普通高等学校公共基础课

助学·助教·助考 丛书

（农科专业适用）

# 高等数学学习指导

张录达 主编

GAODENGSHUXUE XUEXIZHIDAO

中国农业大学出版社
ZHONGGUONONGYEDAXUE CHUBANSHE

普通高等学校公共基础课
助学·助教·助考丛书

# 高等数学学习指导
## （农科专业适用）

张录达　主编

中国农业大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

高等数学学习指导/张录达主编.—北京:中国农业大学出版社,2007.9
ISBN 978-7-81117-201-0

Ⅰ.高… Ⅱ.①张… Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 141829 号

**书　　名** 高等数学学习指导
**作　　者** 张录达　主编

**策划编辑** 刘　军　　**责任编辑** 陈艳燕
**封面设计** 郑　川　　**责任校对** 王晓凤　陈　莹
**出版发行** 中国农业大学出版社
**社　　址** 北京市海淀区圆明园西路 2 号　　**邮政编码** 100094
**电　　话** 发行部 010-62731190,2620　　读者服务部 010-62732336
编辑部 010-62732617,2618　　出　版　部 010-62733440
**网　　址** http://www.cau.edu.cn/caup　　**e-mail** cbsszs@cau.edu.cn
**经　　销** 新华书店
**印　　刷** 涿州市星河印刷有限公司
**版　　次** 2007 年 9 月第 1 版　　2007 年 9 月第 1 次印刷
**规　　格** 787×980　　16 开本　　15.25 印张　　278 千字
**印　　数** 1～3 000
**定　　价** 20.00 元

# 前　言

高等数学是高等院校本科生最重要的基础课程之一，为了更好地指导学生学好这门课程，加深对所学内容的理解和掌握，我们根据理、工、农、经等(非数学)专业高等数学教学大纲的相关内容组织编写了这本《高等数学学习指导》。

读者可将本书与所用高等数学教材配合使用。本书的主要特点是：依据教学大纲和研究生考试大纲的基本要求，精选出具有启发性、典型性和针对性的题目，许多典型例题都选自历届考研试题，通过对这些题目的分析解答，帮助读者掌握基本知识点和提高综合解题能力。

全书分十章，每章均由内容要点、基本要求、典型例题组成。每章后附有自测题和自测题答案与提示。在内容要点部分，给出了基本概念、定义、重要定理与常用公式，很方便学生的学习。所选的典型例题由易到难，配合课堂教学同步训练。为了与课堂教学有所区别，相当一部分典型例题综合性较强并具有一定的深度。对于典型例题中难度较大的题，先给出解题思路分析，然后给出正式解答，部分题目的最后还加以评注。目的是帮助学生正确理解和掌握基本的概念、理论和方法，开拓思维模式，培养学生综合分析和解决问题的能力。每章结束让学生做本章的自测题，使学生及时了解本章的学习情况。书后附有三套综合模拟试题，对应全书内容。本书兼顾了各专业的需求，可供理、工、农、经等(非数学)专业的大学生及从事高等数学教学的教师使用，对于学生的平时学习及考研复习很有帮助。

本书的编写人员是多年从事高等数学课程教学的教师，其中第一章由张录达教授编写，第二章由沈晓南副教授编写，第三、四章由介跃建副教授编写，第五、六章由刘文芝副教授编写，第七、十章由田英老师编写，第八、九章由李国辉教授编写，全书由张录达教授统稿。

由于编写人员水平所限，书中缺点和错误在所难免，敬请读者指正。

**编　者**

2007 年 2 月

# 目　录

# 第一章　函数、极限与连续

## 一、内容要点

### 1. 集合

(1) 集合的定义　集合是指具有某种属性的事物的全体，构成集合的事物或对象称为集合的元素。集合用大写字母 $A, B, C, \cdots$ 表示，集合的元素用小写字母 $a$，$b, c, \cdots$ 表示。用 $a \in A$ 表示 $a$ 是集合 $A$ 的元素或说 $a$ 属于 $A$，$a \notin A$ 表示 $a$ 不是 $A$ 的元素。

