全国高等院校21世纪教学用书

QUANGUOGAODENGYUANXIAO21SHIJIJIAOXUEYONGSHU

# 概率论与数理统计

GaiLüLun

Yu ShuLi TongJi

◆主　编　杨晓平

◆副主编　李长青

北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

全国高等院校21世纪教学用书

# 概率论与数理统计

主　编　杨晓平
副主编　李长青

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

## 内 容 简 介

本书分为两部分，第一部分为概率论，内容包括随机事件和概率，随机变量及其分布，多维随机变量及其分布，随机变量的数字特征，大数定律与中心极限定理。第二部分为数理统计，内容包括抽样分布，参数估计，假设检验，方差分析和一元回归分析。每章末附有一定数量的练习题。书后附有习题参考答案。

本书可作为高等院校非数学专业的理工科类概率论与数理统计课程的教材。也可供相关专业技术人员自学参考。



**图书在版编目（CIP）数据**

概率论与数理统计/杨晓平主编. —北京：北京理工大学出版社，2007.8

全国高等院校 21 世纪教学用书

ISBN 978-7-5640-1172-7

Ⅰ. 概…　Ⅱ. 杨…　Ⅲ. ①概率论-高等学校-教材 ②数理统计-高等学校-教材　Ⅳ. O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 114411 号

出版发行 / 北京理工大学出版社
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(办公室) 68944990(批销中心) 68911084(读者服务部)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京国马印刷厂
开　　本 / 787 毫米×960 毫米　1/16
印　　张 / 12
字　　数 / 246 千字
版　　次 / 2007 年 8 月第 1 版　2007 年 8 月第 1 次印刷
印　　数 / 1～5000 册　　责任校对 / 陈玉梅
定　　价 / 18.00 元　　责任印制 / 李绍英

# 前　言

概率论与数理统计是研究随机现象规律的一门数学学科．它在自然科学及社会科学的各个方面有着极其广泛的应用．

近几年来，我国高等教育迅速发展，规模扩大，大学本科教育已走向大众化教育。在教学过程中，我们觉得原有的经典教材理论性强，比较抽象，不易被理解接受，给教学带来了一定的困难。为此我们编写了本教材。编写中，我们在教学实践的基础上，参考了许多大学本科同类教材，汲取和借鉴了其中的先进经验。在保证理论体系完整的前提下，去掉一些烦琐的证明过程，降低教材难度。同时，选择一些通俗易懂的例子和内容，以便更好地理解基本概念，掌握基本方法。取材上，力求联系理工科专业的实际需要，注重培养基本运算能力。

全书分两部分。第一部分概率论，由杨晓平负责编写；第二部分数理统计，由李长青负责编写。全书由杨晓平统稿。曹金亮、陈丽燕、李同军、卢海玲、沈最意、王廷、张野芳、朱玉辉等数学系相关教师积极协助参与。吴伟志教授审阅了本书初稿，并提出了非常宝贵的修改意见。此外，本教材从立项到出版自始至终得到浙江海洋学院教务处和数理与信息学院领导的大力支持，在此一并表示衷心的感谢．

限于编者的水平，书中还有不妥之处，恳请读者批评指正．

编　者

# 目　录

# 第一章　概率论的基本概念

自然界所发生的现象是各种各样的. 我们可以把它们归纳为两大类现象: 一类是确定性现象，另一类是不确定性现象. 所谓确定性现象，是在一定条件下必然发生的现象. 例如，向上抛一颗石子最后必然下落，同性电荷必然不相互吸引，早上的太阳必然从东方升起等等. 而不确定性现象在一定条件下是无法确定结果的. 例如，掷一枚骰子，不知道会出现什么点数. 抛一枚硬币，无法确定出现哪一面. 自然界中不确定性现象是大量存在的，概率论主要研究不确定性现象，并对这种现象发生的可能性的大小给出一定的度量方式及其算法.

