高等学校参考书

GAODENGSHUXUE
XUEXIZHIDAO

高等数学学习指导

李桠楠 著
乔 元 校

陕西人民教育出版社

高等学校参考书

高等数学学习指导

李桠楠 著

乔 元 校

陕西人民教育出版社

内 容 简 介

本书可与同济大学数学教研室主编的《高等数学》或其它高等数学教科书配套使用。全书共十二章，各章分别由基本要求、学习指导、例题选讲、自测题等四部分组成。书后附有自测题答案，可供读者对照检查。

本书着重于帮助读者弄清概念、掌握方法、开阔思路、培养分析问题和解决问题的能力，特别是对读者提高自学能力、准确而又灵活地掌握解题的思路和方法很有助益。本书的特点是说理透彻、富于启发、适用性强。

本书可供各类高等学校学生和大、中学教师以及其他数学工作者学习与参考。

高等数学学习指导

李桠楠　著

陕西人民教育出版社出版发行

(西安长安路南段 376 号)

西安电子科技大学印刷厂印刷

850×1168 毫米 大 32 开本　13 印张 400 千字

1990 年 10 月第 1 版　1990 年 10 月第 1 次印刷

印数：1—1,100

ISBN 7—5419—1773—7/G·1516

定价：5.90元

前　言

为了帮助初学者学好《高等数学》，根据教学大纲的精神及本人从事教学实践的体会，编写了这本学习指导书。全书共分十二章，其顺序编排与同济大学数学教研室主编的《高等数学》一书基本一致，对于使用其它高等数学教科书的读者除顺序之外也同样适用。全书各章均由基本要求、学习指导、例题选讲、自测题等四部分组成。书后附有自测题答案可供读者参考。

本书着重于帮助读者弄清概念、掌握方法、开阔思路、提高分析问题和解决问题的能力。对于培养自学能力、准确而又灵活地掌握解题的思路和方法也有助益。书中“基本要求”部分写得简练，意在使读者在学习教科书时能够“心中有数”、目的明确。全书的重点是各章的“学习指导”。在此，对于读者在学习过程中可能会遇到的种种疑难和问题作了深入浅出地解答和论述，指明了克服困难的方法和途径；对重要的概念，既阐明了实质和精髓，也指出了来龙与去脉，并尽量从具体的、通俗的地方入手，逐步深入、讲清讲透；对重要的原理和方法，注重讲明如何运用，特别是对读者容易发生困难的地方，都尽量作了分析或注释。书中自始至终注意到既要帮助学生“学会”，也要培养他们“会学”。著名教育家纳伊曼指出：“未来的文盲不再是不识字的人，而是没有学会怎样学习的人”。教科书只写明了教学的基本内容，怎样才能学懂学好，怎样才能做到概念清楚、推理严谨、叙述恰当，本书试图为读者指点迷津。“例题选讲”部分既有正例，又有反例，重在分析思路、阐明技巧、开拓知识视野。“自测题”紧密配

合各章内容，难易适度，知识复盖面大，针对性强，并附有答案及评分，便于读者自我检查学习情况。

由于本人水平所限，书中疏漏和不足之处一定不少，诚望读者不吝赐教。

李柾楠

1990年3月

目　录

第一章　函数与极限

本章内容大体可分为两部分：第一部分，函数；第二部分，极限。函数是高等数学的基本概念，极限是高等数学研究问题的根本方法，极限理论是高等数学的基础理论。

Ⅰ　函　　数

这一部分教材以函数概念为核心，指出了一类重要的函数——初等函数的结构，给出了初步认识函数的一些基本方法。

基本要求

1. 理解函数概念的实质，明确定义域和对应法则是决定函数的两大要素。

2. 掌握五类基本初等函数的定义、解析表达式、定义域、值域、图形及主要性质。

3. 了解复合函数的概念，会将若干个简单函数经过适当的复合运算得出复合函数，并能把一个复合函数“分解”成几个基本初等函数。

4. 了解函数及其反函数的定义域、值域以及图形之间的相互关系。

5. 会求一些初等函数的反函数。

6. 能够熟练地求解初等函数的定义域。

7. 会确定一些比较简单的函数的单调性、有界性、奇偶性和周期性。

学 习 指 导

函数由其定义域和对应法则确定。我们研究的初等函数尽管形式各不相同，但归根结底不外乎是五种基本初等函数依五种运算(有限次的四则运算和有限次的复合运算)的结合。因此，四则运算与复合运算都是扩展函数的方法。对一个具体的函数来说，我们可以根据其对应关系去分析它的单调性、奇偶性、有界性、周期性，等等，这些都是认识一个函数的第一步工作。描绘函数的图形是认识函数的第二步工作，也是进一步认识函数的重要途径。图形是研究函数的工具，五种基本初等函数的图形是描绘较复杂的函数图形的基础，务必搞清其结构特征。

