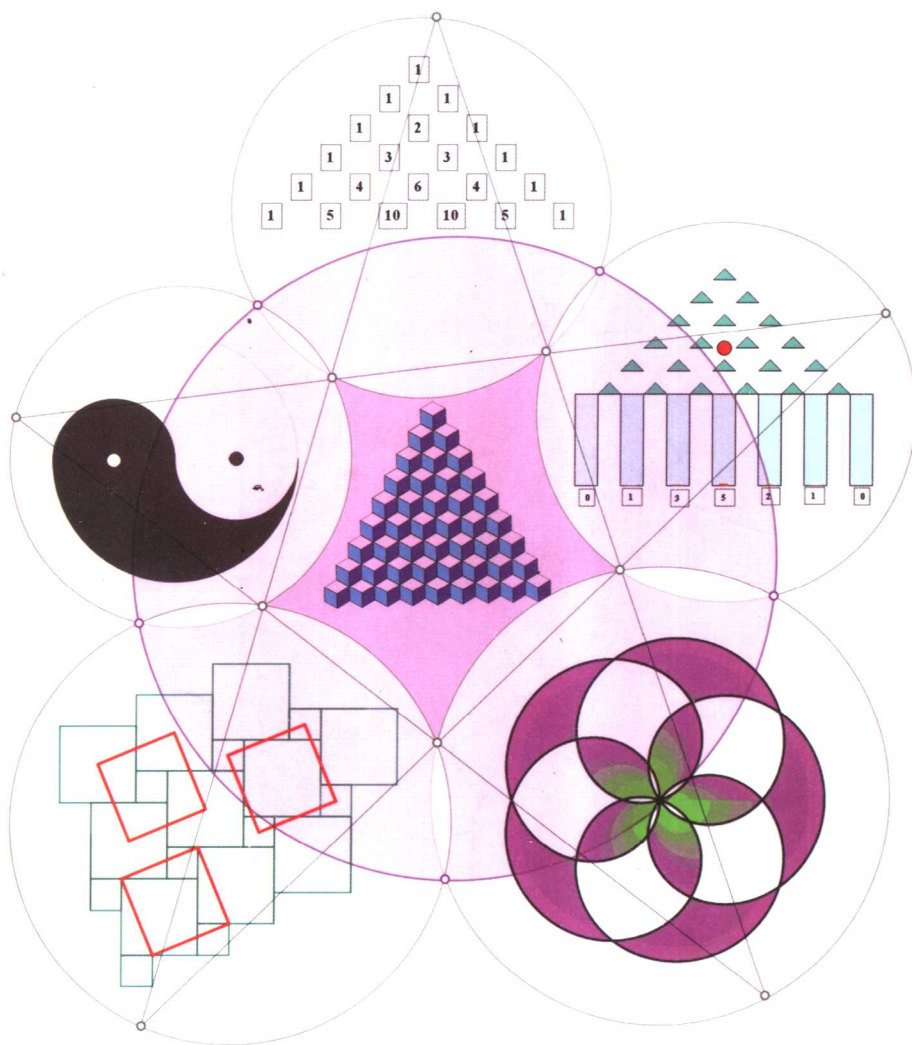


# 动态几何教程

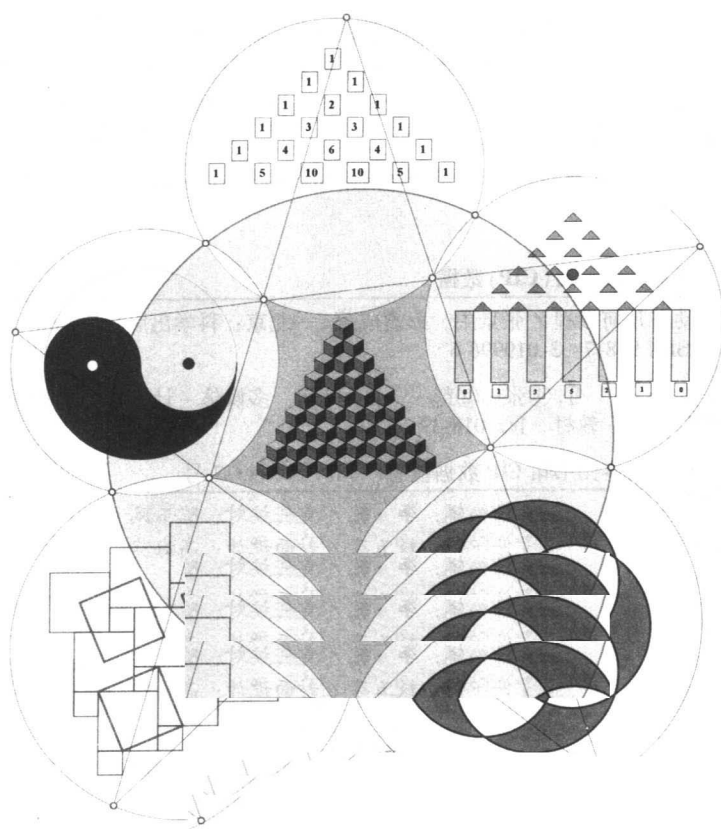
张景中 彭翥成 著



科学出版社  
[www.sciencep.com](http://www.sciencep.com)

