21世纪高职高专通用教材

高等数学

ADVANCED MATHEMATICS

主　编　喻　曦
副主编　刘小丹　胡晓明　欧阳真卿　宋林森

湖南大学出版社

内容简介

本书是根据《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》编写的一本高职高专规划教材.内容包括函数的极限与连续、一元函数微分学、导数的应用、一元函数积分学、多元函数微积分、常微分方程、无穷级数、拉普拉斯变换、线性代数、概率论基础知识、数理统计初步等11章.每章末均安排了数学实验和自测题,方便读者自学和提高,书末附有常用数学公式、积分表、习题参考答案等,供读者查阅.

本书可作为高职高专各专业高等数学课程的教学用书,也可作为成人高等学历教育数学教材和相关教师的教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/喻曦主编.—长沙:湖南大学出版社,2007.8

ISBN 978-7-81113-180-2

Ⅰ.高… Ⅱ.喻… Ⅲ.高等数学—高等学校:技术学校—教材

Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第128421号

高等数学

Gaodeng Shuxue

主　　编: 喻　曦

责任编辑: 丁　莎

封面设计: 张　毅

出版发行: 湖南大学出版社

社　　址: 湖南·长沙·岳麓山　　**邮　　编:** 410082

电　　话: 0731-8821691(发行部),8820008(编辑室),8821006(出版部)

传　　真: 0731-8649312(发行部),8822264(总编室)

电子邮箱: dingsha008@126.com

网　　址: http://press.hnu.cn

印　　装: 长沙湖大印务有限公司

开本: 787×1092　16开　　**印张:** 20.5　　**字数:** 474千

版次: 2007年9月第1版　　**印次:** 2007年9月第1次印刷

印数: 1～5 000册

书号: ISBN 978-7-81113-180-2/O·72

定价: 34.00元

前　言

本书是从高职高专教育人才培养目标出发，以教育部最新制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》为指导而编写的高职高专各专业高等数学课程的教材.

本书在结构体系、内容安排、习题选择等方面努力体现高职高专的特色，力求贯彻以应用为目的、以必需够用为度的原则，在确保科学性的基础上阐明概念，减少理论证明，注重学生基本运算能力和分析问题、解决问题能力的培养. 本书还有如下特色：

(1) 突出了初等数学与高等数学的紧密衔接. 为了使学生从初等数学到高等数学顺利过渡，对初等数学的一些内容进行了适当回顾与总结，为方便读者查阅，附表中列出了一些常用的数学公式.

(2) 注重数学概念的通俗化、易懂化的叙述. 对重要知识点的引入力求朴实和自然，突出内容的实用性，尽可能从学生熟悉的问题入手，以图、表形象、直观地讲解概念与公式，淡化了深奥的数学理论，强化了几何意义的说明，难易程度更适合现在的学生状态，突出了职业教育改革的特点.

(3) 为了解决职业教育学时少的矛盾，本教材采用模块化设计，适合不同专业选用，高职院校可根据各专业培养目标的不同要求，进行"自助餐"式的模块组合，本教材模块小，便于实际操作. 同时在内容的编排上也作了一定的调整，如：将定积分与不定积分的概念在同一节引入，通过概念间的内在关系将其融为一体，便于学生对于定积分和不定积分概念的理解. 对于积分的计算方法只作适当介绍，将复杂的计算放到"数学实验"里完成，这样的安排既符合少学时的要求，又符合目前学生的实际情况.

(4) 注重对学生应用意识、兴趣和能力的培养. 选择了一些工程上或经济上的应用性例题和习题，并在每一章末设计了"数学实验"，在提高学生学习数学的兴趣的同时培养其应用数学解决实际问题的能力.

(5) 注重贯彻循序渐进的教学原则，精心设置了教学内容，每节末配有相应的习题，每章末配有自测题，特别注意例题、习题之间的呼应，方便学生对知识点的掌握和吸收.

