{2005}9$$

$$=\frac{1}{2}(10^{2006}-8^{2006}).$$

故选 B.

二、填空题(本题满分 54 分,每小题 9 分)

7 设 $f(x)=\sin^4 x-\sin x\cos x+\cos^4 x$,则 $f(x)$ 的值域是________.

解 $f(x)=\sin^4 x-\sin x\cos x+\cos^4 x=1-\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\sin^2 2x.$

令 $t=\sin 2x$,则

$$f(x)=g(t)=1-\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}t^2=\frac{9}{8}-\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\right)^2.$$

因此 $\min\limits_{-1\leqslant t\leqslant 1}g(t)=g(1)=\frac{9}{8}-\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{4}=0$, $\max\limits_{-1\leqslant t\leqslant 1}g(t)=g\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{8}-\frac{1}{2}\cdot 0=\frac{9}{8}$.

即得 $0\leqslant f(x)\leqslant\frac{9}{8}$.

8 若对一切 $\theta \in \mathbf{R}$，复数 $z=(a+\cos\theta)+(2a-\sin\theta)\mathrm{i}$ 的模不超过 2，则实数 a 的取值范围为________.

解 依题意，得

$$|z| \leqslant 2 \Leftrightarrow (a+\cos\theta)^2+(2a-\sin\theta)^2 \leqslant 4$$

$$\Leftrightarrow 2a(\cos\theta-2\sin\theta) \leqslant 3-5a^2$$

$$\Leftrightarrow -2\sqrt{5}a\sin(\theta-\varphi) \leqslant 3-5a^2\left(\varphi=\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$（对任意实数 θ 成立）

$$\Rightarrow 2\sqrt{5}|a| \leqslant 3-5a^2 \Rightarrow |a| \leqslant \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

故 a 的取值范围为 $\left[-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right]$.

9 已知椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ 的左右焦点分别为 F_1 与 F_2，点 P 在直线 l：$x-\sqrt{3}y+8+2\sqrt{3}=0$ 上. 当 $\angle F_1PF_2$ 取最大值时，比 $\frac{|PF_1|}{|PF_2|}$ 的值为________.

解 由平面几何知，要使 $\angle F_1PF_2$ 最大，则过 F_1、F_2、P 三点的圆必定和直线 l 相切于 P 点. 设直线 l 交 x 轴于 $A(-8-2\sqrt{3}, 0)$，则 $\angle APF_1=\angle AF_2P$，即 $\triangle APF_1 \backsim \triangle AF_2P$，即

$$\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=\frac{|AP|}{|AF_2|}, \tag{1}$$

又由圆幂定理

$$|AP|^2=|AF_1|\cdot|AF_2|, \tag{2}$$

而 $F_1(-2\sqrt{3},0)$，$F_2(2\sqrt{3},0)$，$A(-8-2\sqrt{3},0)$，从而有 $|AF_1|=8$，$|AF_2|=8+4\sqrt{3}$，代入(1)，(2) 得

$$\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=\sqrt{\frac{|AF_1|}{|AF_2|}}=\sqrt{\frac{8}{8+4\sqrt{3}}}=\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1.$$

10 底面半径为 1 cm 的圆柱形容器里放有四个半径为$\frac{1}{2}$ cm 的实心铁球，四个球两两相切，其中底层两球与容器底面相切. 现往容器里注水，使水面恰好浸没所有铁球，则需要注水______ cm^3.

解 设四个实心铁球的球心为 O_1、O_2、O_3、O_4，其中 O_1、O_2 为下层两球的球心，A、B、C、D 分别为四个球心在底面的射影. 则 $ABCD$ 是一个边长为$\frac{\sqrt{2}}{2}$的正方形. 所以注水高为 $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$. 故应注水

$$\pi\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-4\times\frac{4}{3}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^3=\left(\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\pi.$$

11 方程 $(x^{2\,006}+1)(1+x^2+x^4+\cdots+x^{2\,004})=2\,006x^{2\,005}$ 的实数解的个数为______.

解
$$(x^{2\,006}+1)(1+x^2+x^4+\cdots+x^{2\,004})=2\,006x^{2\,005}$$
$$\Leftrightarrow\left(x+\frac{1}{x^{2\,005}}\right)(1+x^2+x^4+\cdots+x^{2\,004})=2\,006$$
$$\Leftrightarrow x+x^3+x^5+\cdots+x^{2\,005}+\frac{1}{x^{2\,005}}+\frac{1}{x^{2\,003}}+\frac{1}{x^{2\,001}}$$

$+\cdots+\frac{1}{x}=2\,006$

$$\Leftrightarrow 2\,006=x+\frac{1}{x}+x^3+\frac{1}{x^3}+\cdots+x^{2\,005}+\frac{1}{x^{2\,005}}$$

$$\geqslant 2\cdot 1\,003=2\,006,$$

要使等号成立,必须 $x=\frac{1}{x}$, $x^3=\frac{1}{x^3}$, $\cdots$, $x^{2\,005}=\frac{1}{x^{2\,005}}$,即 $x=\pm 1$.

