



普通高等教育“十一五”国家级规划教材
普通高等工科院校基础课规划教材

线性代数

第2版

主 编 陈建华



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS



0151.2

137-2

2007

普通高等教育“十一五”国家级规划教材
普通高等工科院校基础课规划教材

线 性 代 数

第 2 版

主编 陈建华

参编 刘金林 魏俊潮

主审 蔡传仁

机 械 工 业 出 版 社

本书是根据高等教育本科线性代数课程的教学基本要求编写而成的。全书分6章,前3章为基础篇,介绍行列式、矩阵、向量组的线性相关性与线性方程组,后3章为应用提高篇,介绍矩阵相似对角化、二次型及线性空间与线性变换的基础知识。

本书是为普通高等院校非数学专业本科生编写的,内容选择突出精选够用,语言表达力求通俗易懂,章节安排考虑了不同专业选用方便。本书也可作为大专院校和成人教育学院的教学参考书,还可供参加自考的广大读者参考。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/陈建华主编. —2版. —北京:机械工业出版社, 2007.5
ISBN 978-7-111-10404-9

I. 线… II. 陈… III. 线性代数 IV. 0151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第046715号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号 邮政编码100037)
责任编辑:郑丹 版式设计:霍永明 责任校对:李秋荣
封面设计:鞠杨 责任印制:杨曦
北京机工印刷厂印刷
2007年5月第2版第1次印刷
170mm×227mm·7.875印张·301千字
标准书号:ISBN 978-7-111-10404-9
定价:18.00元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换
销售服务热线电话:(010) 68326294
购书热线电话:(010) 88379639 88379641 88379643
编辑热线电话:(010) 88379711
封面无防伪标均为盗版

普通高等工科院校基础课规划教材

编 审 委 员 会

顾 问：黄鹤汀 左健民 高文龙
章 跃

主任委员：殷翔文

副主任委员：陈小兵 刘金林 陈 洪
魏贤君 季顺利

秘 书：陈建华

委 员：(排名不分先后)

陆国平 何一鸣 李秋新

陈建华 张祖凤 郑 丹

序

人类已经满怀激情地跨入了充满机遇与挑战的 21 世纪。这个世纪要求高等教育培养的人才必须具有高尚的思想道德，明确的历史责任感和社会使命感，较强的创新精神、创新能力和实践能力，宽广的知识面和扎实的基础。基础知识水平的高低直接影响到人才的素质及能力，关系到我国未来科学、技术的发展水平及在世界上的竞争力。由于基础学科本身的特点，以及某些短期功利思想的影响，不少人对大学基础教育的认识相当偏颇，我们有必要在历史的回眸中借前车之鉴，在未来的展望中创革新之路。我们必须认真转变教育思想，坚持以邓小平同志提出的“三个面向”和江泽民同志提出的“三个代表”为指导，以培养新世纪高素质人才为宗旨，以提高人才培养质量为主线，以转变教育思想观念为先导，以深化教学改革为动力，以全面推进素质教育和改革人才培养模式为重点，以构建新的教学内容和课程体系、加大教学方法和手段改革为核心，努力培养素质高、应用能力与实践能力强、富有创新精神和特色的应用性的复合型人才。

基于上述考虑，中国机械工业教育协会、机械工业出版社、江苏省教育厅（原江苏省教委）和江苏省及省外部分高等工科院校成立了教材编审委员会，组织编写了大学基础课程系列教材，作为加强教学基本建设的一种努力。

这套教材力求具有以下特点：

(1) 科学定位。本套教材主要用于应用性本科人才的培养。

(2) 综合考虑、整体优化，体现“适、宽、精、新、用”。所谓“适”，就是要深浅适度；所谓“宽”，就是要拓宽知识面；所谓“精”，就是要少而精；所谓“新”，就是要跟

踪应用学科前沿，推陈出新，反映时代要求；所谓“用”，就是要理论联系实际，学以致用。

(3) 强调特色。就是要体现一般工科院校的特点，符合一般工科院校基础课教学的实际要求。

(4) 以学生为本。本套教材应尽量体现以学生为本，以学生为中心的教育思想，不为教而教。注重培养学生的自学能力和扩展、发展知识的能力，为学生今后持续创造性的学习打好基础。