本书由喻曦担任主编并统稿，刘小丹、胡晓明、欧阳真卿、宋林森担任副主编，戴金华、高克权、黄鹏辉、李海军、李宏平、李占光、任玉萍、孙学锋、谭乐平、王中生、吴建国、邹淑桢等或参与编写，或提供资料，对他们的辛勤劳作深表谢意！在本书的编写过程中还得到了长沙环境保护职业技术学院数学教研室全体同仁的大力支持，在此表示衷心的感谢！

限于编者水平有限，书中难免有不妥之处，衷心欢迎广大的教师和同学批评指正.

编　者

2007 年 6 月

目 次

第1章　函数的极限与连续

内容提要

函数是微积分研究的对象．极限是研究微积分学的重要工具，是高等数学中最重要的概念之一，微积分学中的许多重要概念，如导数、定积分等均通过极限来定义．因此，掌握极限的思想与方法是学好微积分的基础．本章先复习中学已学习过的函数及其性质，进而给出基本初等函数与初等函数的定义，然后重点研究极限的概念、性质与计算，以及函数的连续性．

1.1　函数及其图形

1.1.1　函数的概念

在一个自然现象或技术过程中，往往有多个变量的变化，这些变量彼此有联系，按照某种规律变化．

下面就两个变量的情形举例加以说明．

例1　圆的面积 A 与半径 r 的关系可表示为：

$$A=\pi r^2.$$

例2　物体作自由落体运动中，物体下落的距离 S 随下落的时间 t 的变化而变化．关系如下：

$$S=\frac{1}{2}gt^2\quad(\text{其中 } g \text{ 为重力加速度}).$$

以上两例的实际意义、表达方式虽不相同，但两者具有共同之处：均表达了两个变量在变化过程中协同变化的依赖关系，这种关系式可以充分揭示各因素之间的数量关系，也是我们揭示事物发展规律、对事物进行分析和研究的重要基础．

1. 函数的定义

函数的概念在17世纪之前一直与公式紧密关联，直到1837年，德国数学家狄利克雷(Dirichlet，1805～1859)才提出至今仍为人们易于接受且较为合理的函数概念．

定义1.1　设有两个变量 x 和 y，若当变量 x 在实数的某一范围 D 内，任意取定一个数值时，变量 y 按照一定的规律 f，有唯一确定的值与之对应，则称 y 是 x 的函数，记作

$$y=f(x),\qquad x\in D.$$

其中变量 x 称为自变量，变量 y 称为函数(或因变量)，自变量 x 的取值范围 D 称为函数的定义域．$W=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数的值域．图1-1标明了函数的定义域、值域、对应法则、自变量、因变量(函数)等．

由函数的定义知，一个函数可由它的定义域 D 和对应法则 f 唯一确定．因此，如果两个

函数的定义域与对应法则相同，则这两个函数就是相同的（或相等的），否则就是不同的.

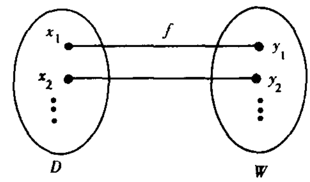


图 1-1

2. 函数的常用表示法

函数的常用表示法有三种：解析法、列表法和图像法.

（1）解析法　表达式为 $y=f(x)$.

例如：函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域为 $D=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 1\}$，值域为 $W=\{y\mid 0\leqslant y<1\}$.

解析法的优点是方便数学上的计算和分析.

（2）列表法

例 3　某复印店老板记录了 6 月 5 日这天复印的文件张数情况如表 1-1 所示.

表 1-1

时刻 t	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
单位时间复印的文件数 N	3	4	6	9	7	8	5	10	11	6	2

上表给出了一个时刻 t 对应着唯一的一个单位时间复印文件数 N，则表示了变量 t 与变量 N 间的对应关系.

列表法的优点是直观、实用. 但在许多情况下，只能给出部分信息，不能全面表达函数关系.

