高考数学专项夺标

GAOKAO
YOUHUA SIWEI
LÜSE TONGDAO

高考数学优化思维

绿色通道

张 峰 编著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大學出版社

高考数学专项夺标

高考数学优化思维绿色通道

张　峰　编著

浙江大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

高考数学：优化思维绿色通道／张峰编著．—杭州：浙江大学出版社，2007.2
ISBN 978-7-308-05125-5

Ⅰ.高...　Ⅱ.张...　Ⅲ.数学课—高中—升学参考资料
Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 006181 号

高考数学优化思维绿色通道

张　峰　**编著**

责任编辑　石国华
封面设计　刘依群
出版发行　浙江大学出版社
（杭州天目山路 148 号　邮政编码 310028）
（网址：http://www.zjupress.com）
排　　版　星云光电图文制作工作室
印　　刷　德清县第二印刷厂
开　　本　787mm×960mm　1/16
印　　张　19.25
字　　数　530 千字
版 印 次　2007 年 2 月第 1 版　2007 年 3 月第 2 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-05125-5
定　　价　28.00 元

内容简介

本书共有七章，其主要内容如下：

第一章　函数优化思维通道：主要以函数的四性（单调性、奇偶性、对称性、周期性）来剖析高考试题，达到优化解题的目的。

第二章　三角函数优化思维通道：主要讲述以三角变换的优化思维方式融入快速作图和数形结合的数学思想方法中去剖析高考试题，达到优化解题的目的。

第三章　递推数列优化思维通道：主要讲述如何建立项与项数之间的关系来猜测通项，并以数学归纳法证明。介绍如何用逐差或逐乘、如何退一步或进一步、如何用数列代换等数学思维方式求得递推数列的通项以及用特殊数列的求和方法来剖析高考试题，达到优化解题的目的。

第四章　不等式证明优化思维通道：主要讲述如何应用基本不等式、放缩法、构造法等数学思维方法来达到优化解题的目的。

第五章　排列组合优化思维通道：排列与组合内容独特、自成体系、思维抽象、题目多变，加上有些题目的条件隐晦，历来是学习的难点。本章用一首形象、通俗的"打油诗"来帮助开拓思维，把高考试题变通到熟悉的模式，把问题的脉络剖析得比较清晰、使解题思维更为直观，达到优化解题的目的。

第六章　立体几何的"基向量"优化思维通道：用空间向量的观点处理立体几何中的线面关系，使一些用传统方法解有一定难度的线面关系，变得浅显、直观和易解，明显地降低了难度。应用向量解法，将立体几何的逻辑论证转化为代数运算，一般有两种途径：一是建立空间坐标系，将变量转化为向量的数量积运算。一般辅导读物、教科书以及高考的标准答案等都用此法。另外一种就是用基底的办法来解决。本章将用基底的方法剖析高考试题，并创设"向量垂足法"解决二面角的平面角，达到比坐标法更优化的解题模式。

第七章　解析几何优化思维通道：主要讲述如何在设置上优化、如何运用几何关系代数化、如何运用设而不求整体优化、如何运用形数结合和引入平面向量等数学思维方式，达到优化解题的目的。

前　言

高考是具有激烈的竞争性、导向性和选拔性的考试，体现了中学毕业生综合素质的竞争。为了帮助读者有效地脱离“题海”，进行高效率的高考复习，切实提高数学思维能力，我们总结几十年的教学经验，精心编著《高考数学优化思维绿色通道》一书，奉献给广大读者。

高考试题是教学大纲规定的重点内容的展示和中学数学思想及方法的体现，高考试题是千锤百炼的精品，它的典型性和代表性对于教学、备考都具有深刻的启发性、训练性和特有的参考价值。为了努力挖掘试题对中学数学的良好导向作用，本书主要对 2006 年、2005 年、2004 年以及近十年的高考试题进行比较透彻的案例剖析，注重把启发思维和在关键点上点拨相结合的方法，集百家之长为一体，熔各种思维于一炉，重在研讨规律，教方法，给思想，授能力。并让读者从中“悟”出道理，并通过举一反三的试场训练使思维达到升华。

在平时学习时，我们利用一题多解的发散思维来启迪智慧、开拓思维、发展智力、优化解题质量。但在高考复习时，光有发散思维还不够，还要有汇聚检索思维能力，即从众多的解法中探索出一种优化的解题模式，使符合这种模式特征和规律的命题，都能按此求解。这样您就真正脱离了“题海”，真正地把厚厚的几本书变成薄薄的几片纸。本书就是对典型的综合试题进行剖析，由命题的结构特征引导解题思路，尽量寻求优化的数学思维方式和解题模式，使读者快速地从未知和已知条件中找到变量之间的内在联系，加速问题的解决。

本书以通俗的语言，对规律加以不厌其烦的阐述。不仅使学习优良的学生在解题思维和方法上能更上一层楼，而且使学习尚有困难的学生也能从中“悟”出道理、增强自信、化解困难、脱离困境、柳暗花明。