但是 $x\leqslant 0$ 时,不满足原方程. 所以 $x=1$ 是原方程的全部解. 因此原方程的实数解个数为 1.

12 袋内有 8 个白球和 2 个红球,每次从中随机取出一个球,然后放回 1 个白球,则第 4 次恰好取完所有红球的概率为________.

解 第 4 次恰好取完所有红球的概率为

$$\frac{2}{10}\times\left(\frac{9}{10}\right)^2\times\frac{1}{10}+\frac{8}{10}\times\frac{2}{10}\times\frac{9}{10}\times\frac{1}{10}+\left(\frac{8}{10}\right)^2\times\frac{2}{10}\times\frac{1}{10}$$

$=0.043\,4$.

三、解答题(本题满分 60 分,每小题 20 分)

13 给定整数 $n\geqslant 2$,设 $M_0(x_0, y_0)$ 是抛物线 $y^2=nx-1$ 与直线 $y=x$ 的一个交点. 试证明对于任意正整数 m,必存在整数 $k\geqslant 2$,使 (x_0^m, y_0^m) 为抛物线 $y^2=kx-1$ 与直线 $y=x$ 的一个交点.

证明 因为 $y^2=nx-1$ 与 $y=x$ 的交点为 $x_0=y_0=$

$\frac{n\pm\sqrt{n^2-4}}{2}$. 显然有 $x_0+\frac{1}{x_0}=n$. ....(5 分)

若(x_0^m, y_0^m)为抛物线 $y^2=kx-1$ 与直线 $y=x$ 的一个交点，则 $k=x_0^m+\frac{1}{x_0^m}$. ....(10 分)

记 $k_m=x_0^m+\frac{1}{x_0^m}$,则

$$k_{m+1}=k_m\left(x_0+\frac{1}{x_0}\right)-k_{m-1}=nk_m-k_{m-1}(m\geqslant 2), \quad (13.1)$$

由于 $k_1=n$ 是整数，

$$k_2=x_0^2+\frac{1}{x_0^2}=\left(x_0+\frac{1}{x_0}\right)^2-2=n^2-2$$

也是整数,所以根据数学归纳法,通过(13.1)式可证明对于一切正整数 m, $k_m=x_0^m+\frac{1}{x_0^m}$ 是正整数. 现在对于任意正整数 m,取 $k=x_0^m+\frac{1}{x_0^m}$,使得 $y^2=kx-1$ 与 $y=x$ 的交点为(x_0^m, y_0^m).

14 将 2 006 表示成 5 个正整数 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 之和. 记 $S=\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 5}x_ix_j$. 问：

(1) 当 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 取何值时,S 取到最大值?

(2) 进一步地,对任意 $1\leqslant i, j\leqslant 5$ 有 $|x_i-x_j|\leqslant 2$,当 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 取何值时,S 取到最小值?说明理由.

解 (1) 首先这样的 S 的值是有界集,故必存在最大值与最小值. 若 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=2\,006$,且使 $S=\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 5}x_ix_j$ 取到最

大值，则必有

$$|x_i - x_j| \leqslant 1\ (1 \leqslant i, j \leqslant 5),\ (*) \cdots\cdots\cdots\cdots (5\text{ 分})$$

事实上，假设（∗）不成立，不妨假设 $x_1 - x_2 \geqslant 2$. 则令 $x_1' = x_1 - 1$, $x_2' = x_2 + 1$, $x_i' = x_i (i = 3, 4, 5)$ 有

$$x_1' + x_2' = x_1 + x_2,\ x_1' \cdot x_2' = x_1x_2 + x_1 - x_2 - 1 > x_1x_2.$$

将 S 改写成

$$S = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 5} x_ix_j$$
$$= x_1x_2 + (x_1 + x_2)(x_3 + x_4 + x_5) + x_3x_4 + x_3x_5 + x_4x_5.$$

同时有

$$S' = x_1'x_2' + (x_1' + x_2')(x_3 + x_4 + x_5) + x_3x_4 + x_3x_5 + x_4x_5.$$

于是有 $S' - S = x_1'x_2' - x_1x_2 > 0$. 这与 S 在 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 时取得最大值矛盾. 所以必有 $|x_i - x_j| \leqslant 1\ (1 \leqslant i, j \leqslant 5)$. 因此当 $x_1 = 402$, $x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 401$ 取到最大值.

……………(10 分)

(2) 当 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2\,006$ 且 $|x_i - x_j| \leqslant 2$ 时，只有

(Ⅰ) 402, 402, 402, 400, 400;

(Ⅱ) 402, 402, 401, 401, 400;

(Ⅲ) 402, 401, 401, 401, 401

三种情形满足要求. ……………(15 分)

而后面两种情形是在第一组情形下作 $x_i' = x_i - 1$, $x_j' = x_j + 1$ 调整下得到的. 根据上一小题的证明可以知道，每调整一次，和式 $S = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 5} x_ix_j$ 变大. 所以在 $x_1 = x_2 = x_3 = 402$, $x_4 = x_5 = 400$ 情形取到最小值. ……………(20 分)