尽管本套教材想以新思想、新体系、新面孔出现在读者面前，但由于是一种新的探索，难免有这样那样的缺点甚至错误，敬请广大读者不吝指教，以便再版时修正和完善。

本套教材的编写和出版得到了中国机械工业教育协会、机械工业出版社、江苏省教育厅以及各主审、主编和参编学校的大力支持与配合，在此，一并表示衷心感谢。

普通高等工科院校基础课规划教材编审委员会

主任 殷翔文

2002年3月

第 2 版前言

普通高等工科院校基础课规划教材《线性代数》自从 2002 年出版，经几轮使用，师生的反映较好。教材内容安排合理，既满足教育部高等学校线性代数课程教学的基本要求，又涵盖了本科院校学生考研的基本要求，但也存在许多不足之处。

这次修订，在内容宏观组织上仍以矩阵为编写主线，辅线性空间。本书在内容的具体阐述上遵循了由浅入深，难点分散的原则，删繁就简，加强基础；采用“几何观点”和“矩阵方法”并重，贯串于教材的始终，便于读者掌握线性代数主要内容的内在规律；在培养学生能力要求上，选择最重要、最基本的内容，有利于学生形成扎实的基础，在今后的学习中以不变应万变；一方面为学生学习提供数学知识准备，另一方面要为学生今后学习打下良好的素质、能力基础。

修订的主要内容包括以下几个方面：

1. 侧重于高等学校的理工类专业学生的需要，删去第 1 版第 7 章投入产出的数学模型。

2. 重新选配正文中的部分例题，加以分析，帮助学生理解相关理论。

3. 在习题的编写上，调整部分习题，增强习题的目的性，同时分清层次，让学生能按照自己的能力和目标接受到科学的训练。增加习题答案，方便学生使用。

4. 增加附录 C，介绍数域和多项式的相关知识。

5. 查、纠教材中遗漏和错误。

此次修订工作得到了机械工业出版社、扬州大学教务处和扬州大学数学科学学院的大力支持。机械工业出版社郑丹和张

继宏两位老师对本书的修订出版作了大量工作，在此我们表示衷心感谢。

由于我们水平有限，书中难免有不妥之处，欢迎读者批评指正。

编者
2005年5月

第 1 版前言

线性代数是一门重要的基础课。在自然科学、工程技术和
管理科学等诸多领域有着广泛的应用。根据高等教育本科线性
代数课程的教学基本要求，编者结合多年从事线性代数课程教
学的体会编写了这本书，其目的是为普通高等学校非数学专业
学生提供一本适用面较宽的线性代数教材。

在编写过程中，借鉴了国内外许多优秀教材的思想和处理
方法，内容上突出精选够用，表达上力求通俗易懂。根据非数
学专业学生使用的需要，以矩阵作为贯穿全书的主线，一方面
让线性方法得以充分体现，同时有利于学生理解线性代数课程
的基本概念和基本原理。在概念的引入、理论分析和例题演算
等环节上尽可能多地反映代数与几何结合的思想，这样可以使
学生从几何背景中理解代数概念的来龙去脉，并获得解决问题的
启示。重视例题和习题的设计和选配，除了选配巩固课程内容
的基本题目外还选配了部分提高题。

全书共分 7 章，既紧密联系又相对独立。本书前 3 章为基
础篇，后 4 章为应用提高篇。根据本科线性代数课程教学基本
要求，工科类学生应掌握本书的前 6 章的内容；管理专业、财
经专业学生应掌握本书的前 5 章和第 7 章的内容；化学、化工
专业和农学专业学生应掌握本书的前 4 章的内容。开设工程数
学（线性代数）课程的专业，学时数为 27 学时的，选讲本教
材的前 3 章以及第 4 章的第 2、3 节；学时数为 36 学时的，选
讲本教材的前 4 章以及第 5 章的大部分内容。开设线性代数课
程的专业，学时数为 54 学时可讲完前 6 章，或前 5 章和第 7
章。教师可以根据不同专业和不同教学时数选择有关章节进行
教学。根据现行研究生入学考试的考试大纲，从内容上看，本

