断续节理岩体破坏过程的数值方法及工程应用

李树忱 李术才 著

2

科学出版社
www.sciencep.com

断续节理岩体破坏过程的数值方法及工程应用

李树忱　李术才　著

国家自然科学基金重点项目(No. 50539080)

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书以水电和隧道工程中断续节理岩体为研究背景，以数值流形方法和无网格方法为基础，研究了断续节理岩体中岩体不连续及其尖端场的数值模拟方法，并开展了相关的实验研究。在实验研究的基础上，建立了节理岩体弹塑性损伤本构方程和相应数值方法，并用于求解实际工程问题。

本书可供土木建筑、水利电力、交通运输、矿山冶金、工程地质领域相关的科研人员、工程技术人员和大专院校师生参考。

图书在版编目(CIP)数据

断续节理岩体破坏过程的数值方法及工程应用/李树忱，李术才著. —北京：科学出版社，2007
ISBN 978-7-03-019667-5

Ⅰ. 断… Ⅱ. ①李… ②李… Ⅲ. ①节理-岩体-岩石破坏机理-数值模拟 ②节理-岩体-岩石破坏机理-工程应用 Ⅳ. TU45

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 127538 号

责任编辑：刘宝莉 / 责任校对：陈玉凤
责任印制：刘士平 / 封面设计：陈　敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
中国科学院印刷厂 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2007年8月第　一　版　开本：B5(720×1000)
2007年8月第一次印刷　印张：13 1/4
印数：1—2 500　字数：255 000

定价：35.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈科印〉)

序

我怀着十分喜悦和赞佩的心情，粗读了《断续节理岩体破坏过程的数值方法及工程应用》一书，由衷感到该书是一本高层次、高水平的学术专著，应该尽早问世，以飨读者。

十年来，他们围绕着岩石力学破裂过程的数值方法、本构关系及实验等问题开展了系统而深入的研究，完成了多项国家自然科学基金课题，取得了一系列丰硕成果，发表了多篇高水平的论文。该书是作者在多年的研究基础上并补充近期所研究的工程实例而完成的。

纵观全书，与同类已出版的著作比较，该书具有如下特色和创新：

推导了基于加权残数法的数值流形方法，发展了数值流形方法的数学理论，拓宽了数值流形方法的应用范围。提出了扩展的数值流形方法，模拟岩体结构的破坏过程。提出了扩展的无网格流形方法，模拟岩体中节理裂隙的扩展过程。为了模拟断续节理岩体在动态荷载作用下的破坏规律，该书在无网格流形方法基础上提出了动态断裂力学的无网格流形方法。

在实验研究方面开展了节理岩体损伤特性的CT实验和完整岩石试件、含单裂隙初始损伤试件和双裂隙初始损伤岩石试件的单轴压缩实验，通过声发射累计数和损伤变量的关系，定量地确定了节理岩体损伤破坏各个阶段的临界值，建立了断续节理岩体损伤本构方程，开发了相应的计算分析程序，并用于求解实际工程问题。

该书的出版为岩石力学破坏过程的数值方法、本构理论的深入研究奠定了坚实的基础，相信该书对岩石力学的发展将起到很好的推进作用。

朱维申

2007年于济南

前　言

本书以水电和隧道工程中断续节理岩体为研究背景，以数值流形方法和无网格方法为基础，研究了断续节理岩体中岩体不连续及其尖端场的数值模拟方法，并开展了相关的实验研究。在实验研究的基础上，建立了节理岩体弹塑性损伤本构方程和相应数值方法，并用于求解实际工程问题。