集合有两种表示方法：列举法和描述法。

(2) 全集和空集　由所研究的所有事物构成的集合称为全集，记为 $U$。不含任何元素的集合称为空集，记为 $\Phi$。

(3) 集合之间的关系

① 包含关系：如果集合 $B$ 中的每一个元素都是集合 $A$ 的元素，则称集合 $B$ 包含于 $A$ 或集合 $A$ 包含集合 $B$，记作 $B \subset A$ 或 $A \supset B$。

② 相等关系：如果 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称 $A$ 与 $B$ 相等，记作 $A = B$。

(4) 集合之间的运算

① 由集合 $A$ 和 $B$ 的所有元素构成的集合称为 $A$ 与 $B$ 的并，记作 $A \cup B$。

② 由集合 $A$ 和 $B$ 的所有公共元素构成的集合称为 $A$ 与 $B$ 的交，记作 $A \cap B$。

③ 全集 $U$ 中所有不属于 $A$ 的元素构成的集合称为集合 $A$ 的补集，记作 $\overline{A}$。

④ 由属于 $A$ 而不属于 $B$ 的所有元素构成的集合称为 $A$ 与 $B$ 的差，记作 $A-B$。

(5) 集合间的性质与运算律

①$A \subset A$，即"集合 $A$ 是其自己的子集"。

②$\Phi \subset A$，即"空集是任何集合的子集"。

③ 如果 $A \subset B, B \subset C$，则 $A \subset C$，即"集合的包含关系具有传递性"。

④ 交换律：$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$。

⑤ 结合律：$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$。

⑥ 分配律：$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$。

⑦ 对偶律：$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$。

(6) 实数集　有理数和无理数统称为实数。全体实数与数轴上的全体点构成一一对应关系。

实数集具有如下性质：

① 稠密性：表示实数的点遍布实数轴。

② 连续性：表示任何两个实数之间没有空隙。

(7) 区间　设 $a$ 与 $b$ 是两个实数，且 $a<b$，满足不等式 $a<x<b$ 的全体实数 $x$ 的集合称为开区间，记作 $(a,b)$。常见的区间如表 1-1 所示。

**表 1-1　常见区间表**

| 区间 | 不等式表示 | 含　义 |
|---|---|---|
| $(-\infty,+\infty)$ | $-\infty<x<+\infty$ | 全体实数 |
| $(a,+\infty)$ | $a<x<+\infty$ | 大于 $a$ 的全体实数 |
| $[a,+\infty)$ | $a\leqslant x<+\infty$ | 大于或等于 $a$ 的全体实数 |
| $(-\infty,a)$ | $-\infty<x<a$ | 小于 $a$ 的全体实数 |
| $(-\infty,a]$ | $-\infty<x\leqslant a$ | 小于或等于 $a$ 的全体实数 |
| $(a,b)$ | $a<x<b$ | 大于 $a$ 但小于 $b$ 的全体实数(开区间) |
| $[a,b]$ | $a\leqslant x\leqslant b$ | 大于或等于 $a$ 但小于或等于 $b$ 的全体实数(闭区间) |
| $[a,b)$ | $a\leqslant x<b$ | 大于或等于 $a$ 但小于 $b$ 的全体实数(半闭半开区间) |

**2. 绝对值**

一个实数 $a$ 的绝对值，记作 $|a|$，定义为

$$|a|=\begin{cases}a, a\geqslant 0\\ -a, a<0\end{cases}$$

绝对值及其运算有如下性质：

① $|a|=\sqrt{a^2}\geqslant 0$。

② $|-a|=|a|$。

③ $-|a|\leqslant a\leqslant|a|$。

④ $|a|-|b|\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$。

⑤ $|ab|=|a||b|$。

⑥ $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}\quad(b\neq 0)$。

**3. 邻域**

以 $x_0$ 为中心，$\delta$ 为半径的 $x_0$ 的 $\delta$ 邻域 $\{x\,|\,|x-x_0|<\delta\}$ 是开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内一切点所构成的集合。

以 $x_0$ 为中心，$\delta$ 为半径的 $x_0$ 的去心 $\delta$ 邻域是集合 $\{x\,|\,|x-x_0|<\delta, x\neq x_0\}$。