# 动态几何教程

◎ 张景中 彭翥成 著



科学出版社

北京

## 内 容 简 介

本书详尽地介绍了动态几何软件《超级画板》免费版本的操作方法和有关的技巧。其中,第一章对软件的多种功能进行概要的叙述;以下章节分别介绍了《超级画板》免费版本在平面几何、代数运算、解析几何、函数图像、概率统计、立体几何、算法编程等方面的教学应用,最后介绍了一些经典实例,以及如何运用《超级画板》制作课件和进行教学研究。

本书是数学教师和信息技术课程教师的教学参考书、工具书和教学资源库;也是学生学习数学和信息技术的辅助工具。可以作为中学教师继续教育的培训教材或自学教材,也可以作为师范院校数学专业或教育技术专业学生的教材或参考书。

与本书配套的教学资源可在网站 <http://www.zplusz.org> 免费下载。

### 图书在版编目(CIP)数据

动态几何教程 / 张景中, 彭翥成著. —北京: 科学出版社, 2007  
ISBN 978-7-03-019996-6

I. 动… II. ①张…②彭… III. 几何 - 多媒体 - 计算机辅助教学 - 软件工具 - 教材 IV. 018-39

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 144317 号

责任编辑: 李 敏 / 责任校对: 陈玉凤  
责任印制: 钱玉芬 / 封面设计: 高海英

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

铭浩彩色印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2007 年 9 月第 一 版 开本: 787 × 1092 1/16

2007 年 9 月第一次印刷 印张: 21 3/4

印数: 1—5 000 字数: 516 000

定价: 33.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈环伟〉)

在计算机屏幕上作出的几何图形，如果在变化和运动中能保持其几何关系不变，就叫做动态几何图形。有关动态几何作图的理论和应用的学科，就是动态几何。

动态几何图形有两个基本特点：①图中的某些对象可以用鼠标拖动或用参数的变化来直接驱动；②其他没有被拖动或直接驱动的对象会自动调整其位置，以保持图形原来设定的几何性质。例如，作两条线段和它们的一个交点；当拖动一条线段的端点时，线段会随着运动，交点也会随着运动（图 0-1）。

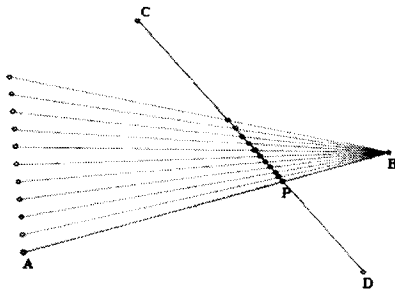


图 0-1

第一个动态几何软件《几何画板》（简称 GSP），出现于 20 世纪 80 年代，是美国国家科学基金支持的项目研究成果。《几何画板》问世后，动态几何的教育价值很快得到世界各国的教师和教育家的肯定，欧美国家又研发出更多的动态几何软件，经过 20 多年的发展，动态几何软件至少已有 40 多种，其功能也更加丰富。除了上面两个特点外，有些软件增加了跟踪、轨迹、测量、动画、迭代以及曲线作图的功能。我国于 1996 年由人民教育出版社引进《几何画板》并完成该软件界面的汉化工作。10 多年来，《几何画板》在中学数学教学中已产生较大的影响，《几何画板》也成为大学数学系《计算机辅助教学》课程的一个重要组成部分，而这一课程被那些已经毕业、现在从事中学数学教学的老师认为是最有帮助的大学课程。

本教程选择的配套软件，是我国自主研发的《Z+Z 智能教育平台——超级画板》（简称《超级画板》）的免费版本。它比《几何画板》更容易学习和使用，也能更全面地满足数学教学和学习的需要。

事实上，教与学的活动要涉及知识的传播。用于教学的教育软件实质上是满足人们知识需求的系统。人们对知识的需求是多种多样的。大体说来，不外是：

(1) 引用资料。这是对知识的最通常最基本的使用方式。

(2) 解决问题。特别是专业科技问题。如用数学软件来解方程，求最大公因式；或用绘图软件画几何图形工程图样。为满足这类需求，知识要以基于一定算法的可执行程序的形式储存。

(3) 科学传播。这就要将知识组织成生动通俗的表现形式。如教师备课和制作课件，科普作者进行创作，都是为传播知识而提出对知识的需求。这不仅要使用资料和解题程序，还要求提供方便的表现手段，以便演示其作品。

(4) 学习进修，包括知识学习和技能培训。这要求资料组织得由浅入深以循序渐进，解题程序要有过程便于举一反三，并辅以练习、测评等。

(5) 学术研究。这要求知识库具有高层次的专业内容和有效率的运算器，支持知识创新活动。

简单地讲，人们对知识系统的需求，基本上是为了引用知识、运用知识、传播知识、学习知识和发展知识。在这些活动中，大量的工作是可以机械化的，其中相当多的工作是数学活动，可以应用数学机械化的思想、方法和成果来解决。