本书吸收了 370 例高考命题作为案例剖析，又以 420 例高考命题作为试场演练，可以说本书也是一本对高考题进行分类归纳的题库。本书又对

章节中的试场演练题都做了比较详尽的剖析，自成体系，使您有机会得到充分的训练。借以进一步打开读者的思路、启迪思维，以达到举一反三、触类旁通。因此，它不仅对学生的备考开卷有益，而且对教师也是一本不可多得的备教参考书。

一本好书，不仅能启发读者的智慧，也可能影响读者的一生。但愿开卷有益。

本书在编著过程中得到了全国教师教育学会、杭州当代教师教育研究院院长王岳庭教授和该院高级工程师赵臻的大力支持，同时得到王岳庭教授的亲自审定，在此，表示衷心的感谢。

由于编者的水平有限，书中如有不恰当的观点和论证方法，欢迎斧正。

张　峰

2006年8月

目　　录

第一章　函数优化思维通道

函数不仅仅是数学中一个最基本的和最重要的概念，在中学数学教学中占有举足轻重的地位，而且把数学中的各个分支有机地融合在一起；它不仅仅是贯穿整个高中数学的一条主线，而且它几乎渗透到现代数学的各个分支；它不仅仅是中学数学与大学数学衔接的重要内容，而函数思想又是最重要、最基本的数学思想. 函数几乎涉及中学数学的所有数学思想和方法，例如配方法、换元法、待定系数法、判别式法、形数结合法、分类讨论、化归与转化等数学思想方法在解题中的应用，彼此渗透，相互融合，构成了函数应用的广泛性、函数解法的多样性和思维的创造性. 使函数成为历年高考命题的重点和热点，使函数在高考中的比例远远超过它在课时中的比例.

我们知道高等数学的研究是以初等函数作为工具的，即从初等函数向微积分过渡，进一步研究高等数学. 而初等函数是从基本初等函数出发，经过加、减、乘、除、乘方、开方等四则运算和复合运算而形成的. 基本初等函数是我们初、高中阶段数学学习的主要内容. 因此，高考的命题总是以初等函数题作为综合题来考察我们有否继续学习高等数学的能力，这样把初等函数的研究"变通"为对基本初等函数的研究的能力是想进一步学习的高中学生必须具备的.

基本初等函数无非是常函数、正比例函数、反比例函数、一次函数、二次函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数. 对这些函数的性质(奇偶性、单调性、对称性、周期性)必须娴熟于心. 只有这样，当面对一个初等函数的命题时，才会用"类比"来创造性的模仿，才会由此及彼地"联想"，才会思维跳跃地、触类旁通地、灵活地把它"变通"为一个基本初等函数的命题来解决.

第一节　二次函数的极值

二次函数是初中的内容，但是，它却是一个最简单的非线性函数之一，如果对二次函数的区间作变化，对系数又加上"佐料"(成为参变数)和函数的单调性、对称性、奇偶性、周期性及向量、导数等知识融合在一块，既是初中内容的延续和发展，更能培养和考查学生将知识迁移到不同情景中去的能力. 这恰恰与高考的"以能力立意"不谋而合. 因此二次函数的问题，就成为高考的热点问题.

本节只探讨二次函数在定义域上的极值，讲极值，必然联系到函数的单调性.

考场案例剖析

对于在定义域上的二次函数的极值大致有四类：第一类是定义域固定，对称轴也固定的极值问题；第二类是对称轴固定，而定义域在变动；第三类是定义域固定，而对称轴在变；第四类是对称轴变，定义域也变.

1. 轴定，区间变，讨论区间

在这一类问题中二次函数的对称轴是固定的，定义域带参数而发生变化. 因此，我们要对定义域的参数进行讨论，不妨用一句"轴定，区间变，讨论区间"的俗语来记住它.

案例一　〔2002 年，全国理 21〕设 a 为实数，函数 $f(x)=x^2+|x-a|+1, x\in\mathbf{R}$.
（Ⅰ）讨论 $f(x)$ 的奇偶性；（Ⅱ）求 $f(x)$ 的最小值.

剖析　（Ⅰ）函数 $f(x)$ 既不是奇函数，也不是偶函数（解略）.

（Ⅱ）① 当 $x\leqslant a$ 时，函数 $f(x)=x^2-x+a+1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+a+\dfrac{3}{4}$. 其对称轴 $x=\dfrac{1}{2}$.

这是一个“轴定，区间变，讨论区间”的问题.

若 $a\leqslant\dfrac{1}{2}$，如图 1-1-01，则函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,a]$ 上单调递减，

从而，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,a]$ 上的最小值为 $f(a)=a^2+1$.

若 $a>\dfrac{1}{2}$，如图 1-1-02，则函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,a]$ 上的最小值为 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{4}+a$，且 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)\leqslant f(a)$.