**4. 常量与变量**

在某过程中数值保持不变的量称为常量；而在某过程中数值变化的量称为变量。通常用字母 $a,b,c$ 等表示常量，用字母 $x,y,t$ 等表示变量。

**注**　一个量是常量还是变量，不是绝对的，而是相对“过程”而言的。

**5. 函数概念**

**定义**　设 $x$ 和 $y$ 是两个变量，如果对于 $x$ 的数集 $D$ 中所取的每一个值，变量 $y$ 按照某个对应法则 $f$ 总有唯一的数值与之对应，则称 $y$ 是 $x$ 的函数，记为 $y=f(x)$，$x$ 称为自变量，$y$ 称为因变量，$D$ 称为函数的定义域，有时记为 $D_f$，而所有对应的 $y$ 值组成的数集称为函数 $f$ 的值域，记为 $Z$ 或 $Z_f$。

**6. 函数的简单性态**

(1) 单调性　设函数 $f(x)$ 定义在区间 $I$ 内，如果对于 $I$ 内任何两个值 $x_1$ 和 $x_2$，当 $x_1<x_2$ 时，总有不等式 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$）成立，则称 $f(x)$ 在 $I$ 内单调增（或单调减）。单调增函数与单调减函数统称为单调函数，并称 $I$ 为 $f(x)$ 的单调区间。

(2) 奇偶性　设函数 $f(x)$ 定义在对称区间 $(-l,+l)$ 内（$l$ 可以是无限的），如果有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 在 $(-l,+l)$ 内是偶函数；如果有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 在 $(-l,+l)$ 内是奇函数。

(3) 有界性　设函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 内有定义，如果存在一个正数 $M$，使得对一切的 $x\in I$，都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在区间 $I$ 内有界；否则，称 $f(x)$ 在区间 $I$ 内无界。

(4) 周期性　函数 $y=f(x)$，如果存在正数 $T$ 使得对于属于 $f(x)$ 的定义域 $I$ 内的任意 $x$，只要 $x+T\in I$，都有 $f(x+T)=f(x)$ 成立，则称 $f(x)$ 是周期函数。使得 $f(x+T)=f(x)$ 成立的最小的正数 $T$ 称为 $f(x)$ 的周期。

**7. 反函数**

设有直接函数 $f(x)$，如果变量 $y$ 在函数的值域内任取一值 $y_0$ 时，变量 $x$ 在函数的定义域内必有一个值 $x_0$ 与之对应，即 $f(x_0)=y_0$，则称变量 $x$ 是变量 $y$ 的函数，记为 $x=\varphi(y)$，它称为 $y=f(x)$ 的反函数。

习惯上，$y=f(x)$ 的反函数 $x=\varphi(y)$ 也记为 $y=\varphi(x)$，直接函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=\varphi(x)$ 的图形是关于直线 $y=x$ 对称的。

**8. 复合函数**

设 $y=f(u)$，而 $u=\varphi(x)$，且当 $x$ 在某一区间 $I$ 取值时，相应的 $u$ 的值可使 $f(u)$ 有定义，则称 $y$ 是 $x$ 的定义在区间 $I$ 的复合函数，记作 $y=f(\varphi(x))$。

**9. 初等函数**

(1) 基本初等函数

① 常量函数：$y=c$（常数），定义域为 $R$，值域为 $\{c\}$，图形是一条与 $x$ 轴平行的

直线，是偶函数。

② 幂函数：$y=x^{\alpha}(\alpha\neq 0)$，定义域和值域随 $\alpha$ 的不同取值而变化，如 $\alpha$ 为正整数，定义域是 $R$，$\alpha$ 为负整数时，定义域为 $R-\{0\}$，而当 $\alpha$ 为无理数时，定义域为 $(0,+\infty)$。

③ 指数函数：$y=a^{x}(a>0,a\neq 1)$，定义域和值域分别为 $(-\infty,+\infty)$ 和 $(0,+\infty)$，当 $a>1$ 时函数在定义域内单调增加；当 $a<1$ 时函数在定义域内单调减少。

④ 对数函数：$y=\log_{a}x(a>0,a\neq 1)$，定义域和值域分别为 $(0,+\infty)$ 和 $(-\infty,+\infty)$，当 $a>1$ 时函数在定义域内单调增加；当 $a<1$ 时函数在定义域内单调减少。