## §1.1　随 机 试 验

在一定条件下，可能产生也可能不产生的现象称为随机现象. 从表面上看，随机现象具有不确定性，好像没有规律可循. 但在做出大量重复观察或试验后，这些现象会呈现出一定的规律，我们称之为统计规律. 例如抛硬币试验，在一次试验中，确实无法预料会产生什么结果，但在大量的重复试验中，我们会得到正反面出现的次数大致相等，正反面出现的次数之比接近于 1 的规律. 历史上有许多学者亲自做过这个试验. 例如，蒲丰等人将一枚硬币反复抛掷，观察出现正、反面的出现次数. 其试验数据见表 1.1.

**表 1.1**

| 试验者 | 抛掷次数 | 正面出现次数 | 正面出现频率* |
|---|---|---|---|
| 蒲　丰 | 4 040 | 2 048 | 0.506 9 |
| 费希尔 | 10 000 | 4 979 | 0.497 9 |
| 皮尔逊 | 24 000 | 12 012 | 0.500 5 |

从表 1.1 中的数据可知，当抛掷的次数越来越多时，频率越来越集中于 0.5. 为了更好地研究随机现象，我们给出概率论中随机试验的定义.

**定义 1.1**　将满足下列条件的试验称为**随机试验**:

(1) 试验可以在相同的条件下重复进行;

* 这里的频率 = 正面的次数/抛掷次数，频率的概念将在 § 1.3 详述.

（2）试验的可能结果不止一个，而且所有的可能结果是明确可知的;

（3）每次试验总是出现这些可能结果中的一个，但在每一次试验前无法肯定会出现哪一个结果.

随机试验简称**试验**，常用字母 $E$，$E_1$，$E_2$，…表示. 下面举一些试验的例子.

$E_1$：将一枚硬币抛掷两次，观察正面 $H$，反面 $T$ 出现的情况.

$E_2$：掷一枚骰子，观察出现的点数.

$E_3$：观察某电话交换台在某一时间间隔内收到的呼唤次数.

$E_4$：从一批灯泡中，任取一只，测试其寿命.

上述的例子都具有定义 1.1 的特点.

## §1.2 样本空间与随机事件

对于随机试验，尽管在每次试验之前不知道试验的结果是什么，但是所有的可能结果是已知的. 我们将随机试验 $E$ 的所有可能结果组成的集合称为**样本空间**，记为 $S$. 样本空间的元素，即 $E$ 的每个结果，称为**样本点**. 对应 §1.1 中的试验 $E_k$ 可以写出相应的样本空间 $S_k$ .

$S_1$：$\{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$

$S_2$：$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$S_3$：$\{0, 1, 2, 3, \cdots\}$

$S_4$：$\{t \mid t \geqslant 0\}$

样本空间可以是有限集或无限集，它有以下三种类型.

（1）有限集合：样本空间中的样本点数是有限的. 如 $S_1$ 和 $S_2$.

（2）无限可列集合：样本空间中的样本点数是无限的，但可列出，如 $S_3$.

（3）无限不可列集合：样本空间中的样本点数是无限的，且不可列，如 $S_4$.

在实践中，人们常常需要研究由样本空间中满足某些条件的样本点组成的集合，即关心满足某些条件的样本点在试验中是否会出现. 比如，考虑抛出的骰子出现的点数是否为偶数. 这些偶数包括 2，4，6，它们是样本空间的一个子集. 我们把样本空间的子集称为**随机事件**，简称为**事件**，通常用大写字母 $A$，$B$，$C$，…来表示. 若试验后的结果出现在 $A$ 中，则称事件 $A$ **发生**，否则称 $A$ **不发生**. 只含有一个样本点的事件叫**基本事件**，比如出现点数 2 这个事件就是一个基本事件.

样本空间 $S$ 也可以作为本身的子集，它包含了所有的基本事件，因此作为事件，无论试验结果如何，它必然会发生，称为**必然事件**. 另外，空集 $\varnothing$ 也可以作为 $S$ 的子集，它不包含任何元素，无论试验结果如何，它都不会发生，称它为**不可能事件**. 必然事件和不可能事件已经失去了它的不确定性，本来已不

属于讨论的范围，但为了集合处理上的方便和完整，也把它们称为事件，正如把常量作为变量的特殊情况一样.

事件之间的关系及运算：

（1）事件的包含与相等．若事件 $A$ 的发生必然导致事件 $B$ 的发生，即 $A$ 中的样本点都属于 $B$，则记为 $A\subset B$．若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称 $A$ 与 $B$ 相等，记为 $A=B$.