② 当 $x\geqslant a$ 时，函数 $f(x)=x^2+x-a+1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-a+\dfrac{3}{4}$.

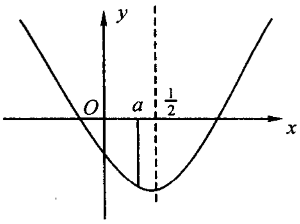

图 1-1-01

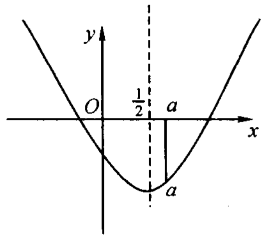

图 1-1-02

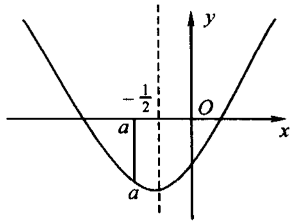

图 1-1-03

若 $a\leqslant-\dfrac{1}{2}$，如图 1-1-03，则函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上的最小值为

$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{4}-a$，且 $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)\leqslant f(a)$.

若 $a>-\dfrac{1}{2}$，如图 1-1-04，则函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调递增，

从而，函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上的最小值为 $f(a)=a^2+1$.

综上，当 $a\leqslant-\dfrac{1}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 的最小值是 $\dfrac{3}{4}-a$.

当 $-\dfrac{1}{2}<a\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 的最小值是 a^2+1.

当 $a>\dfrac{1}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 的最小值是 $a+\dfrac{3}{4}$.

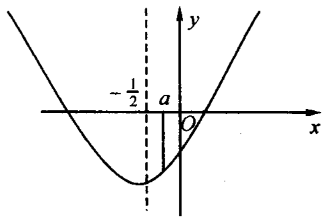

图 1-1-04

案例二　〔2006 年，福建 21〕已知函数 $f(x)=-x^2+8x$，求 $f(x)$ 在区间 $[t,t+1]$ 上的最大值 $h(t)$.

剖析　$f(x)=-x^2+8x=-(x-4)^2+16$.

这是对称轴为 4，开口向下的二次函数. 故采用“轴定，区间变，讨论区间”.

当 $t+1<4$ 时，如图 1-1-05，即 $t<3$ 时，$f(x)$ 在 $[t,t+1]$ 上单调递增，

$h(t)=f(t+1)=-(t+1)^2+8(t+1)=-t^2+6t+7$；

当 $t\leqslant4\leqslant t+1$ 时，如图 1-1-06，即 $3\leqslant t\leqslant4$ 时，$h(t)=f(4)=16$；

当 $t>4$ 时，如图 1-1-07，$f(x)$ 在 $[t,t+1]$ 上单调递减，

$h(t)=f(t)=-t^2+8t$.

综上，$h(t)=\begin{cases}-t^2+6t+7, & t<3;\\ 16, & 3\leqslant t\leqslant 4;\\ -t^2+8t, & t>4.\end{cases}$

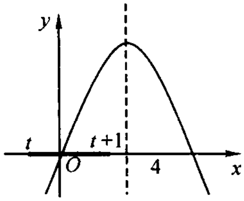

图 1-1-05

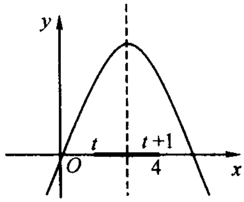

图 1-1-06

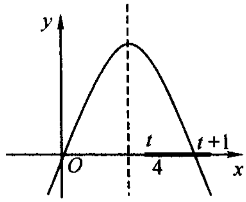

图 1-1-07

案例三　〔2006 年，陕西 10〕已知函数 $f(x)=ax^2+ax+4(0<a<3)$，若 $x_1<x_2, x_1+x_2=1-a$，则（　　）

A. $f(x_1)<f(x_2)$　　B. $f(x_2)<f(x_1)$

C. $f(x_1)=f(x_2)$　　D. $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 的大小不能确定

剖析　$f(x)=ax^2+ax+4=a(x+1)^2+4-a$，

它是一个开口向上，对称轴为 $x=-1$ 的抛物线，

与 $[x_1,x_2]$ 组成了一个"轴定，区间变"要讨论区间的动态关系，

现在题目要求比较函数值的大小关系.

故只有在单调区间内才能一览无余.

$\because 0<a<3, \therefore -2<1-a<1$ 而 $x_1<x_2, x_1+x_2=1-a$，

$\therefore x_1+x_2>-2$ 而 $x_1\cdot x_2=\dfrac{4}{a}>0$，说明两根都为负.

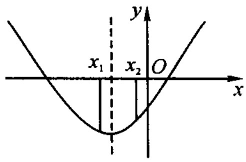

图 1-1-08

现在观察一下两根与对称轴的距离，$\because x_1+x_2>-2$ 又 $x_1<x_2$，

$x_2+1>-x_1-1$，说明 x_2 离对称轴的距离比 x_1 离对称轴的距离要大，

如图 1-1-08，$\therefore f(x_1)<f(x_2)$.