⑤ 三角函数：

$y=\sin x$：定义域和值域分别为 $(-\infty,+\infty)$ 和 $[-1,+1]$，周期为 $2\pi$，且为奇函数。

$y=\cos x$：定义域和值域分别为 $(-\infty,+\infty)$ 和 $[-1,+1]$，周期为 $2\pi$，且为偶函数。

$y=\tan x$：定义域为 $\{x \mid k\pi-\frac{\pi}{2}<x<k\pi+\frac{\pi}{2},k$ 为整数$\}$，值域为 $(-\infty,+\infty)$，周期为 $\pi$，且为奇函数。

$y=\cot x$：定义域为 $\{x \mid k\pi<x<k\pi+\pi,k$ 为整数$\}$，值域为 $(-\infty,+\infty)$，周期为 $\pi$，且为奇函数。

$y=\sec x$：定义域为 $\{x \mid k\pi-\frac{\pi}{2}<x<k\pi+\frac{\pi}{2},k$ 为整数$\}$，值域为 $(-\infty,+\infty)$，周期为 $2\pi$，且为偶函数。

$y=\csc x$：定义域为 $\{x \mid k\pi<x<(k+1)\pi,k$ 为整数$\}$，值域为 $(-\infty,+\infty)$，周期为 $2\pi$，且为奇函数。

⑥ 反三角函数：

$y=\arcsin x$：定义域和值域分别为 $[-1,+1]$ 和 $\left[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right]$，是单调增加函数和奇函数。

$y=\arccos x$：定义域和值域分别为 $[-1,+1]$ 和 $[0,\pi]$，是单调减少函数。

$y=\arctan x$：定义域和值域分别为 $(-\infty,+\infty)$ 和 $\left(-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right)$，是单调增加函数和奇函数。

$y=\text{arccot}\,x$：定义域和值域分别为 $(-\infty,+\infty)$ 和 $(0,\pi)$，是单调减少函数。

(2) 初等函数　由基本初等函数经过有限次四则运算(即加、减、乘、除)及有限次的函数复合所产生，并能用一个解析式表示的函数称为初等函数。

**10. 数列的极限**

(1) 数列的单调性　如果 $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant \cdots$，则称数列 $\{x_n\}$ 单调增；如果 $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n \geqslant \cdots$，则称数列 $\{x_n\}$ 单调减。单调增数列与单调减数列统称为单调数列。

(2) 数列的有界性　如果对于任何正整数 $n$，恒有 $|x_n| \leqslant M$，其中 $M$ 是与 $n$ 无关的正常数，则称 $\{x_n\}$ 是有界数列；否则，称 $\{x_n\}$ 为无界数列。

(3) 数列的极限　如果对于任意给定的正数 $\varepsilon$(无论它怎样小)，相应地，必有一个正整数 $N(\varepsilon)$ 存在，使得当 $n > N$ 时的一切 $x_n$，均有不等式 $|x_n - a| < \varepsilon$ 成立，则称常数 $a$ 为数列当 $n \to \infty$ 时的极限，记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad 或 \quad x_n \to a(n \to \infty)$$

这时，称数列 $x_n$ 收敛于 $a$。

如果数列没有极限，就称它是发散数列。

(4) 单调有界定理　单调有界数列必有极限。

**11. 函数的极限**

(1) 当 $x \to \infty$ 时函数的极限　设函数 $f(x)$ 在 $|x|$ 大于某一正数时有定义，如果对于任意给定的正数 $\varepsilon$(无论它怎样小)，总存在正数 $N$，使得当 $|x| > N$ 时的一切 $x$，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 成立，则称常数 $A$ 是函数 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A(x \to \infty)$$

类似地，可定义 $x \to -\infty$，$x \to +\infty$ 时 $f(x)$ 以 $A$ 为极限。

(2) 当 $x \to x_0$ 时函数的极限　设函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 的某一去心邻域内有定义，如果对于任意给定的正数 $\varepsilon$(无论它怎样小)，总存在正数 $\delta(\varepsilon)$，使得对于适合不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ 的一切 $x$ 对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则称常数 $A$ 是函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时函数的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A(x \to x_0)$$