（2）事件 $A$ 和事件 $B$ 至少有一个发生，记为 $A\cup B$，称为 $A$ 与 $B$ 的和（并）．它是由 $A$ 与 $B$ 中的所有样本点构成的集合.

一般地，$n$ 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和事件记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$，可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 的和事件记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$，它们都表示所列事件中至少有一个发生.

（3）事件 $A$ 和 $B$ 同时发生，记为 $A\cap B$，也简记为 $AB$，称为事件的积（交），它是由事件 $A$ 和 $B$ 中公共的样本点构成的集合.

一般地，$n$ 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积事件记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$，可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 的积事件记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$，它们都表示所列的事件同时发生.

（4）事件 $A$ 发生而事件 $B$ 不发生，记为 $A-B$，称为 $A$ 和 $B$ 的差．它是由集合 $A$ 中去掉属于 $B$ 的元素后剩余的点组成的集合.

（5）若事件 $A$ 和 $B$ 不能同时发生，即 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 $A$ 和 $B$ 互不相容.

（6）设事件 $A$ 和 $B$ 互不相容，且 $A\cup B=S$，则称事件 $A$ 和 $B$ 为对立事件，也称事件 $A$ 和 $B$ 为互逆事件．这时 $B$ 称为 $A$ 的逆事件，记为 $\bar{A}$.

上述六种运算可分别用图 1–1～图 1–6 来表示.

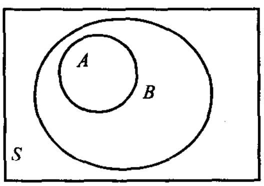


图 1–1　$A\subset B$

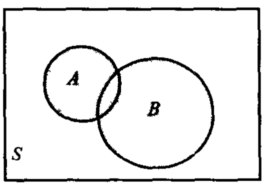


图 1–2　$A\cup B$

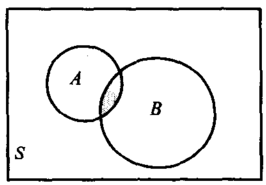


图 1–3　$A\cap B$

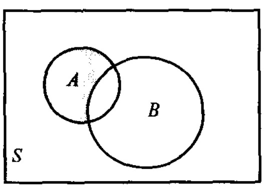


图 1–4　$A-B$

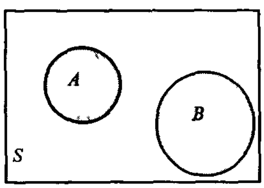


图 1–5　$AB=\varnothing$

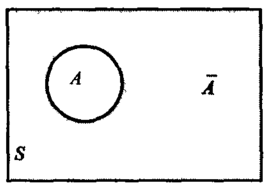


图 1–6　$\bar{A}$

事件的运算符合以下的运算律：

（1）交换律　$A\cup B=B\cup A$; $A\cap B=B\cap A$.

（2）结合律　$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$;
$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

（3）分配律　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;
$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

（4）德・摩根律　$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$;
$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$.

对于任意多个事件，有 $\overline{\bigcup\limits_i A_i}=\bigcap\limits_i\overline{A_i}$; $\overline{\bigcap\limits_i A_i}=\bigcup\limits_i\overline{A_i}$.

**例 1.1**　掷一枚骰子，观察其出现的点数．记事件 $A$ 表示“出现奇数点”，事件 $B$ 表示出现“点数小于 5”，事件 $C$ 表示“大于 3 的偶数点”，试用集合表示下列事件：$A\cup B$，$AB$，$A-B$，$\overline{C}$．

**解**　样本空间 $S=\{1,2,3,4,5,6\}$，$A=\{1,3,5\}$，$B=\{1,2,3,4\}$，$C=\{4,6\}$，所以

$$A\cup B=\{1,3,5\}\cup\{1,2,3,4\}=\{1,2,3,4,5\};$$

$$AB=\{1,3,5\}\cap\{1,2,3,4\}=\{1,3\};$$

$$A-B=\{5\};$$

$$\overline{C}=\{1,2,3,5\}.$$

## §1.3　频率与概率

一个随机试验的可能结果不止一个，我们最关心的是某个结果出现的可能性的大小.用以度量事件 $A$ 发生可能性大小的数值，称为 $A$ 的**概率**，记为 $P(A)$.为讨论事件 $A$ 的概率，我们首先引入频率的概念.