2. 轴变，区间定，讨论轴

这一类问题中二次函数的定义域是固定的，而对称轴是带参数的，即轴在变. 因此，我们要对轴的参数进行讨论，不妨用一句"轴变，区间定"讨论区轴的俗语来记住它.

案例四　〔2006 年，江苏 20〕设 a 为实数，记函数 $f(x)=a\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$ 的最大值为 $g(a)$.

（Ⅰ）设 $t=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$，求 t 的取值范围，并把 $f(x)$ 表示为 t 的函数 $m(t)$；

（Ⅱ）求 $g(a)$.

剖析　从题上粗看不是二次函数（是一个复合函数），然而作一个变换就会成为某一个变量的"二次函数".

（Ⅰ）$t=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$，要使有 t 意义，必须 $1+x\geqslant 0$ 且 $1-x\geqslant 0$，即 $-1\leqslant x\leqslant 1$，

$\therefore t^2=2\sqrt{1-x^2}\in[2,4], t\geqslant 0$ ……①，t 的取值范围是 $[\sqrt{2},2]$.

由①得 $\sqrt{1-x^2}=\dfrac{1}{2}t^2-1$.

$\therefore m(t)=a\left(\frac{1}{2}t^2-1\right)+t=\frac{1}{2}at^2+t-a, t\in[\sqrt{2},2]$ 即为一个关于 t 的二次函数.

(2) 由题意知 $g(a)$ 即为函数 $m(t)=\frac{1}{2}at^2+t-a=\frac{1}{2}a\left(t+\frac{1}{a}\right)-\frac{1}{2a}-a, t\in[\sqrt{2},2]$ 的最大值.

它是一个对称轴为 $t=-\frac{1}{a}$ 的抛物线,此抛物线的特征为“轴变,区间定”故要讨论轴,现在开口方向也不定,故还要讨论开口方向.

① 当 $a=0$ 时,$m(t)=t$,是一次函数而 $t\in[\sqrt{2},2]$,$\therefore g(a)=2$.

② 当 $a>0$ 时,函数 $y=m(t), t\in[\sqrt{2},2]$ 的图像是开口向上的抛物线的一段,

如图 1-1-09,由 $t=-\frac{1}{a}<0$ 知 $m(t)$ 在$[\sqrt{2},2]$上单调递增,.

$\therefore g(a)=m(2)=a+2$.

③ 当 $a<0$ 时,$t=-\frac{1}{a}>0$.

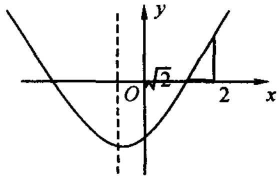

图 1-1-09

若 $t=-\frac{1}{a}\in[0,\sqrt{2}]$,如图 1-1-10,$-\frac{1}{a}\leqslant\sqrt{2}$,即 $a\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{2}$,则 $g(a)=m(\sqrt{2})=\sqrt{2}$;

若 $t=-\frac{1}{a}\in(\sqrt{2},2]$,如图 1-1-11,即 $-\frac{\sqrt{2}}{2}<a\leqslant-\frac{1}{2}$,则 $g(a)=m\left(-\frac{1}{a}\right)=-a-\frac{1}{2a}$;

若 $t=-\frac{1}{a}\in(2,+\infty)$,如图 1-1-12,即 $-\frac{1}{2}<a<0$,则 $g(a)=m(2)=a+2$.

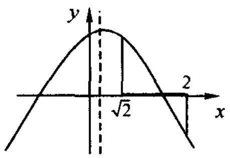

图 1-1-10

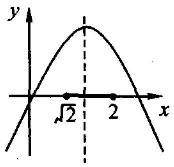

图 1-1-11

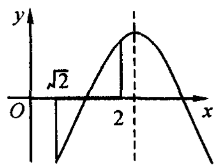

图 1-1-12

$$\text{综上有 } g(a)=\begin{cases}a+2, & a>-\frac{1}{2};\\ -a-\frac{1}{2a}, & -\frac{\sqrt{2}}{2}<a\leqslant-\frac{1}{2};\\ \sqrt{2}, & a\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{cases}$$

案例五　〔2002 年,上海文 19〕已知函数 $f(x)=x^2+2ax+2, x\in[-5,5]$.

(Ⅰ) 当 $a=-1$ 时,求函数 $f(x)$ 的最大值和最小值;

(Ⅱ) 求实数 a 的取值范围,使 $y=f(x)$ 在区间$[-5,5]$上是单调函数.

剖析　(Ⅰ) 当 $a=-1$ 时,$f(x)=x^2-2x+2=(x-1)^2+1$, $x\in[-5,5]$,$\therefore x=1$时,$f(x)$ 的最小值为1;$x=-5$时,$f(x)$ 的最大值为37.