一、关于函数的定义

关于函数的定义，学习时注意以下几点：

1. 在函数的定义中，对应关系 f 是抽象的，但当具体地研究某一函数时，对应关系 f 则又是具体的。如，$y=3x^2-2x+5$ 中的对应关系 f 是：将自变量先平方，再 3 倍，然后从中减去自变量的 2 倍，最后再加上 5。可见，f 就是由这些运算所确定的。按照这些运算给出的 f，只要把自变量 x 的值代入表达式 $3(\quad)^2-2(\quad)+5$ 中的"(　)"内进行运算，就可得到 x 所对应的函数值 y。例如，当 $x=3$ 时，上述括号内即为 3，则

$$f(3)=3\times(3)^2-2\times(3)+5=26,$$

这就是说，与 $x=3$ 相对应的 $y=26$。

当 $x=2a+1$ 时，上述括号内即为 $2a+1$，则

$$f(2a+1)=3(2a+1)^2-2\times(2a+1)+5$$
$$=12a^2+8a+6,$$

这表明，与 $x=2a+1$ 相对应的 $y=12a^2+8a+6$。

因此，可以将函数比喻为一个数值"加工器"，将自变量 $x\in A$ (定义域)输入这个"加工器"后，通过 f 的"作用"，输出的就是函

数值 y。在上例中，f 的作用就是：把输入的对象先平方，后3倍，又减去该对象的2倍，最后再加5。

一个个不同的函数，犹如一台台不同的数值“加工器”。

2。当同一个问题中遇到几个不同的函数时，为了避免混淆，不同的函数必须用不同的字母来表示。

3。函数概念虽然包含三方面的因素：对应关系、定义域、值域，但如果知道了定义域和对应关系，那么值域便可随之而定。因此，确定一个函数实际上只有两个要素：一是定义域；二是对应关系(对应法则)。

如果两个函数的定义域和对应关系都是相同的，那么这两个函数就是相同的函数，或者说，它们是同一个函数。如果两个函数的定义域和对应关系其中至少有一个不同，则这两个函数便是不同的函数。例如，函数

$$y = x^2 \qquad x \in (0, +\infty)$$

与

$$y = x^2 \qquad x \in (-\infty, 0)$$

就是不同的函数。同理，$y = \frac{x}{x}$ 与 $y = 1$ 也是两个彼此不同的函数。

4。给定一个函数，必须给出它的定义域。但当函数用解析法表示而未指明定义域时，其定义域就是指它的自然定义域。

如果所给的函数是联系实际问题来考虑的，那么，其定义域就要依据实际问题而定。例如，自由落体运动的函数式为 $S = \frac{1}{2}gt^2$，其自然定义域为$(-\infty, +\infty)$，但在物理问题中，时间 $t < 0$ 没有意义。并且当 $t > \sqrt{\frac{2h}{g}}$ 时已是落地以后的情况，那时的运动不再符合自由落体的运动规律，因此，函数 $S = \frac{1}{2}gt^2$

的定义域应该是$\left[0,\sqrt{\frac{2h}{g}}\right]$.这里,$h$是物体下落时所处的高度。

一般地，求函数的定义域就是指求它的自然定义域。

为了使读者能够更好地理解函数概念，下面再举一些函数的例子，这些函数也是我们今后需要用到的。

例 1 符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x\begin{cases}1, & 当\ x>0,\\ 0, & 当\ x=0,\\ -1, & 当 x<0.\end{cases}$$

因为对任意实数 x，总有 $x=|x|\cdot\operatorname{sgn}x$，所以，$\operatorname{sgn}x$ 起了表明 x 的符号的作用，故将这个函数称为**符号函数**。其图形如图 1-1 所示。