全书共分十二章。第一章简要概述了断续节理岩体的工程应用和研究方法，并对此进行了简要介绍和评述，目的是给读者提供预备性知识。第二章、第三章结合节理岩体的力学特性，推导了基于加权残数法的数值流形方法，并应用基于加权残数法的数值流形方法求解了势问题。为了模拟节理岩体的实际破坏过程，提出了扩展的数值流形方法。第四章到第七章结合节理岩体破坏特性和工程实际情况，开展了节理岩体破坏过程的无网格流形方法研究，同时开展了节理岩体渗流过程的耦合方法研究。第八章到第十章开展了节理岩体室内实验，并建立了节理岩体弹塑性损伤本构方程。第十一章、第十二章利用前述数值方法和本构方程求解了节理岩体的破裂过程及其在山岭隧道、海底隧道及水电地下厂房稳定分析中的应用研究，其研究成果直接用于指导工程实际。对于每个专题分别介绍了发展中的新方法，本书的取材都是以作者的研究和参与的工程咨询为基础。

本书是在国家自然科学基金项目、省自然科学基金和交通部西部课题的支持下，在项目的进行中完成的，项目的参加人员都直接或间接地对本书作出了贡献，在此我们向为本书作出了贡献的专家、教授和国家自然科学基金委员会的同志们表示感谢，感谢他们卓有成效的支持和帮助。

由于作者水平所限，书中难免存在不妥之处，敬请读者批评指正。

目　　录

第一章　绪　　论

1.1　引　　言

目前，国内外岩体工程发展迅速，越来越多的能源、交通、矿山、水利和国防工程建造在岩石地区，其工程设计、施工、稳定性评价和岩体加固等都直接依赖于节理岩体的强度、变形及裂隙的扩展等特性。而大量的岩土工程实践表明，岩土工程的失稳破坏与其内部的节理裂隙的扩展、贯通及渗流密切相关，如法国的马而帕塞大坝溃坝破坏、意大利的瓦伊昂边坡失稳和中国长江三峡链子崖滑坡等[1]。本书以大型水利水电工程地下洞室群为背景，重点研究裂隙围岩或软弱围岩在洞室群开挖过程中的裂隙及其扩展等力学行为的数值方法和实验方法，为相关问题的理论研究和工程分析提供好的方法。

近年来，岩体断裂和损伤力学的研究越来越受到广大岩土力学工作者的关注，并取得了大量的成果。岩体损伤力学和断裂力学对节理岩体从微裂纹萌生、扩展、演化到宏观裂纹的形成、断裂、破坏全过程进行研究，旨在更真实地分析裂隙岩体的稳定性。目前，解决岩土力学问题的方法主要有实验方法、理论分析方法和数值模拟方法三大类。这三大类方法相辅相成，互为补充。其中数值模拟是解决岩土工程问题的有效手段，已被学术界和工程界广泛接受作为一种力学状态的分析工具，它越来越多地被应用于岩土体稳定性、岩土工程设计和岩土工程基本问题分析中。岩土工程方面的许多专家对岩土力学数值分析方法与最新进展进行了系统的综述[2~6]。岩土力学的数值方法主要包括有限差分法（finite difference method）[7,8]、有限元法（finite element method）[9,10]、边界元法（boundary element method）[11~14]、无单元法（element free method）[15,16]等数值方法，其中以有限元法应用最为广泛。有限元在连续性分析方面取得了很大的成功，但同时也遇到了一些本身不可克服的困难。例如，界面处理上的困难，对任意大变形受制于单元形状的限制等。为了充分考虑岩土介质的非连续性、非均匀性和多相性等特点，有限元法仍然在不断更新和发展之中。在1992年美籍华人石根华针对岩土介质的非连续性、非均匀性等特点，结合有限元法、非连续变形分析方法[17]和解析方法提出了数值流形方法（numerical manifold method）[18]，能够统一处理连续和非连续问题，非常适合于模拟节理岩体的变形规律。

对于岩体这种介于连续与非连续介质之间的材料，沟通连续变形与非连续变形的桥梁是岩体中地质非连续面的扩展、贯通等破坏行为。它是连接岩体变形过程中初始阶段与终了阶段的一条纽带，在整个岩体变形过程中，这些非连续界面的变形、扩展以及失稳对整个工程岩体结构的稳定性是至关重要的。而现有的基于网格的分析方法，多数是以单元离散的思想为基础。在分析裂隙扩展时，都遇到了以下两方面的困难：①网格重构的困难；②计算所得裂隙扩展的结果严重地受到网格划分形式的影响。