**定义 1.2**　在相同的条件下，进行了 $n$ 次试验，事件 $A$ 发生了 $n_A$ 次，称比值 $n_A/n$ 为事件 $A$ 发生的**频率**，记成 $f_n(A)$.

显然，频率具有下列性质：

（1）非负性：对任意事件 $A$，$f_n(A)\geqslant 0$；

（2）规范性：$f_n(S)=1$；

（3）可加性：对任意有限个互不相容事件，$A_1, A_2, \cdots, A_k$，有

$$f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_k).$$

例如，将一枚硬币抛 100 次，若正面出现了 51 次，就说“正面朝上”这一事件在这 100 次试验中发生的频率为 51/100．若将这枚硬币再抛 100 次，正面出现了 48 次，就说“正面朝上”这一事件在这 100 次试验中发生的频率为 48/100．有人做过这方面的试验．具体情况见表 1.1.

可以看出，当投掷硬币次数充分大时，“正面朝上”的频率在 0.5 这个数值的附近摆动，而且随着试验次数的增加，摆动的幅度越来越小．

频率反映了事件 $A$ 发生的频繁程度，它在一定程度上反映了事件发生的可能性大小．由于一个事件的频率往往随着试验的具体情况不同而变化．而一个事件发生的可能性大小应该是一个客观存在的常数，不会因为试验的重复次数或做试验的人等不同的情况而改变．因此用频率来刻画事件发生的可能性是不合适的，并且对每个事件都做大量的试验，也是不现实的．于是，引入概率的公理化定义．

**定义 1.3**　设 $E$ 为随机试验，$S$ 是它的样本空间．对于 $E$ 的每一个事件 $A$ 赋予一个实数，记为 $P(A)$，称为事件 $A$ 的**概率**，如果集合函数 $P(\cdot)$满足下列条件：

（1）非负性：对于每一个事件 $A$，有 $P(A)\geqslant 0$；

（2）规范性：对于必然事件 $S$，有 $P(S)=1$；

（3）可列可加性：设 $A_1, A_2, \cdots,$ 是两两互不相容的事件，即对于 $i\neq j$，$A_iA_j=\varnothing, i,j=1,2,\cdots$，则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+\cdots.$$

由概率的上述三条公理，可以推出概率的一些基本性质如下：

（1）$P(\varnothing)=0$.

（2）设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容的事件，即对于 $i\neq j, A_iA_j=\varnothing, i,j=1,2,\cdots,n$，则有 $P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$.

（3）对于任一事件 $A$，有 $P(\overline{A})=1-P(A)$.

（4）若 $B\subset A$，则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$，且有 $P(A)\geqslant P(B)$.

（5）（加法公式）　对于任意两事件 $A,B$，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB). \tag{1.1}$$

这里只证明（5），其余读者可以作为练习自己证明．

**证**　因为 $A\cup B=A\cup(B-A)=A\cup(B-AB)$，$A$ 与 $B-AB$ 互不相容．又 $B\supseteq AB$，所以　$P(B-AB)=P(B)-P(AB)$

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A\cup(B-A))=P(A\cup(B-AB))\\&=P(A)+P(B-AB)=P(A)+P(B)-P(AB).\end{aligned}$$

加法定理可推广到 $n$ 个事件的并事件，即

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots$$
$$+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

## §1.4 等可能概型（古典概型）

现在来讨论一种特殊的试验类型，称为等可能概型（**古典概型**）. 它满足以下两个条件：

（1）试验的基本结果只有有限个；

（2）每个基本事件出现的可能性相同.

