二十一世纪全国高职高专规划教材

高等数学(下)

(经管类)

主编　和慧民　尹红　亓正申

华东师范大学出版社

二十一世纪全国高职高专规划教材

高等数学(下)

(经管类)

主　编　和慧民　尹　红　亓正申
副主编　刘　文　丁焕常　张学凌
　　　　方建印
编　委　王鸿燕　朱广恩　秦敏雁
　　　　施培成

华东师范大学出版社

前　言

本书是21世纪全国高等教育规划教材，是根据教育部制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》和中国职业技术教育学会数学教学研究会(高职高专)研讨确定的经管类专业数学的内容体系，在认真总结近几年来高职高专数学教改经验的基础上，结合对有关教材发展趋势的分析，并参考国内流行的有关教材，力图吸收其优点，且使之满足高职高专教育“以应用为目的，以必须够用为度”的原则，编写而成的特色教材.

本书适用于三年制高职高专经济及管理类各专业学生学习.内容包括一元函数微积分、线性代数和概率与统计基础等内容.建议总学时安排132学时为宜(带＊号的内容可根据学时数选学).

本课程是三年制高职高专经济和管理类专业的必修基础课，故其内容切实联系此类学生学习现代经济和管理理论的基本需要，在保持数学学科的科学性和系统性的基础上，补充一定数量的经济类应用题，使学生了解该课程与所学专业的密切联系，进而体现“以应用为目的，以必须够用为度”的原则.

为适应经济和管理类专业学生大部分数学知识基础薄弱的实际情况和教学需要，本教材适当配置了一些典型的例题和习题，对学生掌握相关理论方法会有帮助作用，教师可根据教学实际情况布置.

本教材分上下两册共十二章，分别由和慧民、尹红、亓正申、刘文、丁焕常、张学凌、方建印、王鸿燕、朱广恩、秦敏雁、施培成等编写.全书的框架安排、统稿、定稿由和慧民承担，具体分工如下：和慧民(第一章、第七章)，尹红(第三章、第十章)，亓正申(第四章、总复习自测题(上册))，刘文(第五章、附录(上册))，丁焕常(第二章、总复习自测题(下册))，张学凌(第六章、第九章)，方建印、王鸿燕(第八章、第十一章)，朱广恩、秦敏雁、施培成(第十二章、同步强化练习参考答案(上、下册)、附录(下册)).

本书的编写和出版，得到了华东师范大学出版社的大力支持。一审肖启华老师提出了许多宝贵的建议，由于时间仓促，加上经验不足，书中难免有疏漏之处，恳请广大师生批评指正，使之能更加日臻完善，笔者将不胜感激.

编　者

目　录

第二篇　线性代数

第三篇　概率论与数理统计

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第二篇 线性代数

第七章 行 列 式

在生产经营管理活动和科学技术中，我们常常会遇到由很多个一次方程组成的线性方程组，常需要求解多元未知数的线性方程组，为了简化表达和求解，就要用到新的数学工具——矩阵代数，由于矩阵代数与行列式密切相关，所以先从行列式讨论. 本章在复习二阶、三阶行列式的基础上，进一步讨论 n 阶行列式的定义、性质和计算，以及解 n 元线性方程组的克莱姆法则 .

第一节 行列式的定义

一、二阶、三阶行列式

读者在初等数学中已通过解二元、三元线性方程组引出了二阶、三阶行列式的定义 . 在此，我们再进行简单的复习 .

(一)二阶行列式

我们用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，称为二阶行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{7.1}$$

二阶行列式表示的代数和，可以用画线(图 7－1)的方法记忆，即实线联结的两个元素的乘积减去虚线联结的两个元素的乘积.

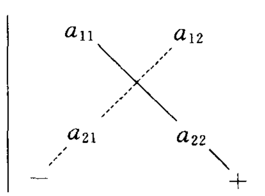

图 7－1

【例 1】 $\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5\times 2-(-1)\times 3=13$

【例 2】 设 $D=\begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$

问:(1)当 λ 为何值时 $D=0$,

(2)当 λ 为何值时 $D\neq 0$.

【解】

$$D=\begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=\lambda^2-3\lambda$$

$\lambda^2-3\lambda=0$,则 $\lambda=0,\lambda=3$.