(Ⅱ) 函数 $f(x)=(x+a)^2+2-a^2$ 图像的对称轴为 $x=-a$,

这是一个“轴变,区间定”讨论轴的二次函数问题.

$\because f(x)$ 在区间$[-5,5]$上是单调函数.

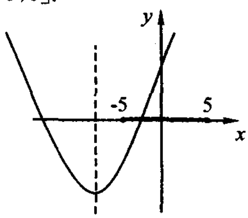

图 1-1-13

$\therefore$ 对称轴 $x=-a\leqslant -5$ 或 $x=-a\geqslant 5$，如图 1-1-13 或图 1-1-14.

故 a 的取值范围是 $a\leqslant -5$ 或 $a\geqslant 5$.

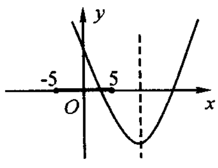

图 1-1-14

案例六　〔2002 年，上海理 19〕已知函数 $f(x)=x^2+2x\cdot\tan\theta-1$，$x\in[-1,\sqrt{3}]$，其中 $\theta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. 求 θ 的取值范围，使 $y=f(x)$ 在区间 $[-1,\sqrt{3}]$ 上是单调函数.

剖析　函数 $f(x)=(x+\tan\theta)^2-1-\tan^2\theta$ 图像的对称轴为 $x=-\tan\theta$ 是一个"轴变，区间定"讨论轴的二次函数问题.

$\because y=f(x)$ 在区间 $[-1,\sqrt{3}]$ 上是单调函数，如图 1-1-15 或图 1-1-16.

$\therefore -\tan\theta\leqslant -1$ 或 $-\tan\theta\geqslant\sqrt{3}$. 即 $\tan\theta\geqslant 1$ 或 $\tan\theta\leqslant -\sqrt{3}$.

因此，θ 的取值范围是 $\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$.

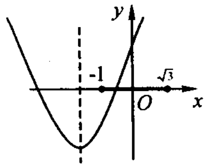

图 1-1-15

3. 轴变，区间也变，既讨论轴也讨论区间

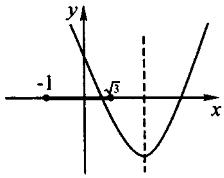

图 1-1-16

这一类问题中二次函数的定义域是带参数的，而对称轴也是带参数的，即轴变，区间也变. 因此，我们既要对定义域的参数进行讨论，也要对轴的参数进行讨论，不妨用一句"轴变，区间变"轴和区间都讨论的俗语来记住它.

案例七　〔2006 年，天津理 10〕已知函数 $y=f(x)$ 的图像与函数 $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称，记 $g(x)=f(x)[f(x)+f(2)-1]$. 若 $y=g(x)$ 在区间 $\left[\frac{1}{2},2\right]$ 上是增函数，则实数 a 的取值范围是　（　　）

A. $[2,+\infty)$　　B. $(0,1)\cup(1,2)$　　C. $\left[\frac{1}{2},1\right)$　　D. $\left(0,\frac{1}{2}\right]$

剖析　$\because f(x)$ 与 $y=a^x$ 关于 $y=x$ 对称，即互为反函数，$\therefore f(x)=\log_a x$.

$g(x)=(\log_a x)^2+\left(\log_a\frac{2}{a}\right)\log_a x$，这是一个复合函数，

令 $t=\log_a x$，$g(t)=t^2+t\log_a\frac{2}{a}$.

此函数的定义域为：当 $a>1$ 时，$t\in\left[\log_a\frac{1}{2},\log_a 2\right]$；当 $0<a<1$ 时，$t\in\left[\log_a 2,\log_a\frac{1}{2}\right]$.

故，这是一个转变为"轴变，区间也变"的二次函数的单调性问题，故要讨论区间和轴的参数.

如果 $a>1$，则 $t=\log_a x$ 为单调递增，故必须 $g(t)$ 在 $t\in\left[\log_a\frac{1}{2},\log_a 2\right]$ 内也单调递增，

如图 1-1-17，此时，二次函数的对称轴 $-\frac{1}{2}\log_a\frac{2}{a}\leqslant\log_a\frac{1}{2}$，

$g(t)$ 在 $t\in\left[\log_a\frac{1}{2},\log_a 2\right]$ 内单调递增. 解得 $a\leqslant\frac{1}{2}$，矛盾.

如果 $0<a<1$，则 $t=\log_a x$ 为单调递减. 如图 1-1-18，

此时，必须 $g(t)$ 在 $t\in\left[\log_a 2,\log_a\frac{1}{2}\right]$ 内单调递减，

而此时，二次函数的对称轴 $-\log_a\frac{2}{a}\geqslant\log_a\frac{1}{2}$，

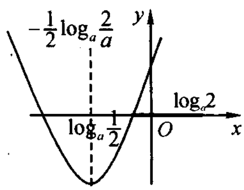

图 1-1-17

$g(t)$ 在 $t \in \left[\log_a 2, \log_a \frac{1}{2}\right]$ 内单调递减，解得 $a \leqslant \frac{1}{2}$，

$\therefore a \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ 满足条件.