在某一知识领域内一定层次上，能够满足人们引用知识、运用知识、传播知识、学习知识和发展知识的需求的计算机系统，即能够使这些活动尽可能机械化的计算机系统，可以称之为一个“智能知识平台”。这里设想的智能知识平台是面向学科领域的，并且是分层次的。如果将其学科知识水平定位于和某一等级学校的课程大纲相符合，它就成了针对某个学科的智能教育平台。对于数理学科，在构建其智能教育平台时，为了满足人们运用知识、传播知识和发展知识活动中的需求，数学机械化扮演着重要的角色。

数学机械化和教育技术的结合，能带来哪些好处呢？

## 1. 本来就要做的事，做得更快更容易，提高了效率

效率问题不可忽视。因为量变会引起质变。效率提高了，老师和学生就减轻了负担，才有更多时间思考、实践、讨论，才有可能创新。教师不论用什么模式来教，学生不论用什么方法来学，他们都要写、画和计算。这些劳动中有些部分是机械的、重复的，并且劳动过程本身对达到教学目标意义不大。对教师来说，这类劳动所占比例更大。用计算机代替教师和学生做这些工作，能够提高效率，减轻负担，使教师、学生把精力和注意力用到更高层次的教学和学习环节。

## 2. 有些过去想到而做不到的事，可以轻松实现

许多现象和过程在黑板和纸笔提供的教学环境中，教师只能讲一讲，学生只能想一想。用了计算机和智能平台，可以演示、操作了。例如：带参数的初等函数图像，会随着参数的变化而变化。观察这一变化过程，对同一类型函数图像的共性和与参数的关系就能一目了然；对在屏幕上作出的立体图形（如各种正多面体）进行操作并从不同的角度观察：平移、旋转、缩放、分割、取截面、表面展开，以及把空间的多边形放到平面上看等。这是过去教师非常想做的。许多操作用实物难以进行。

对大量数据的处理和对庞大的数和式的运算的感受。如算一算 10000 的 3 次方和 3 的 10000 次方, 比较一下, 对指数增长会有震撼性的感受。以上这些活动, 都可以直接应用智能平台的基本功能现场即兴操作, 不必制作课件。教师在通常的备课过程中就可以做好准备。

### 3. 创造出过去可能想不到或不敢想的教学资源

有了计算机和智能平台作为工具和教学环境, 教师和学生的创新潜能会得到更多的激励, 设计制作出新的课件和学件。这些课件和学件可以直接联系着课程内容, 也可能是课程内容的扩展和深化。它们可供学生欣赏、操作、研究以及制作发展。例如, 不规则多边形镶嵌; 按定义生成圆锥曲线; 用凸轮或曲轴连杆实现直线运动和圆周运动的转化; 把三棱柱切割为棱锥等。

我国在自主研发《超级画板》的过程中, 借鉴《几何画板》的长处, 把动态几何作为最基本的功能。此外, 还根据教师教学和学生学习的实际需要, 将动态几何和符号演算、自动推理、编程环境以及课件制作等进行有机地集成; 在操作方式上的创新处理使得软件更加易学易用。事实上, 它已经突破了动态几何的框架, 发展成为集动态图形与动态计算于一体的逻辑动漫平台。为了交流的方便, 我们仍然把已经发展成为逻辑动漫的系统称做动态几何。表 0-1 就是关于《超级画板》和《几何画板》主要功能的一些对比。

表 0-1 《超级画板》和《几何画板》主要功能的一些对比

|         | 《几何画板》 | 《超级画板》  | 备注                    |
|---------|--------|---------|-----------------------|
| 动态几何    | 强      | 强       | 《超级画板》智能画笔更方便         |
| 几何变换    | 有      | 强       | 《超级画板》增加仿射变换, 对轨迹变换   |
| 轨迹跟踪和动画 | 有      | 强       | 《超级画板》对应功能更完善         |
| 含参数曲线作图 | 有      | 强       | 《超级画板》支持含字母表达式直接输入和复制 |
| 数值计算    | 5~6 位  | 15~16 位 | 《几何画板》分数运算只能得出小数      |
| 符号计算    | 无      | 有       | 《超级画板》支持大整数, 多项式等运算   |
| 文本和公式编辑 | 弱      | 强       | 《超级画板》有可变换文本和公式自动排版   |
| 动态测量    | 有      | 强       | 《超级画板》可测量任意表达式        |
| 统计图表    | 无      | 有       | 《超级画板》还可以自动生成函数表      |
| 可视化作图   | 有      | 强       | 《超级画板》作图更傻瓜化          |
| 程序化作图   | 无      | 有       |                       |
| 编程环境    | 无      | 有       |                       |
| 几何推理*   | 无      | 有       |                       |
| 网页生成*   | 有      | 有       |                       |
| 运行情形    | 快速流畅   | 正常      | 非常复杂的图形拖动起来才有差别       |
| 作图宏记录*  | 有      | 有       |                       |