节理岩体作为一种含有初始损伤的岩体，在实验方面的研究也得到了飞速发展，如观测裂纹发展的声发射技术和扫描电镜技术。而在对裂纹扩展规律的研究中大都使用二维模式，并且由于实验条件等原因，目前裂隙节理岩体中的裂隙的扩展规律从细观到宏观的实验还不多见，因此研究复杂应力环境下节理岩体裂纹扩展和损伤演化的规律，具有重要的学术和工程意义。

因此，研究适合分析节理岩体新的数值方法和采用先进的实验设备对节理岩体进行实验分析是解决岩土工程的有效手段。

1.2　数值流形方法和无网格方法研究现状

1.2.1　数值流形方法研究现状

岩体结构的计算机模拟近年来发展迅速，它不仅能够模拟节理岩体在极限荷载作用下的应力-应变关系，更为重要的是它还能够捕捉峰值以上结构的动态响应[19]，进而可以跟踪岩体结构中裂隙演化的实际破坏过程，包括岩体结构从连续到非连续的转变过程。而这种跟踪岩体结构尤其是复杂地下岩体结构的破坏演化过程及对岩体结构稳定的综合评价方面，早已被科技工作者和工程师们认识到是相当重要的。

一个综合考虑节理岩体及其演化的计算方法仍然有很长的路要走。节理岩体在演化过程中包括原始连续介质的损伤和断裂过程、岩体结构从连续到非连续状态的演化过程以及后来的岩体结构总体分离和局部塌落的过程，近年来综合考虑节理岩体破坏全过程的计算方法得到了迅速发展。其中，基于连续介质和非连续介质相结合的模拟方法已得到很快的发展并取得了显著的效果，对裂隙节理岩体的模拟主要经历了以下几个阶段。

节理岩体的数值模拟最早是采用分布式裂隙模拟方法。该方法是以连续介质力学为基础，采用应变软化的本构模型来模拟裂隙的扩展及其演化过程[20~27]。而裂隙演化本身就是一个具有复杂物理现象的过程，对于岩体内具有多条裂隙时，采用分布式模拟方法优于单独考虑某一条或几条裂隙和剪切带的模拟方法。

对于多条裂隙的模拟，分布式模拟方法优于离散裂隙的模拟方法。这主要是因为方法本身是基于材料非线性的本构模型，这些模型常常是以损伤力学、塑性力学（考虑应变软化）或一些高阶连续介质力学的本构关系为基础的。这些方法虽然在模拟裂隙扩展方面取得了一定的成功，但均是以连续介质力学为基础，位移场中是不允许出现不连续的。基于连续介质的方法要想扩展它们的求解能力就必须借助于材料本构模型（高阶模型、梯度模型、考虑应变软化的塑性模型等）来扩充它们原有的数学模型，在控制方程离散过程中，扩展试函数的基空间（网格自适应法、非连续形函数法和内部剪切带法）[28~32]。在所有这些方法中，实际岩体结构的破坏形式仍是以连续的形式表现出来的。对于岩体结构破坏时，其整体或局部相互分离没有考虑。利用上述方法无法真实地模拟岩体结构的实际破坏过程。

其次是采用离散式裂隙模拟方法。该法是以断裂力学中裂纹尖端应力和位移场为基础，与局部或整体网格重构相互耦合来完成裂隙扩展分析[33,34]。但该方法只适合于模拟少数几条裂隙的扩展，对于多条裂隙，该方法在网格重构时会遇到麻烦。同时，网格重构时也浪费大量的机时和大量的存储空间。在离散式裂隙模拟过程中，裂隙体穿过部分要引入位移不连续。所以岩体结构的最终破坏形态是很容易被识别出来的。但在应用离散式裂隙模拟时，一般就是应用能量释放率准则来追踪单个裂纹的扩展，在追踪多裂纹扩展时该方法将导致结构的拓扑和算法上的复杂。同时该方法常常假设裂隙一旦开裂就不能闭合，没有考虑裂隙面间再次接触的可能，而实际岩体工程中，裂隙面间的多次接触是经常发生的。