故 $a \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$，即正确答案为 D.

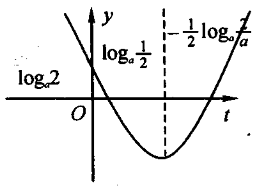

图 1-1-18

考场演练

1.〔2005 年，湖北 1〕已知向量 $\boldsymbol{a}=(x^2,x+1)$，$\boldsymbol{b}=(1-x,t)$，若函数 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，在区间 $(-1,1)$ 上是增函数. 求 t 的取值范围.

2.〔2005 年，湖南 19〕设 $t \neq 0$，点 $P(t,0)$ 是函数 $f(x)=x^3+ax$ 与 $g(x)=bx^2+c$ 的图像的一个公共点，两函数的图像在点 P 处有相同的切线.

（Ⅰ）用 t 表示 a,b,c；

（Ⅱ）若函数 $y=f(x)-g(x)$ 在 $(-1,3)$ 上单调递减，求 t 的取值范围.

3.〔2005 年，浙江理 16〕已知函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图像关于原点对称，且 $f(x)=x^2+2x$.

（Ⅰ）求函数 $g(x)$ 的解析式；

（Ⅱ）解不等式 $g(x) \geqslant f(x)-|x-1|$；

（Ⅲ）若 $h(x)=g(x)-\lambda f(x)+1$ 在 $[-1,1]$ 上是增函数，求实数 λ 的取值范围.

第二节　“穿”与“脱”的单调性游戏

函数的单调性为我们研究函数的最值和研究某个参变量的取值范围提供了方便. 而函数的单调性，是由于在定义域内任意两个变量的始终如一的大小关系，引起了在值域内两个函数值的始终如一的大小关系，譬如：$x_1<x_2,x_1,x_2\in D \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$）. 为了能记忆，我们可以形象地说：对自变量 $x_1<x_2$，穿上“f”，就成为 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$）. 对 $f(x_1)<f(x_2)$ 脱了“f”就成为 $x_1<x_2$（或 $x_1>x_2$）（当然这是不科学的，但是为了记忆也未尝不可）. 问题是：什么时候能“脱”，什么时候能“穿”. 其函数的单调性就起了媒介的作用. 在某个区间内，您断定了函数的单调性. 您想怎么“穿”，怎么“脱”都由您决定了.

考场案例剖析

案例一　〔2005 年，全国 Ⅰ-9〕设 $0<a<1$，函数 $f(x)=\log_a(a^{2x}-2a^x-2)$，则使 $f(x)<0$ 的 x 的取值范围是　（　　）

A. $(-\infty,0)$　　B. $(0,+\infty)$　　C. $(-\infty,\log_a 3)$　　D. $(\log_a 3,+\infty)$

剖析　$\log_a(a^{2x}-2a^x-2)<0=\log_a 1$

$\because$ 当 $0<a<1$ 时，$y=\log_a x$ 单调递减函数.

故“脱掉 f”成为解 $a^{2x}-2a^x-2<1$ 的不等式，可解得 $a^x>3$.

$a^x>3=a^{\log_a 3}$，又 $y=a^x$，当 $0<a<1$ 时为单调递减函数.

故再“脱掉 f”为：$x<\log_a 3$，选择 C 为正确.

案例二　〔2004 年，全国 Ⅱ-22〕已知函数 $f(x)=\ln(1+x)-x$，$g(x)=x\ln x$.

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的最大值；

（Ⅱ）设 $0<a<b$，证明：$0<g(a)+g(b)-2g\left(\frac{a+b}{2}\right)<(b-a)\ln 2$.

剖析　（Ⅰ）（略）

（Ⅱ）构造函数 $F(x)=g(a)+g(x)-2g\left(\frac{a+x}{2}\right)$，

则 $F'(x)=g'(x)-2\left[g\left(\frac{a+x}{2}\right)\right]'=\ln x-\ln\left(\frac{a+x}{2}\right)$.

当 $0<x<a$ 时，$F'(x)<0$，$\therefore F(x)$ 在 $0<x<a$ 为单调递减函数.

当 $x>a$ 时，$F'(x)>0$，$\therefore F(x)$ 在 $x>a$ 内为单调递增函数.

从而当 $x=a$ 时，$F(x)$ 有极小值 $F(a)$.

而 $b>a$，"穿上 f"有：$F(b)>F(a)=0$，即 $0<g(a)+g(b)-2g\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

构造函数 $G(x)=F(x)-(x-a)\ln 2$，则 $G'(x)=F'(x)-(x-a)'\ln 2=\ln x-\ln(a+x)$.

当 $x>0$ 时，$G'(x)<0$，$\therefore G(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 区间为单调递减函数.

$b>a$，"穿上 f"有：$G(b)<G(a)=0$.