续表

|         | 《几何画板》 | 《超级画板》 | 备注                |
|---------|--------|--------|-------------------|
| 几何迭代*   | 强      | 有      |                   |
| 新手入门    | 5~7天   | 1~2天   | 《超级画板》操作更简便易学     |
| 课件制作演示  | 可以     | 非常方便   | 《超级画板》比PPT更方便讲课   |
| 用户发挥空间  | 大      | 更大     | 《超级画板》学会后更容易扩展    |
| 对数学课程支持 | 大部分    | 全面     |                   |
| 视觉印象    | 一般     | 美观     | 《超级画板》作图有分层、有渐变   |
| 免费版本    | 无      | 有      | 《超级画板》免费版本能满足教学要求 |
| 界面      | 简洁     | 可简可详   | 《超级画板》界面支持用户自定义   |

\* 号表示《超级画板》注册版才有的功能

近年来，很多人关心在教学中使用信息技术的实际效果。但是，美国教育部公布的一项研究报告（载于美国《华盛顿邮报》2007-04-05）指出：教学软件对学生成绩的提高没有多大帮助。造成这一结果的一个重要原因就是软件的选择并不恰当。如果总是将普适的软件（如PPT、FLASH等）直接搬过来用于教学，那么所得到的教学效果肯定是不佳的。这些年的实践表明使用普适的软件从事教学所取得的效果，远远不能补偿所投入的人力和物力。一位数学教师在网上传这类软件在教学上的应用效果的评价是“老师做累了，学生看傻了”。这句话一针见血地指出了在教学活动中滥用普适信息技术的不当之处，也说明为学科教学研究量身订做的软件的必要。

而与此相反的是，对于动态几何在教育上的应用，所有的评论和教学实践的反应都是正面的肯定。关于动态几何的理论和应用的研究和实践，已有大量的文章书籍和网页。下面以《超级画板》为例，介绍动态几何在教育中的应用。

### 1. 日常学习的工具

作为学生学习和教师备课的日常工具，它可以作为信息时代的圆规、直尺、三角板、计算器、数学表、画笔、书写板以及计时器；一身多任，方便快捷，所作的图形和计算的结果都以动态方式呈现，大大提高工作学习效率。例如，用《超级画板》制作3个参数的动态简谐振动图像（图0-2）只要一分多钟，学会制作方法也只要3~5分钟。用其他非动态几何工具作这样的图像，学会使用软件至少要几个小时，制作动态图像也要个把小时。

又如，用其他计算工具计算一个表达式的值，当参数改变时需要再次赋值输入计算。若使用具有动态计算功能的《超级画板》，只要一次输入表达式，拖动参数尺上的滑钮或参数动画按钮，就可以观察表达式的值随参数变化的过程。还可以方便地把计算结果做成曲线图和散点图进行直观考察。图0-3是在计算一个表达式当参数 $n$ 成倍增长时的极限过程。

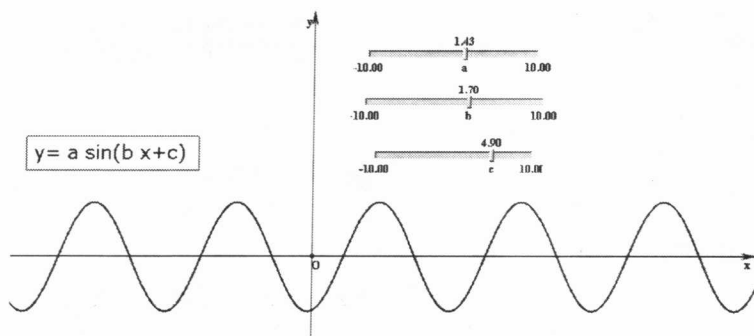


图 0-2

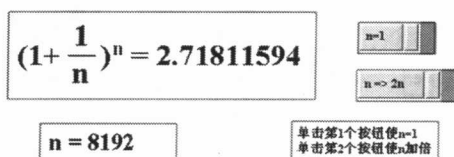


图 0-3

## 2. 课件制作的平台

用基于动态几何功能的平台来制作课件，方便快捷。一般的课件常常能在几分钟内作出，甚至可以一边讲课一边作，或师生在讨论中共同作出。所作的课件常常可以根据教学需要动态呈现，具有很强的动态性、交互性和开放性。动态性和交互性是大家常常谈到的，开放性则要进一步说明。所谓开放性，是指学生可以比较容易地修改课件，在课件上增加新的对象作进一步的观察探索。例如，课件上画了正弦曲线，学生可以容易地把它改为余弦曲线或对数函数曲线，以收到举一反三的功效。讲平摆线（旋轮线）的课件上画了滚动的圆，学生可以在圆上作一个点，看看自己作的点在圆滚动时会不会也画出平摆线（图 0-4）。