（3）图像法

例 4　某气象站用自动温度记录仪记下一昼夜气温变化（见图 1-2），由图可以看到一昼夜内每一时刻 t，都有唯一确定的温度 T 与之对应，因此图中曲线在闭区间[0,24]上确定了一个函数，也就是用图像表示函数.

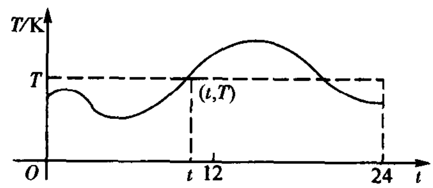


图 1-2

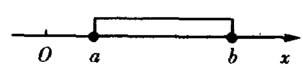
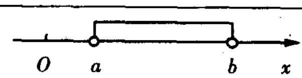
类似于例 4 这类问题，通常很难找到一个解析式准确地表示两个变量之间的关系，而可用某坐标系中一条曲线来表示两个变量之间的对应关系，这种表示函数的方法称为图像法.

有的函数虽然能用解析式表示，但为了使变量之间的对应关系更直观形象，我们也常把函数图像画出来帮助分析问题.

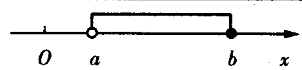
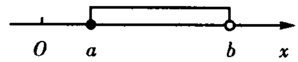
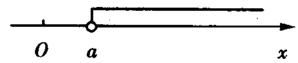
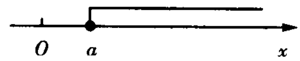
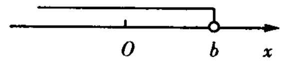
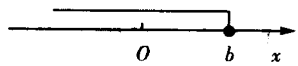
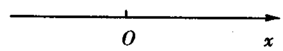
3. 变量的区间表示

对于某个问题来说，一个变量只能在一定的范围内取值. 为简单起见，变量的取值常用区间表示（如表 1-2 所示）.

表 1-2

名　称	记　号	集合表示法	图　示
闭区间	$[a,b]$	$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$	
开区间	(a,b)	$\{x\mid a<x<b\}$	

续表 1-2

名　称	记　号	集合表示法	图　示
半开半闭区间	$(a,b]$	$\{x \mid a < x \leqslant b\}$	
	$[a,b)$	$\{x \mid a \leqslant x < b\}$	
无穷区间	$(a,+\infty)$	$\{x \mid a < x < +\infty\}$	
	$[a,+\infty)$	$\{x \mid a \leqslant x < +\infty\}$	
	$(-\infty,b)$	$\{x \mid -\infty < x < b\}$	
	$(-\infty,b]$	$\{x \mid -\infty < x \leqslant b\}$	
	$(-\infty,+\infty)$	$\{x \mid -\infty < x < +\infty\}$	

以后，当不需要指明是哪一类区间时，我们就简单地称它为“区间”，且常用字母 I 表示.

特别，我们把开区间$(a-\delta,a+\delta)(\delta>0)$叫做点 a 的 δ 邻域，a 叫做邻域的中心，δ 叫做邻域的半径（见图 1-3）.

如果在点 a 的 δ 邻域中去掉 a，所得集合为$(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$，则称它为点 a 的去心 δ 邻域（见图 1-4）.

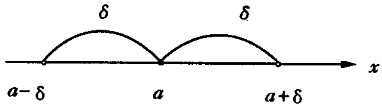


图 1-3

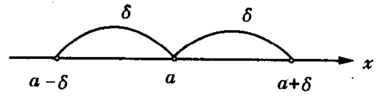


图 1-4

例 5　求下列函数的定义域.

(1)$y=\sqrt{4-x^2}$；

(2)$y=\dfrac{1}{4-x^2}+\sqrt{x+2}$；

(3)$y=\dfrac{1}{x}+\ln(1-x)$.