因此可得

(1)当 $\lambda=0$ 或 $\lambda=3$ 时 $D=0$,

(2)当 $\lambda\neq 0$ 且 $\lambda\neq 3$ 时 $D\neq 0$.

(二)三阶行列式

我们用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

表示代数和

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

称为三阶行列式,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \tag{7.2}$$

三阶行列式表示的代数和,也可以用画线(图 7－2)的方法记忆,其中各实线联结的三个元素的乘积是代数和中的正项,各虚线联结的三个元素的乘积是代数和中的负项.

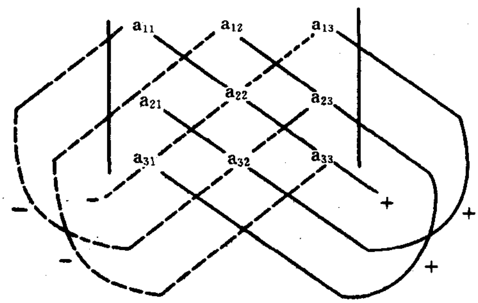

图 7—2

【例 3】 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 1\times0\times6+2\times5\times(-1)+3\times4\times0$
$-1\times5\times0-2\times4\times6-3\times0\times(-1)$
$=-10-48=-58$

【例 4】 a,b 满足什么条件时有

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$$

【解】 $\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=a^2+b^2$

若要 $a^2+b^2=0$，则 a 与 b 须同时等于零. 因此，当 $a=0$ 且 $b=0$ 时，给定行列式等于零.

【例 5】 $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}>0$ 的充分必要条件是什么?

【解】 $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}=a^2-1$

$$a^2-1>0\Leftrightarrow|a|>1$$

因此可得

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}>0 \text{ 的充分必要条件是} |a|>1.$$

二、n 阶行列式定义

由前面的二阶和三阶行列式的定义可得到：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22})$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

这里称$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$为 D 的 a_{11},a_{12},a_{13} 的余子式，记为 M_{11},M_{12},M_{13} 它们分别是 D 中划掉该元素所在的行和列所剩的元素构成的二阶行列式，如果记

$A_{11}=(-1)^{1+1}M\,11,A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12},A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}$

则 $D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$

(7.1)式可写为$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}$

由此给出 n 阶行列式定义

定义 7.1：由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2\cdots n)$ 组成的一个算式，用符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

表示，称为 n 阶行列式，简称行列式，记为 D，a_{ij} 为 D 的第 i 行第 j 列的元素$(i,j=1,2,\cdots,n)$

在 n 阶行列式中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行与第 j 列，剩下的$(n-1)^2$ 个元素按原来的排法构成一个 $n-1$ 阶的行列式称为元素 a_{ij} 的余子式. 记作 M_{ij}，同时称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式.

设 $n-1$ 阶行列式已定义，则 n 阶行列式

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j} \tag{7.3}$$

其中 A_{1j} 为元素 a_{1j} 的代数余子式$(j=1,2,\cdots,n)$.

【例 6】 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -5 \end{vmatrix}$

【解】 $D=2\cdot\begin{vmatrix}4&2\\1&-5\end{vmatrix}-(-1)\cdot\begin{vmatrix}0&2\\1&-5\end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix}0&4\\1&1\end{vmatrix}$

$=2(-20-2)+(0-2)+3(0-4)$

$=-44-2-12$

$=-58$

【例 7】 写出四阶行列式

$\begin{vmatrix}1&5&-1&4\\0&4&7&1\\-1&2&3&10\\0&0&2&2\end{vmatrix}$ 的元素 a_{34} 的余子式和代数余子式.

【解】 元素 a_{34} 的余子式为划去第三行和第四列后,剩下元素按原来顺序组成的三阶行列式,而元素 a_{34} 的代数余子式为余子式 M_{34} 前面加一个符号因子,即

$$M_{34}=\begin{vmatrix}1&5&-1\\0&4&7\\0&0&2\end{vmatrix}$$

$$A_{34}=(-1)^{3+4}M_{34}=-\begin{vmatrix}1&5&-1\\0&4&7\\0&0&2\end{vmatrix}$$

定义 7.1 中(7.3)式是 n 阶行列式 D 按第一行的展开式子,通过二阶:2 个乘积项,三阶:6 个乘积项,可以推知 n 阶行列式的展开式中共存 $n!$ 个乘积项,每个乘积项中含有 n 个取自不同行、不同列的元素,并且带正号与负号的项各占一半.