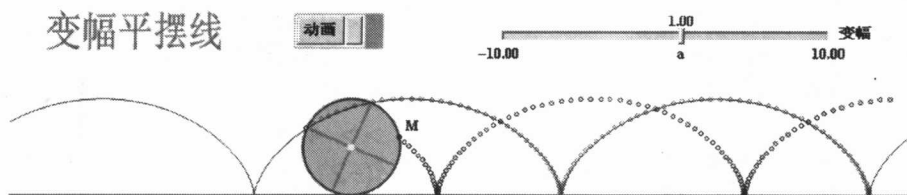


图 0-4

用基于动态几何功能的平台，还有利于制作模拟随机过程的仿真课件。课件所呈现的随机过程每次不同，有真实感。用通常的动画工具很难表现这类过程，例如说明二项分布的高尔顿实验（图 0-5）。



# 模拟高尔顿实验

先单击预备钮，再单击开始钮启动  
当小球到最低处时单击停止钮暂停或终止。

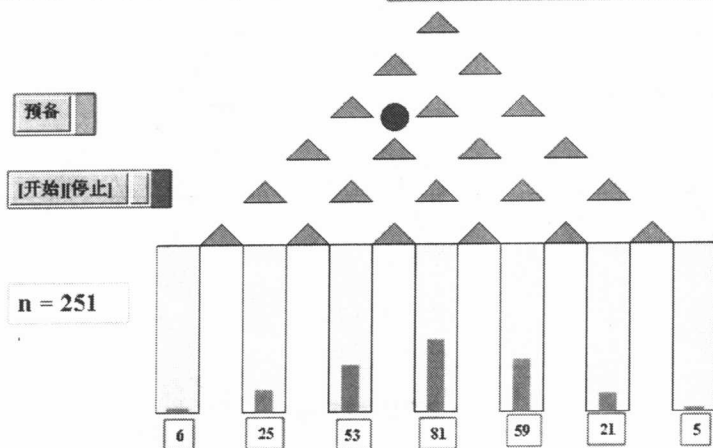


图 0-5

在基于动态几何的平台上备课或准备报告，可以使内容的呈现生动有趣，把事物的发展过程和逻辑关系阐述得更为清楚，使其更有吸引力和说服力。

## 3. 实验探索的环境

基于动态几何功能的平台，为学生提供了实验探索的环境。学生可以利用其动态作图、动态计算、动态测量，以及编程功能来帮助自己理解概念、启迪思路、探索疑问、检验答案。它可以用形象直观的动态图像表现抽象的定理公式。例如，自己定义函数并让计算机执行，有助于理解函数概念（图 0-6）；通过作图测量观察差商趋于微商（导数）的过程（图 0-7）。

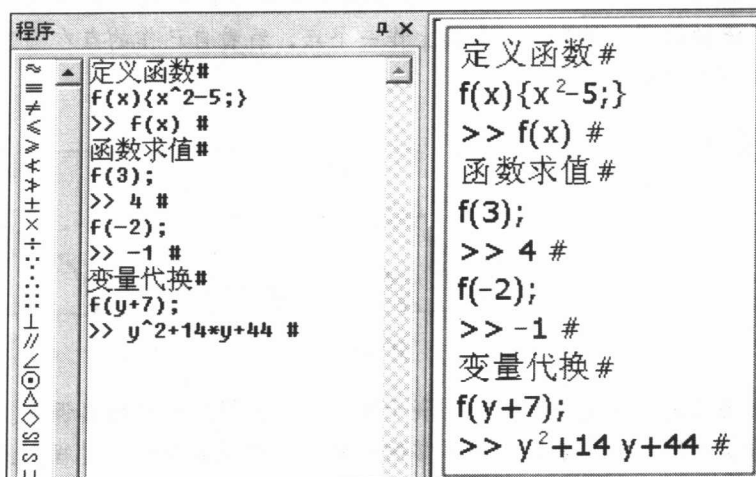


图 0-6

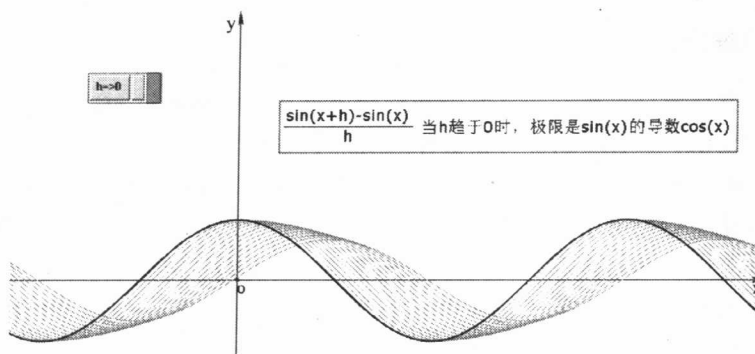


图 0-7

有些历史上著名的实验, 例如, 蒲丰投针算  $\pi$ , 实际上做起来很花时间, 可以用计算机模拟实验 (图 0-8); 有些数学事实, 例如, 正弦级数收敛于矩形波, 很难想像, 也可以作出动态图像观察 (图 0-9)。基于动态几何的平台, 能画、能算、能动、能变、能测, 是实验探索的得心应手的环境。这样的平台, 还可以用来模拟探索物理过程和其他有趣的自然现象, 例如单摆、布朗运动、多普勒效应、混沌与分形等。