解　(1)$4-x^2\geqslant 0 \Leftrightarrow |x| \leqslant 2 \Leftrightarrow -2\leqslant x\leqslant 2 \Rightarrow D=[-2,2]$；

(2)$\begin{cases}4-x^2\neq 0\\ x+2\geqslant 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq\pm 2\\ x\geqslant -2\end{cases} \Rightarrow D=(-2,2)\cup(2,+\infty)$；

(3) $\begin{cases} x \neq 0 \\ 1-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x<1 \end{cases} \Rightarrow D=(-\infty,0)\cup(0,1)$.

例 6 下列各对函数是否相同?

(1) $f(x)=x$, $g(x)=\dfrac{x^2}{x}$; (2) $f(x)=x$, $g(x)=\sqrt{x^2}$;

(3) $f(x)=1$, $g(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$.

解 (1) 不同.

因为 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$, $g(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,它们的定义域不同,故不是同一函数.

(2) 不同.

虽两个函数定义域均为 $(-\infty,+\infty)$,但对应法则不同. 例如: $f(-1)=-1$, $g(-1)=1$.

(3) 相同.

因为 $f(x)$, $g(x)$ 的定义域都是 $(-\infty,+\infty)$,且对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$,都有 $f(x)=g(x)$,即 $1=\sin^2 x+\cos^2 x$,亦即对应法则相同,所以 $f(x)$, $g(x)$ 为同一函数.

1.1.2 函数的几种特性

1. 函数的奇偶性

定义 1.2 设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,如果对于任意 $x\in D$,都有

$$f(-x)=-f(x)$$

成立,则称 $f(x)$ 为奇函数. 如果对于任意 $x\in D$,都有

$$f(-x)=f(x)$$

成立,则称 $f(x)$ 为偶函数.

例如:函数 $f(x)=x^3$ 是奇函数,因为 $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$;函数 $f(x)=x^4$ 是偶函数,因为 $f(-x)=(-x)^4=x^4=f(x)$;函数 $f(x)=x^2+x^3$ 既不是奇函数,也不是偶函数,因为它不满足定义的条件.

奇函数的图像关于原点对称,偶函数的图像关于 y 轴对称(见图 1-5).

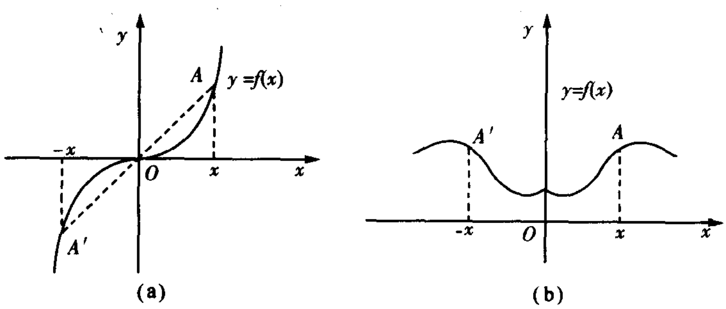


图 1-5

例 7 讨论 $y=x^4-2x^2$ 的奇偶性.

解 因为 $f(-x)=(-x)^4-2(-x)^2=x^4-2x^2=f(x)$,所以 $y=x^4-2x^2$ 为偶函数(如图 1-6 所示).

2. 函数的单调性

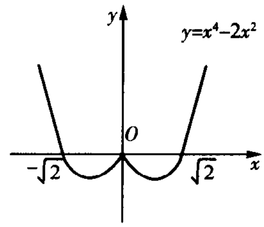


图 1-6

定义 1.3 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,区间 $I\subseteq D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1,x_2,当 $x_1<x_2$ 时,都有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的(见图 1-7),区间 I 称为单调增加区间;如果对于区间 I 上任意两点 x_1,x_2,当 $x_1<x_2$ 时,都有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的(见图 1-8),区间 I 称为单调减少区间. 单调增加和单调减少的函数统称为单调函数,单调增加和单调减少的区间称为单调区间.