再次是以非连续为基础的模拟方法。目前该方法在节理岩体仿真方面的研究明显增加[35~45]。该方法主要假定岩体内不连续状态是事先存在的，且以不连续为基础把岩体分割成若干相互联系的、可动的块体系统组成，如离散元法和不连续变形分析法等。这些方法的明显特点就是把岩体结构看成是由一系列相互可以改变块体的几何形状和接触条件相互关联的块体系统组成。非连续变形分析就是其中在岩体力学中应用比较成功的一种基于块体系统的一种非连续的数值方法。主要应用于岩体力学中，用来模拟节理岩体的变形规律[46~50]。然而岩体结构本身并不是完全被裂隙切割成块体，其间还存在着没有完全被裂隙切割的连续部分。是由连续和非连续共同组成的统一体。将其假设为完全分离来加以分析，是不能真实的反映节理岩体的变形规律。

针对节理岩体这种既有连续又有非连续的特性，石根华在 1992 年提出了一种更为一般的同时处理连续与非连续的统一计算方法——数值流形方法(NMM)。该方法以数值流形为核心，在非连续变形分析的块体系统非连续运动学理论基础上，融入了有限元和解析法的连续变形分析方法，创立了可在一切空间至少包括有限元、非连续变形分析和解析法在内的一种新的统一计算形式。由

于它能够统一处理连续与非连续问题，非常适合模拟节理岩体的变形规律，在岩体力学与工程领域发展尤为迅速[51~64]。

数值流形方法是利用现代数学中流形分析的有限覆盖技术而建立起来的一种最新的数值分析方法。与传统的有限元方法不同，数值流形方法中的有限覆盖是由数学覆盖和物理覆盖组成，而且数学覆盖和物理覆盖可以相互分离。通过采用连续和非连续覆盖函数的办法可以统一地处理连续和非连续的力学问题。它被誉为是新世纪的数值方法，具有极其深远的发展前景和应用价值[65,66]。在岩土力学问题的分析中应用简单流形单元的基本理论和其对任意复杂边界网格划分的适应性，通过增加覆盖位移函数的阶数而不是单元的节点数来提高数值解的精度，可以克服有限元理论中的前后处理困难、应力-应变结果不连续和结构的开裂计算等。

从 1992 年至今只有十几年的时间，但由于在摸索其他数值方法时积累了许多的成功经验，使得数值流形发展的起点很高，数值流形方法已取得较大进展[67~73]。

从目前国内外研究现状来看，对于流形方法的研究主要有以下两大方向：

1）用于连续与非连续问题的求解

由于数值流形方法最初的目的就是要将连续变形分析与非连续变形分析统一在一种数值方法中，石根华在这方面做了大量的工作[52,62]。因此，这一方面发展较为完善。

Lin 等将物理覆盖函数推广为任意阶级数[74]；王芝银等考虑岩石大变形，建立了二次位移函数的数值流形方法[57]；Chen 将物理覆盖的覆盖函数从常数提高到线性函数[75]；李树忱等研究了数值流形方法的数学基础[76]，王水林等研究了物理覆盖上全一阶函数的数值流形方法[77]；Chen 等[78]、蔡永昌与张湘伟[79]、田荣等[80,81]都对流形元的高阶形式进行了研究。通过研究表明采用一阶覆盖函数的流形方法精度较原流形方法精度有较明显的提高。

Shyu 和 Salami 借鉴有限元法的研究经验，在数值流形方法中引入了四节点等参单元[82]；Hideomi Ohtsubo 等研究了采用不同覆盖形状或节点数对控制数值流形方法的计算精度[83]；王水林研究了四个物理覆盖形成的流形单元的计算方法[84]，这些研究均不同程度的丰富和扩展了流形方法的求解能力。