即 $0<g(a)+g(b)-2g\left(\frac{a+b}{2}\right)<(b-a)\ln 2$.

案例三　〔2004 年，辽宁 22〕已知函数 $f(x)=\ln(e^x+a)(a>0)$.

（Ⅰ）求函数 $y=f(x)$ 的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 及 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$；

（Ⅱ）假设对任意 $x\in[\ln(3a),\ln(4a)]$，不等式 $|m-f^{-1}(x)|+\ln(f'(x))<0$ 成立，求实数 m 的取值范围.

剖析　（Ⅰ）$y=f^{-1}(x)=\ln(e^x-a)$，$x>\ln a$，$f'(x)=\frac{e^x}{e^x+a}$.（解略）

（Ⅱ）$x\in[\ln(3a),\ln(4a)]$，

$\because |m-f^{-1}(x)|+\ln(f'(x))<0$，

$\therefore \ln(e^x-a)-\ln(e^x+a)+x<m<\ln(e^x-a)+\ln(e^x+a)-x$.

$\ln\frac{(e^x-a)e^x}{e^x+a}<m=\ln e^m<\ln\frac{(e^x-a)(e^x+a)}{e^x}$.

$\because y=\ln x$ 为单调递增函数，故"脱掉 f"得：$\frac{(e^x-a)e^x}{e^x+a}<e^m<\frac{(e^x-a)(e^x+a)}{e^x}$.

设 $u(x)=\frac{(e^x-a)e^x}{e^x+a}$，$v(x)=\frac{(e^x-a)(e^x+a)}{e^x}$，即 $u(x)<e^m<v(x)$.

说明 e^m 要比 $u(x)$ 在 $x\in[\ln 3a,\ln 4a]$ 内的最大值还大，比 $v(x)$ 在 $x\in[\ln 3a,\ln 4a]$ 的最小值还小. 要寻找它们的最大值或最小值，就要看看它们的单调性如何.（即它们的导数是正是负）

令 $t=e^x$，$t\in[3a,4a]$，则 $u(t)=\frac{(t-a)t}{t+a}$，$v(t)=\frac{(t-a)(t+a)}{t}$，

$u'(t)=\left(\frac{(t-a)t}{t+a}\right)'=\frac{t^2+2at-a^2}{(t+a)^2}$.

$\because 0<t-a<t<t+a$，$\therefore u'(x)=\frac{t^2+2at-a^2}{(t+a)^2}>\frac{(t-a)^2+2at-a^2}{(t+a)^2}=\frac{t^2}{(t+a)^2}>0$.

即 $u(t)=\dfrac{(t-a)t}{t+a}$，在 $t\in[3a,4a]$ 上为单调增加函数.

同样 $v'(t)=\left(\dfrac{(t-a)(t+a)}{t}\right)'=\dfrac{2t^2-t^2+a^2}{t^2}>0$，

$v(t)=\dfrac{(t-a)(t+a)}{t}$ 在 $t\in[3a,4a]$ 上为单调增加函数.

因此，当 $t\in[3a,4a]$ 时，$u(t)$ 的最大值为：$u(4a)=\dfrac{12}{5}a$，$v(t)$ 的最小值为：$v(3a)=\dfrac{8}{3}a$，

而不等式(Ⅱ)成立，当且仅当 $u(4a)<e^m<v(3a)$，即

$\dfrac{12}{5}a=e^{\ln\frac{12}{5}a}<e^m<\dfrac{8}{3}a=e^{\ln\frac{8}{3}a}$，而 $y=e^x$ 其单调增加函数.

故"脱掉 f"得：$\ln\left(\dfrac{12}{5}a\right)<m<\ln\left(\dfrac{8}{3}a\right)$.

案例四 〔2004年，福州理模拟〕假设函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，对任意的实数 m,n 都有：$f(m)f(n)=f(m+n)$，且当 $x<0$ 时，$f(x)>1$.

证明：(Ⅰ)①$f(0)=1$；② 当 $x<0$ 时，$0<f(x)<1$；③$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数；

(Ⅱ)如果对任意实数 x,y 都有：$f(x^2)f(y^2)\leqslant f(axy)$ 恒成立，求 a 的取值范围.

剖析 (Ⅰ)(略)

(Ⅱ)$\because f(m)f(n)=f(m+n)$，而 $f(x^2)f(y^2)\leqslant f(axy)$，$\therefore f(x^2+y^2)\leqslant f(axy)$.

由(Ⅰ)③$f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的减函数，故"脱掉 f"有：$x^2+y^2\geqslant axy$，

① 当 $xy>0$ 时，$a\leqslant\dfrac{x^2+y^2}{xy}$，而$\dfrac{x^2+y^2}{xy}\geqslant 2$，故只须 $a\leqslant 2$.

② 当 $xy=0$ 时，a 取任何实数.

③ 当 $xy<0$ 时，$a\geqslant\dfrac{x^2+y^2}{xy}$，而$\dfrac{x^2+y^2}{xy}\leqslant -2$，故只须 $a\geqslant -2$.