书的前6章覆盖了数学(一)的考试要求,本书的前5章覆盖了数学(三)的考试要求,本书的前4章覆盖了数学(二)和数学(四)的考试要求。

在编写过程中,中国科学技术大学章璞教授对本书编写大纲提出过许多宝贵的意见,扬州大学蔡传仁教授审阅了全书,蒋宏圣副教授校阅了书稿。机械工业出版社,扬州大学教务处、理学院和数学系对本书的编写出版给予了很大的帮助,在此表示衷心的感谢。此外,编者从学习代数学到讲授代数课程,始终得到方洪锦教授、蔡传仁教授的指导和扬州大学数学系老师的关心,在此一并表示感谢。

由于编者水平有限,书中内容、体系、结构不当甚至错误在所难免,敬请各位专家、学者不吝赐教,欢迎读者批评指正。

编者

2002年2月

目 录

序

第 2 版前言

第 1 版前言

第 1 章 行列式	1
1.1 行列式的定义	1
1.2 行列式的性质	8
1.3 行列式的展开定理	13
1.4 行列式的计算	19
1.5 克莱姆 (Cramer) 法则	26
习题一	30
第 2 章 矩阵	35
2.1 矩阵的定义与运算	35
2.2 几种特殊的矩阵	44
2.3 可逆矩阵	47
2.4 矩阵的分块	54
2.5 矩阵的初等变换与初等矩阵	62
2.6 矩阵的秩	69
习题二	75
第 3 章 向量与线性方程组	80
3.1 线性方程组解的存在性	80
3.2 向量组的线性相关性	88
3.3 向量组的秩	95
3.4 向量空间	102
3.5 线性方程组解的结构	108
习题三	116
第 4 章 矩阵相似对角化	121
4.1 欧氏空间 R^n	121
4.2 方阵的特征值和特征向量	129
4.3 矩阵相似对角化条件	136
4.4 实对称矩阵的相似对角化	143
4.5 Jordan 标准形介绍	148

习题四	156
第 5 章 二次型	159
5.1 二次型及其矩阵表示	159
5.2 化二次型为标准形	162
5.3 化二次型为规范形	170
5.4 正定二次型和正定矩阵	173
习题五	182
第 6 章 线性空间与线性变换	185
6.1 线性空间的概念	185
6.2 线性空间的基、维数和坐标	192
6.3 线性变换的概念	198
6.4 线性变换在不同基下的矩阵	203
习题六	205
附录	207
附录 A 矩阵特征问题的数值解	207
附录 B 广义逆矩阵简介	212
附录 C 数域与多项式简介	215
附录 D Maple 的基本知识	219
部分习题答案	225
参考文献	237

第 1 章 行 列 式

线性代数是高等学校的一门重要基础课，也是中学代数的继续和发展。行列式是线性代数中主要研究对象方阵的重要数值特征，它在线性代数中起着重要作用。本章介绍行列式的概念、基本性质、计算方法及简单应用。

1.1 行列式的定义

行列式的概念来源于解线性方程组的问题。在初等数学中，为了简化线性方程组解的表达式，引进了二、三阶行列式的概念。作为线性代数的重要工具，在讨论 n 元线性方程组和向量的运算时，需要把行列式推广到 n 阶，即讨论 n 阶行列式的问题。

1.1.1 二阶、三阶行列式

在初等数学中，二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad (1-1)$$

的解，实际上为平面上两条直线的交点。当这两条直线不平行时，即 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，利用消元法可解得

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}, \quad x_2 = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

为了便于记忆上述解的公式，引进记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

并称之为二阶行列式。利用二阶行列式的概念，方程组 (1-1) 的解可以表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}$$

$$\text{其中 } D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}。$$

【例 1-1】 解线性方程组

$$\begin{cases} \cos\theta x_1 - \sin\theta x_2 = a \\ \sin\theta x_1 + \cos\theta x_2 = b \end{cases}$$

解：计算二阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

而

$$D_1 = \begin{vmatrix} a & -\sin\theta \\ b & \cos\theta \end{vmatrix} = a\cos\theta + b\sin\theta$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \cos\theta & a \\ \sin\theta & b \end{vmatrix} = b\cos\theta - a\sin\theta$$