为了进一步提高计算精度和简化数值实现过程，Qiu 提出了无罚弹簧的数值流形方法，该方法在计算过程中不需要通过加减罚弹簧来满足不连续面的不嵌入和无张拉条件，可以克服罚弹簧较小引起的误差太大和罚弹簧太大导致解奇异的缺点[85]。

也有一些学者在流形方法的前处理和插值理论方面做了许多有意义的探讨，Ke 提出基于人工节理的数值流形方法[54]；Chen 等[53]、Hideomi Ohtsubo 等[83]、

曹文贵和速宝玉[86]、蔡永昌和张湘伟[87]等学者讨论了流形方法数学网格自动生成问题；Sheng 讨论了流形方法的插值理论等[73]；骆少明等研究了流形方法的变分原理[88,89]。这些研究丰富了数值流形方法在前处理、变分原理和插值理论方面的研究。

由于数值流形方法在建立之初，采用的是在线弹性小变形假设基础上开发的。而实际岩体结构具有材料和几何双重非线性的特征。同时，大部分岩体结构都是处于水下工作的。因此，这一方面也有许多学者投入了许多精力将原有的流形方法在不同程度、不同领域进行扩展。

在物理非线性方面，Sasaki 等发展了用于节理岩体模型的弹塑性流形方法[90]；王书法利用参变量变分原理研究了岩体弹塑性分析的数值流形方法，该方法主要将弹塑性问题转化为在屈服条件约束下求解弹塑性势能泛函的极值问题，在每个载荷增量步中不需要弹塑性迭代[91]，能够求解非关联流动和应变软化的弹塑性问题，是一种比较适合于弹塑性分析的数值方法。

在大变形分析方面，王芝银等建立了大变形分析流形方法的计算公式，对流形方法中的约束条件、边界释放荷载和积分方法进行了改进，建立了适用于一般岩体力学问题的固定点矩阵、分部荷载矩阵及单纯形积分的更简便形式；同时考虑岩土工程的增量变形过程，建立了考虑岩体损伤分析的数值流形方法的增量分析公式，并对边坡的潜在滑移面的滑动过程进行了模拟[92]；朱以文等将增量流形元方法推广到岩石大变形问题，基于拉格朗日列式，建立了大变形分析的增量流形方法的计算公式，模拟了具有节理、裂隙的岩石大变形问题，并应用于裂纹扩展模拟[93]。他们的计算表明，数值流形方法在岩石大变形分析中是有效的。

在考虑液固耦合作用方面，Te-Chih 等研究了分析区域同时包含液体区域和固体区域的数值流形方法[94]；王水林等研究了有自由边渗流问题的数值流形方法[95]；Ohnishi 等研究了模拟饱和与非饱和土中不稳定地下水作用的数值流形方法[96]。

以上的研究大大丰富了流形方法在连续与非连续变形分析中的应用，1998 年，石根华在美国成立流形工程公司（Manifold Engineering Company），以关键块体理论、有限元、DDA 以及流形方法为依托，开展岩石、地震、结构、土木和环境工程方面的委托计算、业务咨询与应用软件开发等业务。这从一个侧面说明了流形方法在连续问题与散体系统的不连续变形分析方面已较为成熟，并开始应用于工程实际。

2）用于裂纹扩展模拟

由于流形方法的双重网格特点，使得在进行裂纹扩展模拟时，数学网格可保持不变，从而比有限元方法更适合于裂纹扩展的模拟，引起了众多学者的兴趣。Zhang 用数值流形方法模拟热应力作用下的裂纹扩展问题[97]。这是流形方法首

次应用于热应力作用下的裂纹扩展模拟，该法中假设了材料断裂破坏的标准选用三参数 Mohr-Coulomb 准则：

$$\begin{cases} \sigma'_y = T_0, & & \text{拉破坏} \\ |\tau'_{xy}| = C, & 0 < \sigma'_y < T_0, & \text{剪破坏} \\ |\tau'_{xy}| = C - \sigma'_y \tan\phi, & & \text{剪破坏} \end{cases} \tag{1.1}$$