设 $S$ 是只含有 $n$ 个基本事件的古典概型，$A$ 是由 $n_A$ 个基本事件组成的随机事件，则 $A$ 发生的概率计算公式为：

$$P(A)=\frac{A\text{中所含样本点数}}{S\text{中样本点总数}}=\frac{n_A}{n}. \tag{1.2}$$

**例 1.2** 将一枚硬币抛掷三次.（1）设事件 $A_1$ 为“恰有一次出现正面”，求 $P(A_1)$；（2）设事件 $A_2$ 为“至少有一次出现正面”，求 $P(A_2)$.

**解** （1）记 $H$ 表示出现正面，$T$ 表示出现反面，则样本空间可表示为

$$S=\{HHH,HHT,HTH,THH,HTT,THT,TTH,TTT\}.$$

$$A_1=\{HTT,THT,TTH\}.$$

显然，样本空间符合等可能概型，由计算公式立即可得：$P(A_1)=\dfrac{3}{8}$；

（2）由于 $\overline{A_2}=\{TTT\}$，于是 $P(A_2)=1-P(\overline{A_2})=1-\dfrac{1}{8}=\dfrac{7}{8}$.

在计算中，由于研究对象的复杂性，需要有一定的技巧. 其中，排列、组合的知识是不可缺少的. 另外也涉及两条重要计数规则：

（1）**加法原理**：设事件 $A$ 有 $n$ 类方法出现，若第 $i$ 类方法包含 $m_i$ 种方法，那么 $A$ 一共有 $m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种方法出现；

（2）**乘法原理**：设事件 $A$ 有 $n$ 种不同的方法出现，以后另一事件 $B$ 对每一种 $A$ 的出现方法又有 $m$ 种不同的方法出现，则事件 $AB$ 有 $nm$ 种不同方法出现.

这两条规则应用在不同的环境，在实际应用中不可混淆.

在计算古典概率时，所使用的基本工具是排列组合计算法，所使用的模型是“摸球”模型. 以下我们分别举例说明.

### 一、样本空间点数以排列计算

设一袋中有 $n$ 个编好号码的小球，从中抽取 $r$ 次，每次取一球. 抽取方法分两种：

（1）有放回抽取，即每次取出一球记下号码后放回袋中，混合后再进行下次抽取．这时样本点总数为 $n^r$ 个．

（2）不放回抽取，即每次取出一球后不再放回又抽取下一球．样本点总数为 $P_n^r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$．

显然，前一种抽取时，$r$ 可以大于 $n$；而后一种抽取时有 $r \leqslant n$．

**例 1.3**　一口袋装有 6 只球，其中 4 只白球、2 只红球，从袋中取球两次，每次随机地取一只．考虑两种取球方式：（a）放回抽样；（b）不放回抽样．试分别就上面两种情况求：

（1）取到的两只球都是白球的概率；

（2）取到的两只球颜色相同的概率；

（3）取到的两只球中至少有一只是白球的概率．

**解**　（a）放回抽样的情况：

设 $A, B, C$ 分别表示事件"取到的两只球都是白球"、"取到的两只球都是红球"、"取到的两只球中至少有一只是白球"．

第一次取球时，口袋里有 6 只球，所以有 6 种取法．第二次取球时袋中还是 6 只球，所以也有 6 种取法．因此根据乘法原理，取到 2 只球所有的取球方式共有 $6\times6=36$ 种．为了保证两个球都是白球，第一次、第二次取球时必须取到白球．第一次有 4 只白球，所以有 4 种取法，第二次也有 4 只白球，所以也有 4 种取法．因此根据乘法原理取到 2 只白球的取法共有 $4\times4=16$ 种．这样样本空间 $S$ 中的元素共有 36 个，$A$ 中包含的元素共有 16 个．按照计算公式可得：

$$P(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{4\times4}{6\times6} = \frac{4}{9}.$$