如果 $x$ 从 $x_0$ 的右侧($x > x_0$)趋于 $x_0$，而 $f(x)$ 趋于 $A$，则称 $A$ 是 $f(x)$ 在 $x_0$ 处的右极限，记作

$$f(x_0 + 0) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A(x \to x_0^{+0})$$

如果 $x$ 从 $x_0$ 的左侧($x<x_0$)趋于 $x_0$，而 $f(x)$ 趋于 $A$，则称 $A$ 是 $f(x)$ 在 $x_0$ 处的左极限，记作

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to x_0^{-0})$$

函数极限存在的充要条件是其左、右极限均存在，并且相等，即

$$f(x_0-0)=f(x_0+0)$$

(3) 极限的性质

① 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 存在，则极限值唯一。

② 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 存在，则 $f(x)$ 在 $x_0$ 的某个去心邻域内有界。

③ 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且 $A>0(A<0)$，则在 $x_0$ 的某个去心邻域内恒有 $f(x)>0(f(x)<0)$。

④ 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且在 $x_0$ 的某个去心邻域内恒有 $f(x)\geqslant 0(f(x)\leqslant 0)$，则 $A\geqslant 0(A\leqslant 0)$。

⑤ 夹逼定理：设在 $x_0$ 的某个去心邻域内有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$。

(4) 两个重要极限

① $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$。

② $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$。

**12. 无穷小量与无穷大量**

(1) 无穷小量　极限为零的变量称为无穷小量，即 $\lim\alpha=0$。$\lim\alpha$ 表示定义的七种极限之一。

(2) 无穷大量　设函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 的某一去心邻域内有定义，如果对于任意给定的正数 $M$(无论它多么大)，总存在正数 $\delta(M)$，使得对于适合不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 的一切 $x$ 对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)|>M$，则称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时是一个无穷大量，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty \quad 或 \quad f(x)\to\infty(x\to x_0)$$

关于无穷大量的各种定义见表 1-2。

表 1-2　无穷大量的定义

| | |
|---|---|
| $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ | 任意给定 $M>0$，总存在正整数 $N$，使得当 $n>N$ 时，都有 $\|x_n\|>M$ |
| $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ | 任意给定 $M>0$，总存在正整数 $N$，使得当 $n>N$ 时，都有 $x_n>M$ |
| $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ | 任意给定 $M>0$，总存在正整数 $N$，使得当 $n>N$ 时，都有 $x_n<-M$ |
| $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ | 任意给定 $M>0$，总存在 $\delta>0$，使得当 $0<\|x-x_0\|<\delta$ 时，都有 $\|f(x)\|>M$ |
| $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ | 任意给定 $M>0$，总存在 $\delta>0$，使得当 $0<\|x-x_0\|<\delta$ 时，都有 $f(x)>M$ |
| $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ | 任意给定 $M>0$，总存在 $\delta>0$，使得当 $0<\|x-x_0\|<\delta$ 时，都有 $f(x)<-M$ |
| $\lim\limits_{x\to x_0^{+0}} f(x) = \infty$ | 任意给定 $M>0$，总存在 $\delta>0$，使得当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时，都有 $\|f(x)\|>M$ |
| $\lim\limits_{x\to x_0^{+0}} f(x) = +\infty$ | 任意给定 $M>0$，总存在 $\delta>0$，使得当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时，都有 $f(x)>M$ |
| $\lim\limits_{x\to x_0^{+0}} f(x) = -\infty$ | 任意给定 $M>0$，总存在 $\delta>0$，使得当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时，都有 $f(x)<-M$ |
| $\lim\limits_{x\to x_0^{-0}} f(x) = \infty$ | 任意给定 $M>0$，总存在 $\delta>0$，使得当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，都有 $\|f(x)\|>M$ |
| $\lim\limits_{x\to x_0^{-0}} f(x) = +\infty$ | 任意给定 $M>0$，总存在 $\delta>0$，使得当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，都有 $f(x)>M$ |
| $\lim\limits_{x\to x_0^{-0}} f(x) = -\infty$ | 任意给定 $M>0$，总存在 $\delta>0$，使得当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，都有 $f(x)<-M$ |
| $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ | 任意给定 $M>0$，总存在 $N>0$，使得当 $\|x\|>N$ 时，都有 $\|f(x)\|>M$ |
| $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ | 任意给定 $M>0$，总存在 $N>0$，使得当 $\|x\|>N$ 时，都有 $f(x)>M$ |
| $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ | 任意给定 $M>0$，总存在 $N>0$，使得当 $\|x\|>N$ 时，都有 $f(x)<-M$ |
| $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$ | 任意给定 $M>0$，总存在 $N>0$，使得当 $x>N$ 时，都有 $\|f(x)\|>M$ |
| $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ | 任意给定 $M>0$，总存在 $N>0$，使得当 $x>N$ 时，都有 $f(x)>M$ |
| $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ | 任意给定 $M>0$，总存在 $N>0$，使得当 $x>N$ 时，都有 $f(x)<-M$ |
| $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ | 任意给定 $M>0$，总存在 $N>0$，使得当 $x<-N$ 时，都有 $\|f(x)\|>M$ |
| $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ | 任意给定 $M>0$，总存在 $N>0$，使得当 $x<-N$ 时，都有 $f(x)>M$ |
| $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ | 任意给定 $M>0$，总存在 $N>0$，使得当 $x<-N$ 时，都有 $f(x)<-M$ |