行列式从左上角到右下角的对角线称为行列式的主对角线,从右上角到左下角的对角线称为行列式的次对角线.

形如下列形式的行列式分别称为 n 阶对角形行列式和 n 阶下三角形行列式,由定义 7.1 可知,它们的值都是主对角线上元素的乘积.

$$\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\0&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

$$\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

【例 8】 计算下列行列式:

(1) $D_1=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} \\ a_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 \end{vmatrix}$;

(2) $D_2=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$.

【解】 (1)根据(7.3)式,得

$$D_1=a_{12}\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{24} \\ a_{31} & 0 & 0 \\ 0 & a_{43} & 0 \end{vmatrix}$$

$$=-a_{12}\cdot a_{24}(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} a_{31} & 0 \\ 0 & a_{43} \end{vmatrix}$$

$$=-a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}.$$

(2)根据(7.3)式,得

$$D_2=a_{14}\cdot(-1)^{1+4}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

$$=-a_{14}\cdot a_{23}(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 0 & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}$$

$$=-a_{14}a_{23}\cdot(0-a_{32}a_{41})=a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}.$$

同步强化练习(一)

1. 计算下列二阶、三阶行列式:

(1) $\begin{vmatrix} a & a^2 \\ b & b^2 \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 6 \end{vmatrix}$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

2. 用行列式定义计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_4 \\ a_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

3. 写出四阶行列式

$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 8 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 & 7 \\ -1 & 3 & 7 & -6 \end{vmatrix}$　元素 $a_{32}=1$ 的余子式和代数余子式.

第二节　行列式的性质

为了进一步讨论 n 阶行列式，简化 n 阶行列式的计算，下面不加证明地引入 n 阶行列式的基本性质．在介绍行列式性质之前，先给出 n 阶转置行列式的概念．

如果把 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中的行与列按原来的顺序互换，得到新行列式

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

那么称行列式 D^{T} 为 D 的转置行列式．显然 D 也是 D^{T} 的转置行列式．

性质 1　行列式 D 与它的转置行列式 D^{T} 相等，即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

例如二阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=D^{\mathrm{T}}.$$

性质 1 说明，行列式中行与列所处的地位是一样的，所以，凡是对行成立的性质，对列也同样成立．

由性质 1 和 n 阶下三角形行列式的结论，可以得到 n 阶上三角形行列式的值等于它的对角线元素乘积，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

性质 2　行列式 D 等于它的任意一行或列中所有元素与它们各自的代数余子式乘积之和，即

$$D=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}\quad 或\quad D=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}, \tag{7.4}$$

其中 $i,j=1,2,\cdots,n$. 换句话说，行列式可以按任意一行或列展开．

【例 1】　设三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$.

(1)按第二行展开，并求其值；

(2)按第三列展开，并求其值．

【解】　(1)∵　$A_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=-(5-6)=1,$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}M_{22}=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=6,$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=-4,$$

$$\begin{aligned}\therefore D&=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}\\&=-4\times1+3\times6+1\times(-4)=10.\end{aligned}$$

(2)∵　$A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=-18,$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=-4,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}M_{33}=\begin{vmatrix}2&1\\-4&3\end{vmatrix}=10,$$

$$\therefore D=a_{13}A_{13}+a_{23}A_{23}+a_{33}A_{33}$$
$$=2\times(-18)+1\times(-4)+5\times10=10.$$

【例 2】 计算四阶行列式 $D=\begin{vmatrix}3&2&0&8\\4&-9&2&10\\-1&6&0&-7\\0&0&0&5\end{vmatrix}$

【解】 因为第三列中有三个零元素，由性质 2，按第三列展开，得

$$D=2\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}3&2&8\\-1&6&-7\\0&0&5\end{vmatrix},$$

对于上面的三阶行列式，按第三行展开，得

$$D=-2\cdot5\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}3&2\\-1&6\end{vmatrix}=-200.$$