所以

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = a\cos\theta + b\sin\theta$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = b\cos\theta - a\sin\theta$$

对于含有三个未知量的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (1-2)$$

可以进行类似的讨论。由此引进记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

并称之为 3 阶行列式。行列式中的横排、纵排分别称为它的行和列。行列式中的数，称为行列式的元素。每个元素有两个下标，第一个下标表示它所在的行，称为行指标；第二个下标表示它所在的列，称为列指标，如 a_{12} 就是位于第 1 行，第 2 列的元素。2、3 阶行列式所表示的数利用对角线法则来记忆（见图 1-1）。

【例 1-2】 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ 。

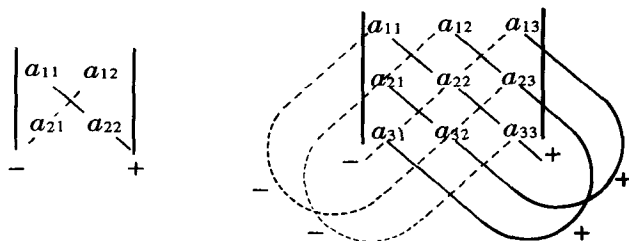


图 1-1

$$\begin{aligned}
 \text{解 } D &= 1 \times 0 \times 6 + 2 \times 5 \times (-1) + 3 \times 4 \times 0 - \\
 &\quad 1 \times 5 \times 0 - 2 \times 4 \times 6 - 3 \times 0 \times (-1) \\
 &= -10 - 48 = -58
 \end{aligned}$$

从2、3阶行列式的定义可以看出，行列式的值是一些“项”的代数和。例如在3阶行列式中，每一项都是3个数的连乘积，而且这三个数取自3阶行列式的不同的行与不同的列，总项数以及每一项相应的符号，则与其下标的排列有关。为了揭示2、3阶行列式的结构规律，将行列式的概念推广到 n 阶，先简单介绍一些有关排列的基本知识。

1.1.2 数码的排列

n 个数码 $1, 2, \dots, n$ 组成的有序数组称为一个 n 元排列。 n 元排列的一般形式可表示为 i_1, i_2, \dots, i_n ，其中 i_k ($1 \leq k \leq n$)为数 $1, 2, \dots, n$ 中的某一个数，且互不相同，而 i_k ($1 \leq k \leq n$)的下标 k 表示 i_k 在 n 元排列中的第 k 个位置上。如312和634521分别为三元和六元排列，在排列312中， $i_1 = 3, i_2 = 1, i_3 = 2$ 。众所周知， n 个数码 $1, 2, \dots, n$ 组成的全部排列总数为 $n!$ 。例如自然数 $1, 2, 3$ 可组成 $3! = 6$ 个排列。

定义 1-1 在排列 $i_1 \cdots i_r \cdots i_s \cdots i_n$ 中，如果 $i_s > i_r$ ，称这两个数构成一个逆序。排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中逆序的总个数称为该排列的逆序数，记为 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 。

【例 1-3】 求下列排列的逆序数：

- (1) 2143; (2) 13524; (3) $n(n-1) \cdots 21$;
 (4) $135 \cdots (2n-1)246 \cdots (2n)$ 。

解 (1) 在排列2143中，数2与后面的1构成逆序；数1后面没有数与1构成逆序；数4与后面的3构成逆序；数3排在最后面。排列2143构成逆序的数对有21, 43。故 $\tau(2143) = 1 + 0 + 1 + 0 = 2$ ；

$$(2) \tau(13524) = 0 + 1 + 2 + 0 + 0 = 3;$$

$$(3) \tau(n(n-1)\cdots 21) = (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 \\ = \frac{n(n-1)}{2};$$

(4) 所给排列中 1, 3, 5, \dots , $(2n-1)$ 的逆序个数为 0, 2, 4, 6, \dots , $(2n)$ 的逆序个数也为 0, 故只要计算其余数的逆序个数。

$$\tau(135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)) = 1 + 2 + \cdots + (n-1) \\ = \frac{n(n-1)}{2}$$