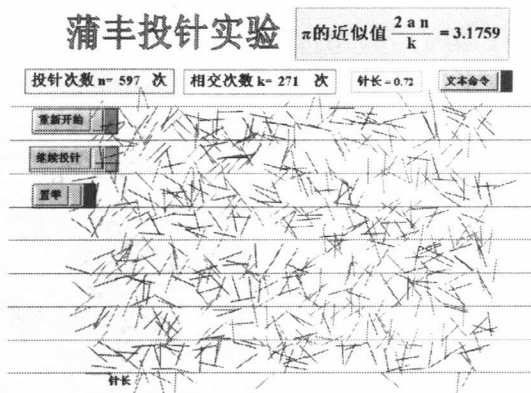


图 0-8

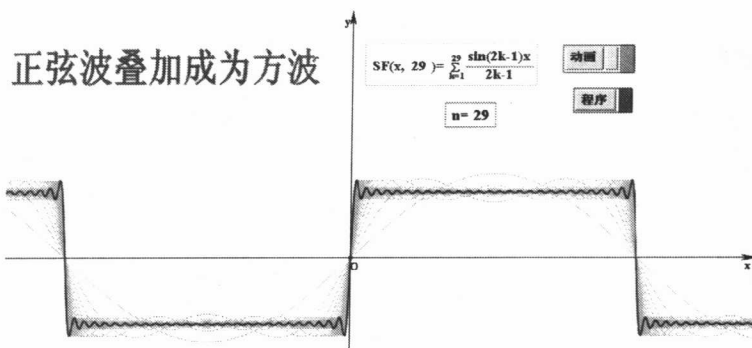


图 0-9

#### 4. 创新思维的触媒

动态几何软件问世以来，已经有大量的学术论文对它的理论和应用进行研究，其中不少是博士学位论文。这些研究涉及数学、计算机科学、科学教育多个方面。一个事物一旦从静态提升到动态，常常会出现新的现象和新问题，会成为创新思维的触发点。例如，以直角坐标系的原点为圆心作圆，圆上取一个点  $P$ ，自  $P$  向两个坐标轴引垂足  $A$  和  $B$ ，作线段  $AB$  和  $AB$  的中点  $M$ 。这是一个平常的几何图形，看不出什么有趣的问题。一旦把图形动态化，就大不相同了。例如，可以问：当点  $P$  在圆周上运动时， $M$  的轨迹是什么曲线？从原点向  $AB$  引垂足  $F$ ， $F$  的轨迹是什么曲线？线段  $AB$  的轨迹是什么样子？如果两条坐标轴的夹角不是直角，上述轨迹如何变化？利用动态几何软件，这些问题的答案立刻可以直观地呈现出来，使人耳目一新，并为进一步的理论探索提供了导向

(图 0-10)。又如，取两个二元函数  $f(x, y)$  和  $g(x, y)$  作迭代 
$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = g(x_n, y_n) \end{cases}$$
，得到

平面上的点列。这些点能构成什么样的图像？过去这类问题几乎无法考虑。有了基于动态几何的平台，可以通过实际作图得到丰富的资料。图 0-11 就是这么一个有趣的例子。

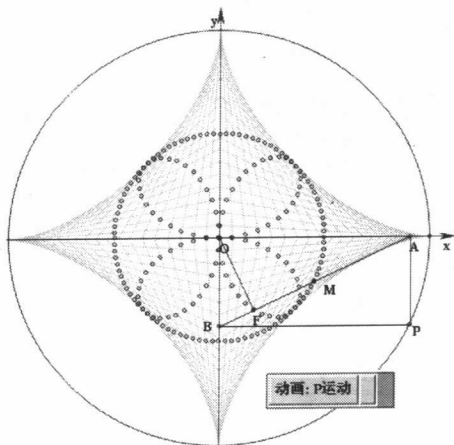


图 0-10

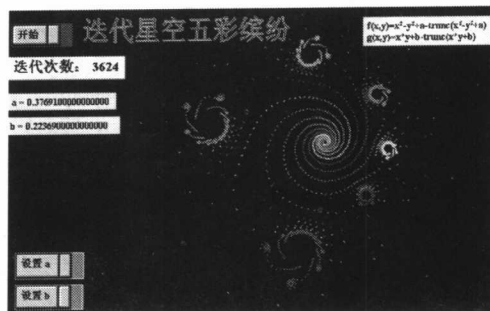


图 0-11

#### 5. 艺术欣赏的园地

在基于动态几何的平台上，运用跟踪、轨迹、变换和迭代等功能，容易创作千变万化的美丽的图案。图 0-11 是一个例子。更有趣的是，可以创作动态的百变艺术作品，一个看来简单的图像，观察者自己调整参数后，可以产生无穷无尽的不同效果。例如，图 0-12 中的平面密铺图，只要拖动左下角的几个关键点，所有的图案都会随着变化，但仍保持密铺。