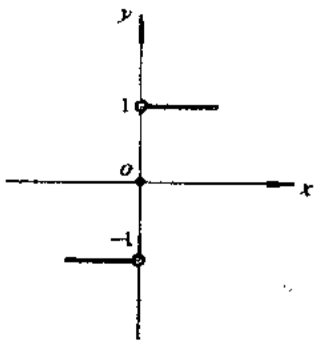

图 1-1

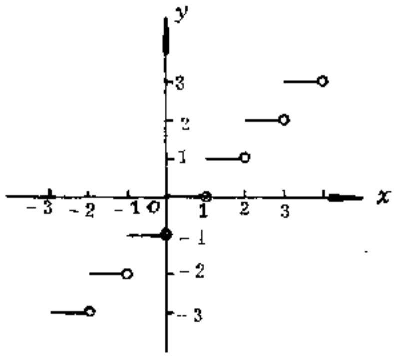

图 1-2

例 2 取整函数

$$y=[x],$$

也称整数部分函数。

对任意 $x\in R$，对应的 y 是不超过 x 的最大整数，用记号$[x]$表示，故$[x]$是整数，且

$$[x]\leqslant x<[x]+1.$$

其图形如图 1-2 所示。

例 3 小数部分函数

$$y=\{x\}=x-[x].$$

其图形如图 1-3 所示。

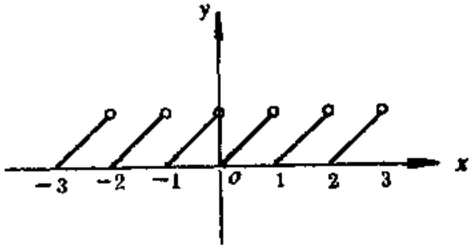

图 1-3

二、关于反函数的定义

〔定义〕 已知函数 $y=f(x)$，$x\in A$.这里，A 是函数的定义域，用 $f(A)$ 表示值域。现建立 $f(A)$ 到 A 的对应关系如下：对 $f(A)$ 中每一个 y，如果按照已知函数 $y=f(x)$ 的对应关系 f，在 A 中都只有唯一的(原象)x，则令 x 对应 y.这样得到的以 y 为自变量，以 x 为因变量的新函数 f^{-1}：$f(A)\to A$ 就称为函数 $y=f(x)$ 的反函数，记为

$$x=f^{-1}(y),\quad y\in f(A).$$

为了加深对反函数概念的理解，学习时应该注意以下几点：

1. 根据反函数的定义，只有当函数 $y=f(x)$，$x\in A$ 的值域 $f(A)$ 中的任一个 y 在 A 中具有唯一的原象 x 时，函数 $y=f(x)$ 才存在反函数。因此，函数 f 必须满足下述条件：

对 A 中任意 x_1、x_2，当 $x_1\neq x_2$ 时，必有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，即 A 中的不同的数在 $f(A)$ 中有不同的象。如果一个函数的对应关系 f 具

有这种特点，就称这种对应关系为 A 到 $f(A)$ 上的"一一对应"。

综上所述，只有当函数 $y=f(x)$，$x\in A$ 的对应关系是 A 到 $f(A)$ 上的一一对应时，这个函数才存在反函数。

2．若 $x=f^{-1}(y)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数，这时 $y=f(x)$ 也是 $x=f^{-1}(y)$ 的反函数，或者说它们互为反函数。显然，前者的定义域就是后者的值域，前者的值域又是后者的定义域。例如，

$$y=f(x)=10^x$$

的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,+\infty)$。它的反函数

$$x=f^{-1}(y)=\lg y$$

的定义域为 $(0,+\infty)$，值域为 $(-\infty,+\infty)$。

注意，函数与其反函数之间存在如下关系：

$$f^{-1}[f(x)]=x,$$
$$f[f^{-1}(y)]=y.$$

3．在上述反函数的定义中，将 $y=f(x)$ 的反函数记为 $x=f^{-1}(y)$。此时，y 表示自变量，x 表示因变量，对应关系是 f^{-1}。可是，在函数的一般定义中，常用字母 x 表示自变量，用字母 y 表示因变量。因而，通常把 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 中的 x 与 y 对调过来写成 $y=f^{-1}(x)$，并且说 $y=f^{-1}(x)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数。