排列 $12\cdots(n-1)n$ 具有自然顺序, 称为自然排列。

定义 1.2 一个排列的逆序数为偶数时, 称它为偶排列; 一个排列的逆序数为奇数时, 称它为奇排列。

排列 23154 的逆序数 $\tau(23154) = 3$, 为奇排列, 而排列 23451 的逆序数 $\tau(23451) = 4$, 为偶排列。排列 $n(n-1)\cdots 21$ 的逆序数为 $\frac{1}{2}n(n-1)$, 当 $n=4k$ 或 $4k+1$ 时, 为偶排列, 当 $n=4k+2$ 或 $4k+3$ 时, 为奇排列。

【例 1-4】 由 1, 2, 3 这三个数码组成的三元排列共有 $3! = 6$ 个, 这 6 个排列及其奇偶性如下表所示:

排列	逆序数	排列的奇偶性
123	0	偶排列
132	1	奇排列
213	1	奇排列
231	2	偶排列
312	2	偶排列
321	3	奇排列

在一个排列 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中, 如果将两个数码 i_s 与 i_t 对调, 其余的数码不变而得到另一个新排列 $i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$, 这样的变换叫做一个对换, 记为 (i_s, i_t) 。

如, 对排列 21354 施以对换 $(1, 4)$ 后得到排列 24351。

定理 1.1 对换改变排列的奇偶性。

证明 首先讨论对换相邻数码的特殊情形。设排列为 $AijB$, 其中

A, B 表示除了 i, j 两个数码外的其余数码, 经过对换 (i, j) , 变为新排列 $AjiB$ 。比较上面两个排列中的逆序关系, 显然 A, B 中数码的次序没有改变, i, j 与 A, B 中数码的次序也没有改变, 仅仅改变了 i 与 j 的次序, 因此, 新排列仅比原排列增加了一个逆序 (当 $i < j$ 时), 或减少了一个逆序 (当 $i > j$ 时), 所以对换后排列与原排列的奇偶性相反。

现在看一般情形。设排列为 $Aik_1k_2 \cdots k_sjB$, 经过对换 (i, j) , 变为新排列 $Ajk_1k_2 \cdots k_s iB$ 。新排列可以由原排列将数码 i 依次与 k_1, k_2, \cdots, k_s, j 作 $s+1$ 次相邻数码的对换, 变为 $Ak_1k_2 \cdots k_sjiB$, 再将 j 依次与 k_s, \cdots, k_2, k_1 作 s 次相邻数码的对换, 变为 $Ajk_1k_2 \cdots k_s iB$, 即可以由原排列经过 $2s+1$ 相邻数码的对换得到。由前面的讨论可知, 它改变了奇数次奇偶性, 所以它们的奇偶性相反。证毕。

定理 1-2 全体 n ($n > 1$) 元排列的集合中, 奇、偶排列各占一半。

证明 n 个数码 $1, 2, \cdots, n$ 组成的全部排列总数为 $n!$, 设其中奇排列为 p 个, 偶排列为 q 个。设想将每一个奇排列施以相同的对换, 如 $(1, 2)$, 则由定理 1-1 可知 p 个奇排列全部变为偶排列, 于是 $p \leq q$; 同理如果将全部偶排列施以相同的对换, 如 $(1, 2)$, 则 q 个偶排列全部变为奇排列, 于是 $q \leq p$, 所以 $p = q$ 。证毕。

推论 任意一个排列都可以经过一定次数的对换, 变成自然排列, 且奇排列变成自然排列的对换次数为奇数, 偶排列变成自然排列的对换次数为偶数。

1.1.3 n 阶行列式的定义

有了排列的逆序数和奇偶性的概念, 我们观察 2、3 阶行列式的“项”的构成。每一项的正、负号及项数, 它们可分别表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2} (-1)^{\tau(j_1 j_2)} a_{1j_1} a_{2j_2}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 j_3} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$$

这里 $\sum_{j_1 j_2}$ 表示对 1, 2 这两个数所有排列 $j_1 j_2$ (2 项) 求和, $\sum_{j_1 j_2 j_3}$ 表示对 1, 2, 3 三个数的所有排列 $j_1 j_2 j_3$ (6 项) 求和。