(3) 无穷小量的运算性质

① 有限个无穷小量的代数和仍是无穷小量。

② 有限个无穷小量的乘积仍是无穷小量。

③ 无穷小量与有界变量的乘积仍是无穷小量。

(4) 无穷小量的比较　设 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 都是无穷小量，即 $\lim\alpha(x)=0$，$\lim\beta(x)=0$，那么

① 如果 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 高阶的无穷小，记作 $\alpha(x)=o(\beta(x))$。

② 如果 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C(C\neq 0)$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶无穷小。

③ 如果 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小，记作 $\alpha(x)\sim\beta(x)$。

**13. 极限的四则运算**

设极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)$ 和 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)$ 都存在，则有

① $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}(f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)\pm\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)$。

② $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}(f(x)\cdot g(x))=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)\cdot\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)$。

③ $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)}{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)}$　(设 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)\neq 0$)。

④ 利用无穷小量的等价代换求极限

如果 $\alpha(x)\sim\beta(x)$，$\gamma(x)\sim\rho(x)$，而 $\lim\dfrac{\beta(x)}{\rho(x)}=A$，则

$$\lim\frac{\alpha(x)}{\gamma(x)}=\lim\frac{\beta(x)}{\rho(x)}=A$$

**14. 函数的连续性**

(1) 连续函数的定义　设函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 的某一邻域内有定义，如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 点连续。

如果对于任意给定的正数 $\varepsilon$(无论它怎样小)，总存在正数 $\delta(\varepsilon)$，使得对于适合不等式 $|x-x_0|<\delta$ 的一切 $x$ 对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，则称函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 点连续。

如果 $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 点右连续。

如果 $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 点左连续。

函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 连续的充要条件为 $f(x)$ 在点 $x_0$ 既右连续又左连续。

函数 $f(x)$ 在某个区间连续是指 $f(x)$ 在该区间内每一点都连续(在闭区间的左端点处右连续,而在右端点处左连续)。

(2) 函数的间断点　如果 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处不连续,则称 $x_0$ 为 $f(x)$ 的间断点,函数的间断点可如表 1-3 所示分类:

**表 1-3　函数的间断点分类**

$$
\text{间断点}\begin{cases}\text{第一类间断点(左右极限都存在)}\begin{cases}\text{可去间断点(左右极限相等)}\\ \text{跳跃间断点(左右极限不相等)}\end{cases}\\ \text{第二类间断点}\begin{cases}\text{无穷型间断点}\\ \text{振荡型间断点}\\ \cdots\cdots\end{cases}\end{cases}
$$

(3) 连续函数的运算性质　在同一区间上连续函数的和、差、积、商(分母不为零)在该区间仍是连续函数;连续函数的复合函数仍是连续函数;所有基本初等函数在其定义域内都是连续函数;一切初等函数在其定义域内都是连续函数。