同理可得

$$P(B) = \frac{n_B}{n} = \frac{2\times2}{6\times6} = \frac{1}{9}.$$

"取到的两只球颜色相同"相当于"或者取到两个白球或者取到两个红球"，可用事件 $A\cup B$ 表示，由 $AB=\varnothing$，于是

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} - 0 = \frac{5}{9}.$$

"取到的两只球中至少有一只是白球"这一事件的对立事件是"取到的两只球没有一只是白球"，或者说"取到的两只球都是红球"，因此有 $C = \overline{B}$，所以

$$P(C) = P(\overline{B}) = 1 - P(B) = \frac{8}{9}.$$

（b）不放回抽样的情况是类似的，不再赘述，这里只给出简要算式和结果．

$$P(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{4\times3}{6\times5} = \frac{2}{5}.$$

$$P(B) = \frac{n_B}{n} = \frac{2\times1}{6\times5} = \frac{1}{15}.$$

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{2}{5}+\frac{1}{15}-0=\frac{7}{15}.$$

$$P(C)=P(\overline{B})=1-P(B)=\frac{14}{15}.$$

**二、样本空间点数以组合计算**

**例 1.4** 一袋中装有 $N$ 个小球，其中 $m$ 个红球，余下为白球. 从袋中任取出 $n$（$n \leqslant N$）个小球，问恰有 $k$（$k \leqslant m$）个红球的概率是多少？

**解** 这个模型不要求顺序，可用组合式来计算. 所有可能的取法共有 $C_N^n$ 种，设 $A$ 表示"取得的 $n$ 个球中有 $k$ 个是红球"，这 $k$ 个红球是从 $m$ 只红球中选出的，剩下的 $n-k$ 个白球是从 $N-m$ 个白球中选出的. 它们各自的组合是 $C_m^k$ 和 $C_{N-m}^{n-k}$，其概率为 $P(A)=\dfrac{C_m^k C_{N-m}^{n-k}}{C_N^n}$.

## §1.5 条件概率

在概率论中，经常要考虑在随机事件 $A$ 发生的前提下，发生事件 $B$ 的概率. 我们记为 $P(B|A)$，它与事件 $B$ 发生的概率 $P(B)$是不相同的.

**例 1.5** 某产品共有 10 件，其中 3 件为次品，其余为正品，作不放回抽样，从中任取两次，一次抽取一件. 若第一次取得的是次品，问第二次仍然取到次品的概率是多少？

**解** 令 $A$={第一次取得次品}，$B$={第二次取得次品}，需求 $P(B|A)$. 因第一次取得了次品，产品剩 9 件，其中只有 2 件次品，从而 $P(B|A)=\dfrac{2}{9}$，显然，$P(A)=P(B)=\dfrac{3}{10}$，它与 $P(B|A)=\dfrac{2}{9}$ 是不同的.

从上述例子中，可以看出，$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ 是成立的. 对于一般的古典问题，该式也是成立的. 以后就把它作为条件概率的定义.

**定义 1.4** 设 $A$，$B$ 是两个事件，且 $P(A)>0$，称

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)} \tag{1.3}$$

为在事件 $A$ 发生的条件下发生事件 $B$ 的**条件概率**.

上例在计算时也可以在原样本空间中计算，由于

$$P(A)=\frac{3}{10},\quad P(AB)=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}=\frac{1}{15}.$$

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1/15}{3/10}=\frac{2}{9}.$$

条件概率 $P(\cdot|A)$ 符合下列三条公理：

（1）非负性：对于每一事件 $B$，有 $P(B|A)\geqslant 0$；

（2）规范性：对于必然事件 $S$，有 $P(S|A)=0$；

（3）可列可加性：设 $B_1$，$B_2$，…，是两两互不相容的事件，则有

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i|A)=\sum_{i=1}^{\infty}P(B_i|A).$$

原来的概率性质对条件概率仍然适用，如 $P(\bar{A}|B)=1-P(A|B)$.

条件概率在解决实际问题时十分有用.

**例 1.6**　设某地区历史上从某次特大洪水发生以后在 30 年内发生特大洪水的概率为 80%，在 40 年内发生特大洪水的概率为 85%，问现已无特大洪水过去了 30 年内的该地区，在未来 10 年内将发生特大洪水的概率是多少？

**解**　设 $A$={该地区从某次特大洪水发生后 30 年内无特大洪水}，$B$={该地区从某次特大洪水发生后 40 年内无特大洪水}，则所求概率为 $P(\bar{B}|A)$，由于 $AB=B$，由条件概率的计算公式，有

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{0.15}{0.2}=0.75.$$

再由条件概率的性质，可知

$$P(\bar{B}|A)=1-P(B|A)=1-0.75=0.25.$$

条件概率从计算方法上有两种，一种是从定义公式出发来做（例 1.6），另一种是从缩减的样本空间来做（例 1.5）. 可根据具体情况来选择.