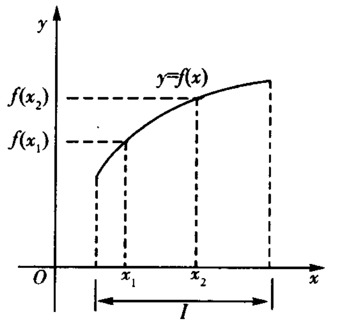


图 1-7

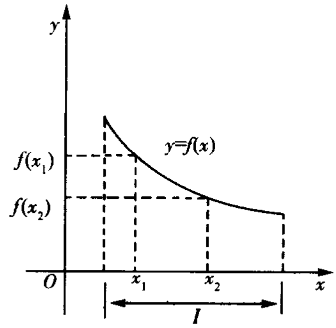


图 1-8

例 8 讨论函数 $y=3x$,$y=x^2$ 的单调性.

解 观察图 1-9 可知,函数 $y=3x$ 在区间$(-\infty,+\infty)$上是单调增加的,$y=x^2$ 在区间内$(-\infty,0)$是单调减少的,在区间$(0,+\infty)$内是单调增加的,区间$(-\infty,+\infty)$内不是单调的.

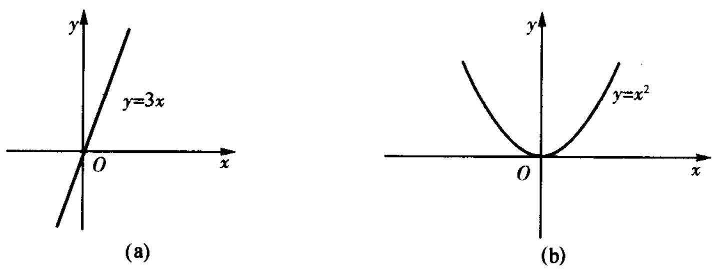


图 1-9

3. 函数的有界性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义,如果存在正常数 M,使得对于区间 I 内所有 x,都有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界. 如果这样的 M 不存在,则称 $f(x)$ 在区间 I 上无界.

例如:$y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$上满足 $|\sin x|\leqslant 1$,所以函数 $y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$

内是有界函数，如图 1-10(a) 所示. 而函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内是无界函数，如图 1-10(b) 所示.

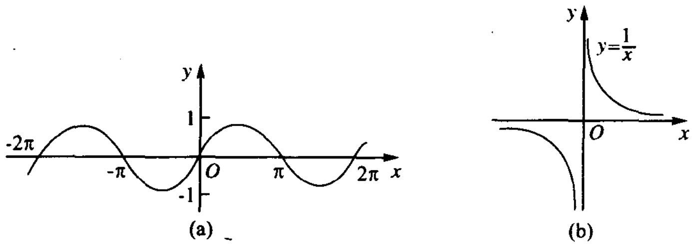


图 1-10

4. 周期性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个常数 $T\neq 0$，使得对任意的 $x\in D$ 有 $x\pm T\in D$，且 $f(x\pm T)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为周期函数，T 为 $f(x)$ 的周期. 周期函数的周期通常是指它的最小正周期.

例如：函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数；函数 $y=\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数；函数 $y=x^2$ 不是周期函数.

1.1.3 基本初等函数

基本初等函数为以下五类函数：

(1) 幂函数 $y=x^{\mu}$，μ 是常数.

(2) 指数函数 $y=a^x$ (a 是常数且 $a>0$，$a\neq 1$)，$x\in(-\infty,+\infty)$.

(3) 对数函数 $y=\log_a x$ (a 是常数且 $a>0$，$a\neq 1$)，$x\in(0,+\infty)$.

(4) 三角函数：

正弦函数 $y=\sin x$，$x\in(-\infty,+\infty)$，$y\in[-1,1]$.

余弦函数 $y=\cos x$，$x\in(-\infty,+\infty)$，$y\in[-1,1]$.

正切函数 $y=\tan x$，$x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，$y\in(-\infty,+\infty)$.