(4) 闭区间上连续函数的性质

① 最大值和最小值定理:在闭区间[a,b]上连续的函数 f(x),必在该区间上取得最大值和最小值。

② 介值定理:在闭区间[a,b]上连续的函数 f(x),必取得介于 f(x) 的最大值与最小值之间的任何值。

③ 零点定理:在闭区间[a,b]上连续的函数 f(x),如果在区间两端点处的函数值异号,则 f(x) 必在(a,b) 内取得零值。

## 二、基本要求

1. 理解函数的概念;了解函数奇偶性、单调性、周期性和有界性。
2. 理解复合函数的概念,了解反函数的概念;掌握基本初等函数的性质及其图形。
3. 会建立简单实际问题中的函数关系式。
4. 理解极限的概念;掌握极限四则运算法则。
5. 了解两个极限存在准则,会用两个重要极限求极限。
6. 了解无穷小、无穷大,以及无穷小的阶的概念。会用等价无穷小求极限。
7. 理解函数在一点连续的概念;了解间断点的概念,并会判定间断点的类型。
8. 了解初等函数的连续性和闭区间上连续函数的性质。

## 三、典型例题

**例 1-1**　设 $A=\{x \mid \sqrt{1-x^2}\leqslant 1\}$,$B=\{x \mid 0<x<2\}$ 是二实数集,写出

$A \cup B, A \cap B, A-B$ 及 $B-A$ 的表达式。

**解** 因为 $A=\{x \mid \sqrt{1-x^2} \leqslant 1\}=\{x \mid 1-x^2 \geqslant 0 \text{ 且 } 1-x^2 \leqslant 1\}=\{x \mid -1 \leqslant x \leqslant 1\}$，

由集合的并、交、差的定义得

$$A \cup B=\{x \mid -1 \leqslant x<2\}, A \cap B=\{x \mid 0<x \leqslant 1\}$$
$$A-B=\{x \mid -1 \leqslant x \leqslant 0\}, B-A=\{x \mid 1<x<2\}$$

**例 1-2** 求函数 $f(x)=\dfrac{2}{x^2-1}-\lg(3-x)+\arcsin \dfrac{3x-1}{2}$ 的定义域。

**解** 根据分数的分母不能为0，对数的定义域为 $(0,+\infty)$，反正弦函数的定义域为 $[-1,1]$，可知欲使函数有意义，则须

$$\begin{cases} x^2-1 \neq 0 \\ 3-x>0 \\ -1 \leqslant \dfrac{3x-1}{2} \leqslant 1 \end{cases}, \quad \text{即} \quad \begin{cases} x^2 \neq 1 \\ x<3 \\ -\dfrac{1}{3} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

由此得函数的定义域为 $\left[-\dfrac{1}{3}, 1\right)$。

**例 1-3** 下列各对函数是否相同：

① 函数 $f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$；② 函数 $y=1+x^2$ 与 $x=1+y^2$。

**解** ① 函数 $f(x)$ 的定义域为 $D_f=R$，函数 $g(x)$ 的定义域 $D_g=R$，虽然 $D_f=D_g$，但任意 $x \in(-\infty, 0)$，$f(x)=x \neq g(x)=-x$，所以，$f(x)$ 与 $g(x)$ 是对应法则不同的两个不同的函数。

② 这两个函数虽然自变量与因变量所用字母不同，但它们的定义域都是 $R$，且对任意 $a \in R$，两个函数都有相同的实数 $1+a^2$ 与之相对应，即有相同的函数对应法则，因此，它们是相同的函数。

**例 1-4** $f(x)$ 是定义在对称区间 $(-l, l)$ 内的任意函数，证明：$\varphi(x)=f(x)+f(-x)$ 是偶函数；$\psi(x)=f(x)-f(-x)$ 是奇函数；并写出下列函数对应的 $\varphi(x)$，$\psi(x)$：

① $f(x)=a^x(a>0)$；② $f(x)=(1+x)^n$。

**证明** 因为 $\varphi(-x)=f(-x)+f(x)=f(x)+f(-x)=\varphi(x)$，所以 $\varphi(x)$ 是偶函数；

因为 $\psi(-x)=f(-x)-f(x)=-(f(x)-f(-x))=-\psi(x)$，所以 $\psi(x)$ 是奇函数。