**乘法公式**：由条件概率的定义，可以得到一个极有用的公式，这就是概率的乘法公式：

设 $P(A)>0$，由条件概率的定义式 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ 可得

$$P(AB)=P(A)P(B|A)\text{，或者 }P(AB)=P(B)P(A|B). \tag{1.4}$$

乘法公式可以推广到多个事件的积事件的情况. 例如，设 $A_1$，$A_2$，$A_3$ 为三个事件，则

$$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2).$$

一般地，若 $A_1$，$A_2$，…，$A_n$ 为 $n$ 个事件，则

$$P(A_1A_2A_3\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2A_3\cdots A_{n-1})$$

**例 1.7**　设袋中装有 $r$ 只红球，$w$ 只白球，每次自袋中任取一只球，观察其颜色然后放回，并再放入 $a$ 只与刚才取出的那只球同色的球. 若在袋中连续取

球 4 次，试求第 1、2 次取到红球且第 3、4 次取到白球的概率．

**解** 以 $A_i$（$i=1,2,3,4$）表示事件“第 $i$ 次取到红球”，则 $\overline{A_3}$、$\overline{A_4}$ 分别表示事件“第 3、4 次取到白球”．所求概率为

$$P(A_1A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4})=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(\overline{A_3}\mid A_1A_2)P(\overline{A_4}\mid A_1A_2\overline{A_3})$$
$$=\frac{r}{r+w}\times\frac{r+a}{r+w+a}\times\frac{w}{r+w+2a}\times\frac{w+a}{r+w+3a}.$$

对于一个比较复杂的事件，求它的概率比较困难．如果把整个样本空间划分成互不相交的若干个子集的并，在每个子集中去求该复杂事件落入该子集的部分概率，然后利用概率的可加性，得到整个复杂事件的概率，往往比较简洁．

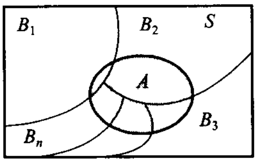


图 1–7

**定义 1.5** 设 $S$ 为样本空间，若存在一组两两不相交的子集 $B_1, B_2,\cdots, B_n$，$B_i\cap B_j=\varnothing,(i\neq j)$，使 $S=B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n$，则称 $B_1, B_2,\cdots, B_n$ 为 $S$ 的一个划分．见图 1–7．

**定理 1.1（全概率公式）** 设样本空间 $S$ 的一个划分为 $B_1,B_2,\cdots,B_n$，且 $P(B_i)>0$，$i=1,2,\cdots,n$．则对任一事件 $A\subset S$，有

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(AB_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A\mid B_i)P(B_i). \qquad (1.5)$$

应用全概率公式时应对样本空间引入适当的划分，且在该划分下利用概率的乘法公式求出每一个 $P(AB_i)$，$i=1,2,\cdots,n$，然后相加．

**例 1.8** 袋中有 $a$ 个黑球，$b$ 个白球，现随机地把球一个一个地摸出来（不放回）．求：

（1）第 1 次摸到黑球的概率；

（2）第 2 次摸到黑球的概率；

（3）第 $k$ 次摸到黑球的概率，$1\leqslant k\leqslant a+b$．

**解** 设 $A_i$ 为第 $i$ 次摸到黑球．显然，$P(A_1)=\dfrac{a}{a+b}$；$A_2=A_1A_2\cup\overline{A_1}A_2$，两事件互不相容，用全概率公式

$$P(A_2)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)+P(\overline{A_1})P(A_2\mid\overline{A_1})$$
$$=\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a-1}{a+b-1}+\frac{b}{a+b}\cdot\frac{a}{a+b-1}=\frac{a}{a+b};$$

第 $k$ 次摸到黑球的事件记为 $A_k$，把所有的球都摸完看作一个排列，共有 $(a+b)!$ 种排列方法．而其中第 $k$ 次摸到黑球的排列方法共有 $a\cdot(a+b-1)!$ 种．则概率

$$P(A_k)=\frac{a\cdot(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}.$$