余切函数 $y=\cot x$，$x\neq k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，$y\in(-\infty,+\infty)$.

(5) 反三角函数：

反正弦函数 $y=\arcsin x$，$x\in[-1,1]$，$y\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

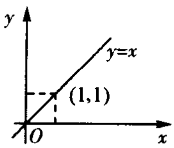
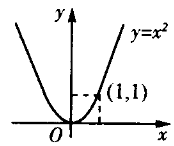
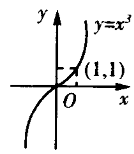
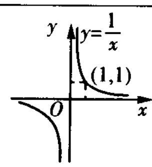
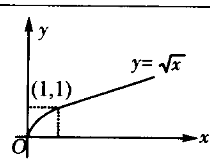
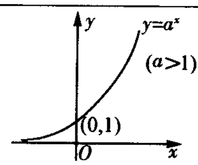
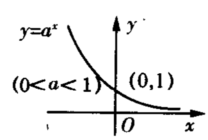
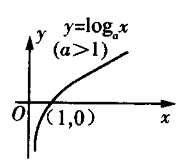
反余弦函数 $y=\arccos x$，$x\in[-1,1]$，$y\in[0,\pi]$.

反正切函数 $y=\arctan x$，$x\in(-\infty,+\infty)$，$y\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

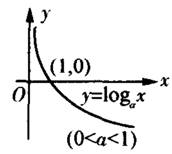
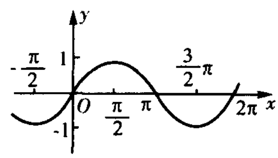
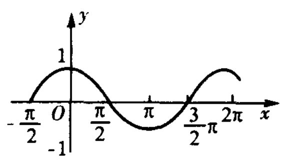
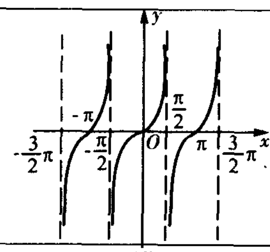
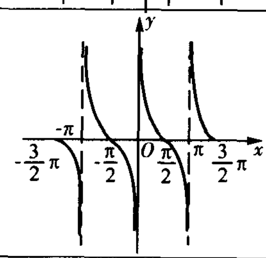
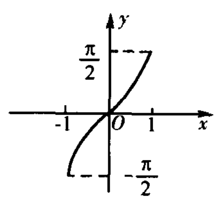
反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$，$x\in(-\infty,+\infty)$，$y\in(0,\pi)$.

这些常用的基本初等函数及其定义域与值域、图像、特性列于表 1-3.

表 1-3

名称	表达式	定义域与值域	图像	特性
幂函数	$y=x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数. 单调增加
幂函数	$y=x^2$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		偶函数. 在 $(-\infty,0)$ 内单调减少，在 $(0,+\infty)$ 内单调增加
	$y=x^3$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数. 单调增加
	$y=\dfrac{1}{x}=x^{-1}$	$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$		奇函数. 单调减少
	$y=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$	$x\in[0,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		单调增加
指数函数	$y=a^x$ $(a>1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调增加
	$y=a^x$ $(0<a<1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调减少
对数函数	$y=\log_a x$ $(a>1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调增加

续表 1-3

名称		表达式	定义域与值域	图像	特性
对数函数		$y=\log_a x$ $(0<a<1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调减少
三角函数	正弦函数	$y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		奇函数，周期为 2π，有界．在 $\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 单调增加，在 $\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$ 单调减少
	余弦函数	$y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		偶函数，周期为 2π，有界．在 $(2k\pi,2k\pi+\pi)$ 内单调减少，在 $(2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi)$ 内单调增加
	正切函数	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期为 π．在 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加
	余切函数	$y=\cot x$	$x\neq k\pi\quad(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期为 π．在 $(k\pi,k\pi+\pi)$ 内单调减少
反三角函数	反正弦函数	$y=\arcsin x$	$x\in[-1,1]$ $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$		奇函数，有界．单调增加