例如，$y=3x+2$ 的反函数是 $x=\dfrac{y-2}{3}$，把其中的 x、y 相对调得 $y=\dfrac{x-2}{3}$，我们也说 $y=\dfrac{x-2}{3}$ 是 $y=3x+2$ 的反函数。

为了叙述方便，通常约定：把 $x=f^{-1}(y)$ 称为 $y=f(x)$ 的原义反函数，而把原义反函数中 x 与 y 相互对调所得的函数 $y=f^{-1}(x)$ 称为 $y=f(x)$ 的矫形反函数。

读者也许会问：$y=f(x)$ 的原义反函数与矫形反函数中究竟哪一个才是 $y=f(x)$ 的"真正"的反函数呢？回答是：它们都是

$y=f(x)$的反函数！这是因为，函数的本质在于对应关系和定义域，而并不在于采用哪个字母来表示自变量与因变量。正如 $y=2x$，$x\in R$；$S=2t$，$t\in R$；$u=2v$，$v\in R$ 都是同一函数一样，$y=f(x)$，$x\in A$ 的原义反函数 $x=f^{-1}(y)$，$y\in f(A)$与矫形反函数 $y=f^{-1}(x)$，$x\in f(A)$实际上是同一个函数，只不过前者用 y 表示自变量，而后者用 x 表示自变量罢了。所以它们两者都是 $y=f(x)$，$x\in A$ 的反函数。

三、关于初等函数

（一）初等函数的构成

初等函数是由基本初等函数经过有限次的四则运算及有限次的复合运算得到的用一个式子表示的函数。基本初等函数主要是指：幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数这五类函数，常函数即常数也算作基本初等函数之一，参看下表：

$$\text{基本初等函数}\begin{cases}\text{幂函数}\\ \text{指数函数}\\ \text{对数函数}\\ \text{三角函数}\\ \text{反三角函数}\\ \text{常(函)数}\end{cases}$$

$$\text{基本初等函数}\xrightarrow[\text{有限次的复合运算}]{\text{有限次的四则运算}}\text{初等函数}$$

注意：初等函数是只用一个解析式子表示的函数。因此，分段函数不一定是初等函数！

（二）初等函数的分类

习惯上把初等函数分为如下几类：

1．有理整函数

有理整函数就是我们通常所说的多项式，即形如

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

的函数称为有理整函数，其中a_0、a_1、…、a_{n-1}、a_n均为常数，且$a_0 \neq 0$。非负整数n称为多项式的次数。

由此可见，有理整函数的函数值可以由自变量的值与常数值通过最简单的运算：+、-、×而得到。

2．有理(分)函数

两个有理整函数的比构成的函数称为有理函数，即形如$y=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$(其中$P(x)$、$Q(x)$为多项式)的函数称为有理函数或有理分函数。

容易看出，有理函数的函数值，可以由自变量的值与常数值借助于算术运算(+、-、×、÷)而得到。特别地，当$Q(x)\equiv 1$时，有理函数即成为有理整函数。因此，通常把$Q(x)\neq$常数的情形，即有理函数中非有理整函数的一些函数称为有理函数。

3．代数函数

若函数$y=f(x)$满足代数方程

$$P(x, y)=P_0(x)y^n+P_1(x)y^{n-1}+\cdots+P_{n-1}(x)y+P_n(x)=0,$$

其中n为正整数，$P_0(x)\neq 0$，系数$P_0(x)$、$P_1(x)$、…、$P_n(x)$都是多项式，则称函数$y=f(x)$为代数函数。这就是说，由上述代数方程所确定的函数称为代数函数。

4．超越函数

非代数函数的一切函数统称为超越函数。基本初等函数中，除幂函数$y=x^{\alpha}$(α为有理数)以外，其余均为超越函数。

注意，初等函数与超越函数之间、初等函数与代数函数之间，均不存在“包含”关系，这就是说，初等函数不一定是超越函数，初等函数也不一定是代数函数。

四、关于求函数的定义域

求函数的自然定义域，就是指求这样的实数的集合：当自变量取这些实数时，函数的表达式有意义。一个函数的定义域可以

是一个区间，也可以是几个区间，也可以是离散的数。例如，函数$\sqrt{\sin x-1}$的定义域就是一些离散的数：

$$x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\qquad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots).$$