图 0-13 是一个更有趣的例子。在一个圆上任取 3 个点  $A$ 、 $B$ 、 $C$ ，在线段  $AB$  上取点  $P$ ，再在线段  $PC$  上取点  $Q$  (图 0-13)，当  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三个点在圆上运动时，点  $Q$  的轨迹是什么样子？这个看来如此简单的几何图形，所产生的轨迹出乎意外的丰富多彩！图

0-14 仅仅是从它产生的几百种图案中随手拈来的少许样例。

### 密铺曲线形

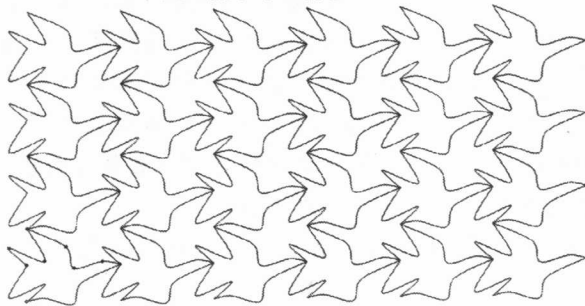


图 0-12

A、B、C 三点在圆上运动时，点 Q 的轨迹的一种

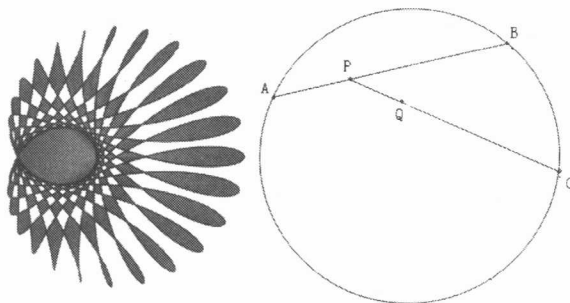


图 0-13

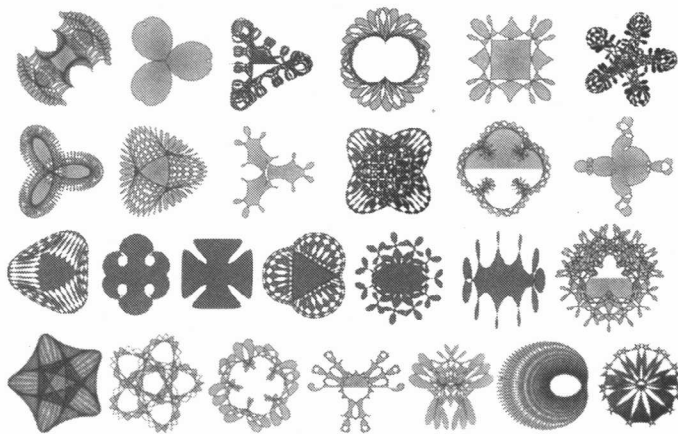


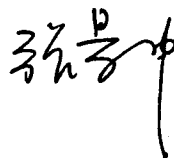
图 0-14

综上所述，动态几何的知识和技能，对学生的自学能力、探索精神、创新意识、科学素质都有积极的影响。学了动态几何，进可以从事有关的学术研究，退可以具备一项有用的信息技术教学技能。动态几何可深可浅，小学生可以学会一些基本的操作而玩得

津津有味，博士生也可以从其中找到挑战性的课题而孜孜以求。动态几何让人兴味浓厚，使人进入后乐此不疲，足以吸引青少年学子从网络游戏回到学术殿堂。

目前，我国已有一些师范院校开设了《几何画板》和《超级画板》课程，其内容涉及动态几何的若干技能。而基于我国自主研发的《超级画板》开设包括动态几何及其发展（动态图形，动态计算，逻辑动漫）的理论和实践应用的《动态几何》课程，在国内外是一个创举。开设《动态几何》课程，对我国的高等教育特别是教师教育，将产生重要的积极影响。有动态几何知识和技能的教师，将成为我国基础教育中稀缺的骨干人才，为我国教育的现代化作出更大贡献。

（注：本书按照规范，变量用斜体，但软件插图屏幕以及程序中显示为正体，无法修改，特此说明。）



2007年7月



# 目 录

## 前言

## 第一章 走马观花

|                  |    |
|------------------|----|
| 一、打开界面看看试试 ..... | 1  |
| 二、智能作图挥洒自如 ..... | 8  |
| 三、文本命令应有尽有 ..... | 14 |
| 四、符号公式即打即现 ..... | 33 |
| 五、测量编程左右逢源 ..... | 37 |
| 小结 .....         | 51 |

## 第二章 平面几何

|                     |    |
|---------------------|----|
| 一、共点的3个圆 .....      | 52 |
| 二、动态几何实例 .....      | 54 |
| 三、模拟尺规作图 .....      | 58 |
| 四、图案设计 .....        | 62 |
| 五、简单课件制作 .....      | 71 |
| 六、平面几何问题的探索方法 ..... | 90 |
| 小结 .....            | 95 |

## 第三章 代数运算

|                   |     |
|-------------------|-----|
| 一、赋值语句和定义函数 ..... | 96  |
| 二、乘幂和代数式的运算 ..... | 101 |

|                   |     |
|-------------------|-----|
| 三、解方程和方程组 .....   | 103 |
| 四、等差数列和等比数列 ..... | 108 |
| 五、复数的运算 .....     | 113 |
| 小结 .....          | 116 |