式中：σ'_y为裂纹边上正应力；τ'_{xy}为裂纹边上剪应力；T_0 为材料的抗拉强度；C 为内黏聚力；ϕ 为内摩擦角。

在每一边上的应力是两邻近单元边上的最大应力，通过坐标变换将其变换到局部坐标系，对于裂纹尖端，如果与裂纹尖端相连的所有边上的应力不满足上述破坏标准，那么就将围绕裂纹尖端的单元应力进行平均，用来判断裂纹是否扩展。通过该法计算得到的尖端应力是不够精确的，但这是流形方法应用于断裂力学的开始。同年，Chiou 和 Tsay 等把数值流形方法和断裂力学相结合来研究裂纹扩展及尖端应力场，开始了数值流形法与断裂力学的结合[98,99]。他们主要应用了流形方法处理连续与非连续变形的能力，把断裂力学中成功计算应力强度因子的方法应用到流形方法中。在模拟裂纹扩展过程中，应力强度因子采用裂纹张开位移法模拟裂纹扩展[100]，文献［101］中采用了最大周向应力理论来确定裂纹扩展方向的方向角 θ。

$$K_{\mathrm{I}} \sin\theta + K_{\mathrm{II}}(3\cos\theta - 1) = 0 \tag{1.2}$$

式中：K_{I} 和 K_{II} 是 Ⅰ 和 Ⅱ 型裂纹的应力强度因子，它们分别用裂纹张开位移法[102]来计算求得。

$$K_{\mathrm{I}} = \sqrt{\frac{\pi}{2r}}\frac{E\delta_1}{2(1-\nu^2)} \tag{1.3}$$

$$K_{\mathrm{II}} = \sqrt{\frac{\pi}{2r}}\frac{E\delta_2}{2(1-\nu^2)} \tag{1.4}$$

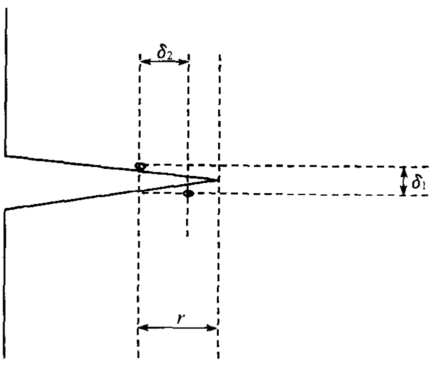

图 1.1　裂纹张开位移及测点

式中：E 为弹性模量；ν 为泊松比；δ_1 和 δ_2 分别为法向变形和沿裂纹方向的变形，如图 1.1 所示；r 是裂纹尖端到测点的距离。

通过上述方法计算应力强度因子和裂纹扩展角，而在实际模拟过程中，采用了裂纹尖端网格细化和自动网格重构技术来追踪裂纹扩展。在流形方法中，由于数学网格和物理网格相互独立，所以每当裂纹扩展到一个新的位置时，前一个位置细化的网格被抛弃，在新位置

上重新进行网格细化，即网格细化始终伴随在裂纹的尖端。每扩展一步，就用局部加密的数学网格进行覆盖即可。因此这种方法克服了有限元中网格局部加密的困难。同时，也能大大减少计算机的存储和提高计算效率。

实际上这种方法应用了自适应有限覆盖和自动网格重构技术，由于流形方法中两套网格相互独立，就克服了有限元方法中网格重构时存在的困难。虽然，张开位移法对计算应力强度因子是一种很容易且有效的方法，但测点的选取很大程度上依赖于经验。最近，Tsay 等利用虚位移扩展法[104,105]和数值流形方法相结合来研究混合裂纹扩展问题，克服了张开位移法依赖经验的缺点[103]。以往的研究表明，虚位移扩展技术在较粗的网格下利用能量释放率就能够很精确地计算 I 型裂纹的应力强度因子。但虚位移扩展技术中的虚位移扩展必须小到只有包含移动节点的单元受影响，才能得到较精确的结果，这一点在计算过程中必须反复试探。这样就浪费了大量的时间，并不是最佳的方法。