求函数的定义域时，要注意以下几点：

(1) 分式的分母不能为零；

(2) 偶次根式的被开方数必须非负；

(3) 幂指数是无理数或含有变量的式子时，底的表达式应该为正；

(4) 对数的真数必须为正；对数的底若为含有变量的式子，则该式应该为正且不等于 1；

(5) 正切符号后面的式子不能等于$k\pi+\frac{\pi}{2}$，余切符号后面的式子不能等于 $k\pi$，这里，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$；

(6) 反正弦、反余弦符号后面的式子，其绝对值不能超过 1；

(7) 由有限个函数经过四则运算所得的函数，其定义域是各函数定义域的交集；

(8) 复合函数的定义域要使内层函数的值域包含在外层函数的定义域之中。

五、描绘函数图象的常用方法

研究一个具体的函数时，常常需要描绘出它的图象。描绘函数图象一般采用描点法。除此之外，还应在掌握基本初等函数图象的基础上，掌握一些特殊的描绘函数图象的方法。一般常用的方法有：

(一) 平移法

设 $y=f(x)$的图象已知。

1. $y=f(x+a)$的图象

当 $a>0$ 时，将 $y=f(x)$的图象向左移动 a 个单位；

当 $a<0$ 时，将 $y=f(x)$的图象向右移动 $|a|$ 个单位。

2. $y=f(x)+b$ 的图象

当 $b>0$ 时，将 $y=f(x)$的图象向上平移 b 个单位；

当 $b<0$ 时，将 $y=f(x)$的图象向下平移 $|b|$ 个单位。

（二）伸缩法

1. $y=kf(x)$的图象($k>0$)

将曲线 $y=f(x)$上所有各点的纵坐标拉伸(压缩)到原来的 k 倍，横坐标不变，即可得到函数 $y=kf(x)$的图象。

2. $y=f(kx)$的图象($k>0$)

将曲线 $y=f(x)$上所有各点的横坐标拉伸(压缩)到原来的 $\frac{1}{k}$倍，纵坐标不变，就可得到曲线 $y=f(kx)$。

例 作函数 $y=3\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象。

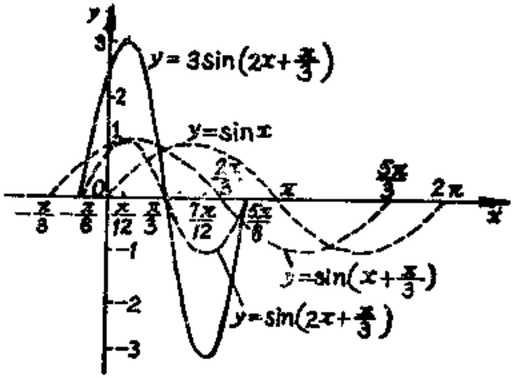

图 1-4

函数 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象可以看作是用下面的方法得到的：

先把 $y=\sin x$ 图象上所有的点向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位，得到

$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象；再把 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象上所有的点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$倍（纵坐标不变），得到 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象，最后把$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象上所有各点的纵坐标伸长到原来的3倍(横坐标不变)，从而得到 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象。如图1-4所示。

（三）界线曲线法

以 $y=x\sin x$的图形为例加以说明。

因为$|\sin x|\leqslant 1$，所以$|y|=|x\sin x|\leqslant|x|$。可见，函数$y=x\sin x$的图形界于直线$y=x$和$y=-x$之间。又因为$y=x\sin x$是偶函数，故图象关于$y$轴对称，取$x$的一些特殊值，计算出对应的$y=(x\sin x)$的值，列表如下：

x	…	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	……
$\sin x$	…	0	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	-1	0	……
y	…	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$	0	$-\frac{3}{2}\pi$	0	……

再描点作出图形，如图1-5所示。

（四）叠加法

若$y=f(x)=g(x)+h(x)$，则$y=f(x)$的图象可由$y=g(x)$与$y=h(x)$的图象叠加而得到。

首先作出$g(x)$与$h(x)$的图形，那么，在横轴上任取一点x_0，则点$(x_0,g(x_0)+h(x_0))$即为$y=f(x)=g(x)+h(x)$图形上的一点。因此，由$g(x)$和$h(x)$图形上的点$(x_0,g(x_0))$和$(x_0,h(x_0))$便可得到$f(x)$图形上的点$M(x_0,g(x_0)+h(x_0))$．随着x_0的变化，