## 第四章 解析几何

|                     |     |
|---------------------|-----|
| 一、直线的斜率和方程 .....    | 117 |
| 二、椭圆和双曲线的生成 .....   | 121 |
| 三、抛物线的生成 .....      | 125 |
| 四、圆锥曲线随离心率而变化 ..... | 127 |
| 五、圆锥曲线的一般方程 .....   | 129 |
| 六、极坐标和参数方程曲线 .....  | 131 |
| 小结 .....            | 136 |

## 第五章 函数图像

|                        |     |
|------------------------|-----|
| 一、函数图像配合函数表 .....      | 137 |
| 二、基本的初等函数族 .....       | 140 |
| 三、正弦曲线和正切曲线的生成 .....   | 145 |
| 四、分段函数的图像 .....        | 150 |
| 五、函数的导数和定积分 .....      | 153 |
| 六、函数图像的翻转和旋转 .....     | 155 |
| 附录1 函数作图软件的评价和选择 ..... | 158 |
| 小结 .....               | 171 |

## 第六章 概率统计

|                    |     |
|--------------------|-----|
| 一、抛硬币和掷骰子 .....    | 172 |
| 二、模拟投豆和投针实验 .....  | 175 |
| 三、生日相同的概率 .....    | 179 |
| 四、制作画回归直线的模版 ..... | 182 |
| 五、绘制统计图表 .....     | 187 |
| 小结 .....           | 192 |

## 第七章 立体几何

|                     |     |
|---------------------|-----|
| 一、长方体的截面 .....      | 193 |
| 二、圆锥、圆台和圆柱的体积 ..... | 194 |
| 三、空间的曲线 .....       | 201 |
| 四、圆锥的截线和截面 .....    | 212 |
| 小结 .....            | 220 |

## 第八章 算法编程

|                   |     |
|-------------------|-----|
| 一、赋值语句和定义函数 ..... | 221 |
| 二、条件语句 .....      | 224 |
| 三、循环语句 .....      | 227 |
| 小结 .....          | 237 |

## 第九章 经典范例

|                          |     |
|--------------------------|-----|
| 一、线段和圆弧的动态 $n$ 等分点 ..... | 238 |
| 二、动态的正 $n$ 边形和完全图 .....  | 243 |
| 三、文本排列 .....             | 248 |
| 四、轨迹 .....               | 251 |
| 五、动画 .....               | 256 |
| 六、有关 $\pi$ 的几个课件 .....   | 258 |
| 七、曲线的互相转化 .....          | 262 |
| 八、泰勒多项式和三角级数 .....       | 265 |
| 九、更多的例子 .....            | 270 |
| 附录2 关于逻辑动画 .....         | 290 |
| 小结 .....                 | 294 |

## 第十章 问题汇编

|                 |     |
|-----------------|-----|
| 一、菜单灰色的原因 ..... | 295 |
|-----------------|-----|



|                            |     |
|----------------------------|-----|
| 二、如何注册网页控件和增加空白页面 .....    | 296 |
| 三、通过查看网页源文件挖掘更多的文本命令 ..... | 296 |
| 四、程序区与文本作图的区别 .....        | 297 |
| 五、文本 .....                 | 298 |
| 六、点自动命名问题 .....            | 300 |
| 七、自定义功能 .....              | 300 |
| 八、读懂《超级画板》作品的一些技巧 .....    | 301 |
| 九、《超级画板》文本减肥术 .....        | 301 |
| 十、把手的功能 .....              | 301 |
| 十一、放大、缩小两个工具 .....         | 302 |
| 十二、符号函数的定义 .....           | 302 |
| 十三、自定义闪烁 .....             | 303 |
| 十四、《超级画板》中的参数 .....        | 303 |
| 十五、按钮动作详解 .....            | 304 |
| 十六、坐标系 .....               | 306 |
| 十七、样本点和间断点最小值 .....        | 306 |
| 十八、直线与圆锥曲线的交点 .....        | 307 |
| 十九、填充与渐变 .....             | 307 |
| 二十、轨迹与跟踪的区别 .....          | 308 |
| 二十一、轨迹点要是半自由点 .....        | 308 |
| 二十二、动画功能 .....             | 308 |
| 小结 .....                   | 310 |

## 第十一章 课件制作

|                           |     |
|---------------------------|-----|
| 一、多媒体课件的特点 .....          | 311 |
| 二、多媒体课件的评价标准 .....        | 312 |
| 三、为什么选择《超级画板》作数学课件 .....  | 313 |
| 四、课件制作案例——《拼图与勾股定理》 ..... | 315 |

## 附录 《超级画板》注册版的功能

|                    |     |
|--------------------|-----|
| 一、自动搜索和推理 .....    | 322 |
| 二、人工增加图形辅助条件 ..... | 326 |

|            |     |
|------------|-----|
| 参考文献 ..... | 329 |
|------------|-----|