另外，值得一提的是网格细化过程也可以用高阶覆盖位移函数代替。在有限元法中，如果在一个单元内使用不同阶次位移函数，则在临近两单元的边上将产生位移不协调，必须用特殊的形函数来解决这一问题[106]。而在数值流形方法中，由于数学网格独立于物理网格，在一个单元中允许出现不同阶次的位移函数，近而克服了传统有限元网格细化的困难。

国内王水林也对类似问题进行了数值模拟研究，他也是充分利用流形方法中两套独立网格的特点，采用围线积分法来计算应力强度因子和最大周向应力确定裂纹的扩展角，来模拟裂纹的扩展过程[107,108]。

数值流形方法的核心思想是流形的有限覆盖技术和双重网格剖分策略。流形方法通过采用流形的有限覆盖技术，自然地描述了材料的非连续特性，从而为连续与非连续问题的统一求解奠定了基础。双重网格使得流形方法可适应复杂的边界条件。

在传统有限元方法中，单元不仅仅是构造插值函数的子区域，而且是系统能量泛函积分求解的基本单位。而在流形方法中，流形单元仅仅是完成系统能量泛函积分求解的基本单位，而不是构造局部近似函数的插值子域（插值子域是由数学网格所决定的，可以是足够规则），正因为将插值子域与积分子域相分离，使得流形单元的形状可以是任意的，甚至有凹的，而都不会给插值构造增加任何困难；与有限元相比，更适合处理开裂问题。

尽管流形方法已取得了许多可喜的成果，但对于解决岩石力学与工程实际问题来说，还有许多不足之处。就所关心的问题，作者认为流形方法在以下几方面还有待于进一步深入研究：

（1）数值流形方法的理论与算法方面的完善。

岩石力学和工程实际问题本质上是一个三维问题。二维有限元方法提出不久

就成功的推广为三维有限元法，但把数值流形方法从二维推广到三维比有限元困难得多。比较突出的困难是难以建立三维接触理论和处理方法；接触处理是求解非连续问题的关键环节之一，现有流形方法采用罚函数处理接触问题，一方面对于接触力不能给出满意的解答，另一方面由于数值实施上的困难放松了对界面上的本构关系的充分考虑，所以需要建立完善的二、三维接触理论。

(2) 物理非线性问题的研究。

众所周知，岩体的变形表现出复杂的非线性尤其对节理、裂隙岩体，如损伤、塑性、黏性等，这方面的文献还不多见。因此有必要用数值流形方法模拟岩石物理非线性方面的问题。

(3) 裂纹扩展问题的研究。

岩石工程的破坏往往都是与岩体内裂纹扩展有关，已有的数值流形方法在处理裂纹尖端的应力场时精度不够高，不能准确的追踪裂纹的扩展，故需应用各种手段对现有的流形方法进行扩展，来满足工程实际的需要。

(4) 实际工程应用方面。

由于该方法发展历史较短等因素，数值流形方法对许多实际工程因素考虑得不够细致。如岩石工程经常遇到的开挖、支护和地下水作用等问题，目前的流形方法尚未加以考虑。这一部分的有关论述在文献［2］中给出了详细的展望和具体的研究方向，感兴趣的读者可以参考该文，这里不在叙述。

(5) 各种方法的耦合方面。

由于各种数值方法在分析某些具体问题时都有自己的优点但也有缺点，如何将各种方法的优点相互结合，发展新的数值方法也是今后的研究重点。

总之，数值流形方法在科学与工程计算中有着广阔的应用前景，在非连续问题与逼近空间构造两方面蕴涵着新颖的思想与理念，值得我们进一步深入理解与推广应用。

数值流形方法虽然在裂纹模拟方面比有限元方法有所进步，但该方法依然是一种基于网格的数值方法，在裂纹扩展中避免不了网格重构等缺点。对于工程上常见的不连续变形问题，例如混凝土裂纹的形成及其力学行为、节理岩体中节理间的不连续问题等，由于数值流形方法中单元间的关联条件的限制，故不易处理此类不连续变形问题，尤其是具有动边界裂纹扩展问题。过去也有许多学者提出网格重建的技巧，但网格重建不是一件容易的工作，尤其在三维裂纹扩展问题中更是令人感到烦难与艰辛。为了突破单元间关联条件的限制，近年来许多学者投入到无网格方法（meshless method）的研究中，无网格方法也渐渐受到重视。