综上满足题意要求的 a 的取值范围为：$-2\leqslant a\leqslant 2$.

案例五 〔2004年，陕西模拟〕假设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}^+$，且满足 $f(4)=1$，对任意的 $x_1,x_2\in\mathbf{R}^+$ 都有：$f(x_1\cdot x_2)=f(x_1)+f(x_2)$. 当 $x_1>x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$.

(Ⅰ)求 $f(1)$；

(Ⅱ)如果 $f(3x+a)+f(2x-6)\leqslant 3$，求 x 的取值范围.

剖析 (Ⅰ)$f(1)=0$.(解略)

(Ⅱ)$\because f(4)=1$，$\therefore f(64)=f(4\times4\times4)=f(4)+f(4)+f(4)=3$.

据已知条件有 $f(3x+1)+f(2x-6)=f((3x+1)(2x-6))\leqslant 3=f(64)$.

有已知条件对任意的 $x_1,x_2\in\mathbf{R}^+$，当 $x_1>x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$.

说明 $f(x)$ 为单调递增函数，

故 $f(3x+1)+f(2x-6)=f((3x+1)(2x-6))\leqslant 3=f(64)$，脱掉"$f$"得：

$(3x+1)(2x-6)\leqslant 64$. 显然，柳暗花明，解得 $-\dfrac{7}{3}\leqslant x\leqslant 5$.

不要忘掉定义域$\begin{cases}3x+1>0,\\2x-6>0,\end{cases}$解得 $x>3$. $\therefore x$ 的取值范围为 $3\leqslant x\leqslant 5$.

考场演练

1.〔2004 年,南宁模拟〕已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 满足对任意的 x,y 都有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 成立,且当 $x>0$ 时,$f(x)<0$ 恒成立.

(Ⅰ)判断函数 $f(x)$ 的奇偶性,并证明您的结论.

(Ⅱ)证明 $f(x)$ 为减函数;若函数 $f(x)$ 在 $[-3,3]$ 总有 $f(x)\leqslant 6$ 成立,试确定 $f(1)$ 满足的条件.

(Ⅲ)解关于 x 的不等式 $\frac{1}{n}f(ax^2)-f(x)>\frac{1}{n}f(a^2x)-f(a)$($n$ 是一个给定的自然数,$a<0$).

2.〔2004 年,成都一模〕已知:奇函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,且满足:① 当 $x>0$ 时 $f(x)<0$;② 对任意实数 x,y 都有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

(Ⅰ)根据函数的单调性定义证明 $y=f(x)$ 是减函数;

(Ⅱ)若 $x>0$ 时,不等式 $f(ax-2)+f(x-x^2)>0$ 恒成立,求实数 a 的取值范围.

3. 若 $f(x)$ 为定义在 $(0,+\infty)$ 上的增函数,且对一切 $x>0,y>0$ 都有:$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$,且 $f(2)=1$,解不等式 $f(x+3)-f\left(\frac{1}{x}\right)<2$.

第三节　导数与单调性关系

2006 年的考纲把“了解函数连续的意义,理解闭区间上连续函数有最大值、最小值的性质”改为“了解函数连续性的意义,了解闭区间上连续函数有最大值、最小值性质”,预示将加强导数概念及其应用的考查. 2006 年的高考完全证实了这一点.“两率一量”(概率、函数的变化率即导数,向量)已经成为中学数学体系中的新的主干内容,成为高考的热点是必然的趋势.

考场案例剖析

案例一　〔2006 年,福建 21〕已知函数 $f(x)=-x^2+8x$,$g(x)=6\ln x+m$. 是否存在实数 m,使得 $y=f(x)$ 的图像与 $y=g(x)$ 的图像有且只有三个不同的交点?若存在,求出 m 的取值范围;若不存在,说明理由.

剖析　∵ 函数 $y=f(x)$ 的图像与 $y=g(x)$ 的图像有且只有三个不同的交点,

即函数 $\phi(x)=g(x)-f(x)$ 的图像与 x 轴的正半轴有且只有三个不同的交点.

∵ $\phi(x)=x^2-8x+6\ln x+m$,

∴ $\phi'(x)=2x-8+\frac{6}{x}=\frac{2x^2-8x+6}{x}=\frac{2(x-1)(x-3)}{x}=0$,解得 $x=1$ 或 $x=3$.

x		0	$(0,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$\phi'(x)$		不可导	+	0	—	0	+
$\phi(x)$			↗		↘		↗

当 $x\in(0,1)$ 时,$\phi'(x)>0$,$\phi(x)$ 是单调递增函数;

当 $x\in(1,3)$ 时,$\phi'(x)<0$,$\phi(x)$ 是单调递减函数;

当 $x\in(3,+\infty)$ 时,$\phi'(x)>0$,$\phi(x)$ 是单调递增函数;

高考数学优化思维绿色通道