由性质 2，可以证明下列结论成立．

性质 3 行列式一行(或列)的公因子可以提到行列式记号的外面，即

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\ka_{i1}&ka_{i2}&\cdots&ka_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\tag{7.5}$$

例如二阶行列式

$$\begin{vmatrix}a_1&a_2\\kb_1&kb_2\end{vmatrix}=a_1kb_2-a_2kb_1=k(a_1b_2-a_2b_1)=k\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}.$$

由性质 2 可以得到下面推论：

推论 1 如果行列式中有一行(或列)的全部元素都是零，那么这个行列式的值是零．

同样，由性质 2 可以证明下列结论成立．

性质 4 行列式中一行(或列)的每一个元素如果可以写成两数之和，

$$a_{ij}=b_{ij}+c_{ij}\quad(j=1,2,\cdots,n),$$

那么此行列式等于两个行列式之和，这两个行列式的第 i 行的元素分别是 $b_{i1},b_{i2},\cdots,b_{in}$ 和 $c_{i1},c_{i2},\cdots,c_{in}$，其他各行(或列)的元素与原行列式相应各行(或列)的元素相同，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{7.6}$$

例如二阶行列式

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 \end{vmatrix} &= a_1(b_2+c_2)-a_2(b_1+c_1) \\ &= (a_1b_2-a_2b_1)+(a_1c_2-a_2c_1) \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

性质 5 如果行列式中两行(或列)对应元素全部相同,那么行列式的值为零,即

$$\begin{array}{r} \\ \\ i\text{ 行} \\ \\ k\text{ 行} \\ \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

例如三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = a_1b_2a_3+a_2b_3a_1+a_3b_1a_2-a_1b_3a_2- a_2b_1a_3-a_3b_2a_1=0.$$

由性质 3 和性质 5,可以得到下列推论:

推论 2 行列式中如果两行(或列)对应元素成比例,那么行列式的值为零.

由性质 3 和性质 5,可以得到下列结论.

推论 3 行列式 D 中任意一行(或列)的元素与另一行(或列)对应元素的代数余子式乘积之和等于零,即当 $i\neq j$ 时,

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = 0\left(\text{或}\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = 0\right), \tag{7.7}$$

综合性质 2 和推论 3，可以得到

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \begin{cases} D, \text{当 } i = j; \\ 0, \text{当 } i \neq j; \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = \begin{cases} D, \text{当 } i = j; \\ 0, \text{当 } i \neq j; \end{cases}$$

由性质 4 和推论 2，可以得到下列结论：

性质 6　在行列式中，把某一行（或列）的倍数加到另一行（或列）对应的元素上去，那么行列式的值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{in} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{7.8}$$

例如二阶行列式

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1+ka_1 & b_2+ka_2 \end{vmatrix} &= a_1(b_2+ka_2)-a_2(b_1+ka_1) \\ &= (a_1b_2-a_2b_1)+k(a_1a_2-a_2a_1) \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

利用性质 3 和性质 6，可以得到下列结论：

性质 7　如果将行列式的任意两行（或列）互换，那么行列式的值改变符号，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

例如二阶行列式

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = b_1a_2 - b_2a_1 = -(a_1b_2 - a_2b_1) = -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

前面,我们介绍了行列式的七条性质和三个推论,下面举例说明如何利用这些性质计算行列式.

【例 3】 计算下面行列式的值.

(1) $D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 290 & 106 & 196 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix}$;

(2) $D_2 = \begin{vmatrix} a-b & a & b \\ -a & b-a & a \\ b & -b & -a-b \end{vmatrix}$ $(a,b \neq 0)$.

【解】 (1)把 D_1 的第二行的元素分别看成:300－10,100＋6,200－4,由性质4,得

$$D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 300-10 & 100+6 & 200-4 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 300 & 100 & 200 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -10 & 6 & -4 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

而由推论 2 和性质 3、性质 5,得

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 300 & 100 & 200 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -10 & 6 & -4 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} = (-2)\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & -3 & 2 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

所以 $D_1 = 0$.

(2)利用性质 6,在第一行上加上第二行的一倍,再由推论 2,得

$$D_2 = \begin{vmatrix} -b & b & a+b \\ -a & b-a & a \\ b & -b & -a-b \end{vmatrix} = 0.$$

【例 4】 证明:

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com