1.2.2 无网格方法研究现状

无网格方法是以节点为分析的主体，由于只需利用节点资料来描述定义域内

的位移函数，不需考虑节点与单元间的关联条件。这种基于节点或粒子的方法在求解不连续问题时体现出更大的灵活性[109,110]。当结构发生大变形的时候该方法可以避免有限元中单元的过度变形等问题[111]，同时无网格方法也可以作为一种有效的手段来求解在应变局部化问题中高应变梯度问题[112]。

最早的无网格方法概念可追溯到 1977 年由 Lucy 提出光滑粒子法（smoothed particle hydrodynamics，SPH）[113]，用以模拟如天体物理现象——星球旋转及尘云（dust clouds）。Monaghan 在插值理论方面发展了这一方法[114]，随后 Libersky 和 Petschek 将本法应用于求解固体力学问题[115]。SPH 是无网格方法中最早也是最简单的一种无网格方法，其基本思想来源于统计理论且采用 Monte Carlo 积分方案 [113]。随着 SPH 的发展，各种新的 SPH 法随之产生。如修正的光滑粒子法（corrected smoothed particle hydrodynamics，CSPH）[116]和移动最小二乘光滑粒子法（moving least squares smoothed particle hydrodynamics，MLSPH）[117]。Monaghan 对 SPH 法进行了总结[118]。SPH 法已被应用于水下爆炸模拟[119]和高速碰撞等材料动态响应模拟等[120]。

Lancaster 和 Salkauskas 最早提出移动最小二乘法（moving least-squares approximation，MLS）[121]。Nayroles 利用 MLS 概念配合权函数定义局部的位移场提出扩散单元法（diffusion element method，DEM）[122]，分析了 Possion 方程和弹性问题，并说明此法较有限元法更为广义，是一种新的数值分析概念。由于该法使用较低阶的高斯积分和位移边界未妥善处理、形函数的导数也不完整，同时也没有用较多的实例验证方法的正确性和探讨方法的收敛性，因此未能将扩散单元法普及化。为了克服 DEM 的不足，Krongauz 和 Belytschko 提出了 Petrov-Galerkin 扩散单元法（Petrov-Galerkin diffusion element method，PGDEM）[123]，该方法的试函数及其导数满足连续性条件和可积性，因此高斯积分可以应用于这种方法中，同时经过改进的方法可以通过小片实验。

Belytschko 等对 DEM 进行了改进，在计算形函数导数时保留了被 Nayroles 忽略掉的所有项，在本质边界条件处理中引入拉氏乘子法，同时采用高阶高斯积分进行区域积分，提出了无单元 Galerkin 法（the element-free Galerkin method，EFG）[124]。Belytschko 等对 EFG 法中的数值积分以及近似函数的计算方法进行了深入研究[125~127]，并成功地将该方法应用于求解动态裂纹扩展数值模拟[128]和三维碰撞分析[129]，掀起了无网格法的研究热潮。

Krysl 等将 EFG 用于板壳分析中[130]，Liu 等将 EFG 和边界元法耦合求解固体力学问题[131]，Belytschko 和 Organ 等将 EFG 和有限元法耦合[132]，以发挥各种方法的优势。为了避免使用背景网格积分，Beissel 等提出了节点积分方案[133]，Smolinski 等给出了 EFG 法显式时间积分方案并用于求解扩散问题[134]。

1996 年西班牙数值分析中心的 Oñate 等[135]提出了有限点法（the finite