奥博丛书

高中数学奥林匹克系列

浙江奥数网 www.zjaoshu.com

西泠印社出版社

# 解析几何

【虞金龙 编著】

奥博丛书
高中数学奥林匹克系列
浙江奥数网 www.zjaoshu.com
西泠印社出版社

# 解析几何

【虞金龙 编著】

**图书在版编目(CIP)数据**

高中数学联赛一试.解析几何/虞金龙主编. —杭州:西泠印社出版社,2006.6
(奥博丛书)
ISBN 7-80735-077-6

Ⅰ.高… Ⅱ.虞… Ⅲ.解析几何课—高中—解题 Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 064129 号

高中数学联赛一试

# 解析几何

虞金龙 主编

丛书策划:徐 莹
责任编辑:审校部编辑工作组
特约编辑:周 滔
责任出版:李 兵
出版发行:西泠印社出版社
社 址:杭州市解放路马坡巷 39 号(邮编 310009 电话 0571-87243279)
经 销:新华书店
业务电话:0571-85021510 85028528 85028578(传真)
印 刷:杭州华艺印刷有限公司
排 版:杭州大漠照排印刷有限公司
开 本:787×960 1/16
总 印 张:110.5
总 字 数:1900 千字
版(印)次:2006 年 6 月第 1 版 2006 年 6 月第 1 次印刷
书 号:ISBN 7-80735-077-6/G·078
印 数:1—5000
总 定 价:145.60 元

# 丛书序言

一本武功秘籍！

找到它，勤加练习，就能成为武林高手。

这是金庸等人常写的故事。

这套奥博丛书，其中就有若干本或许可以称为解题秘籍。当然，得到它之后，要成为解题高手，还得注意：

一、勤加练习。因为解题是实践性的技能，只能通过模仿和实践来学到它。

二、循序渐进。孔子说："欲速则不达。"不能操之过急。一个问题或一种方法，彻底弄清楚了，再往下看。切忌囫囵吞枣，食而不化。

三、不要迷信书本。"尽信书，则不如无书。"作者也有可能出错。"乾坤大挪移"第七层心法的一十九句就是"单凭空想而想错了的"。其实要成为真正的高手，不能依赖秘籍，而要自创新招。

这套奥博丛书，不只是解题的秘籍。它的作者阵营庞大，视角不尽相同，写法各有特点。或综述，或专题；或讲思想，或谈策略；或提供翔实材料，或介绍背景知识；……。

据我了解，奥博丛书原本并不是一套丛书。它既没有预先设定的宏伟的出书规划，也不能保证其中的每一本都同样精彩。时间，才是考验它们的唯一准则。它不像其他丛书那样，追求在同一时间出齐；而是细水长流，渐渐汇聚成河。除已出的、即出的十余种外，想必还会继续推出新的品种。

开卷有益。相信这套丛书能很好地普及数学知识，增加读者对数学的理解，提高数学的品味(taste)，也就是鉴赏能力。祝愿这套丛书能够伴随读者度过一段愉快的时光。

单 墫

2006 年 3 月 16 日

# 奥博丛书之高中数学奥林匹克一试系列

**编 委 会**

王祖樾 中国数学奥林匹克高级教练员 浙江电子科技大学教授 曾任浙江省数学会普及工作委员会主任

李名德 中国数学奥林匹克高级教练员 浙江省学科竞赛委员会委员 浙江大学教授

徐士英 中国数学奥林匹克高级教练员 中国计量学院教授 浙江省数学会普及工作委员会副主任

王航平 中国计量学院副教授

徐 莹 奥博丛书总策划 浙江奥数网站长

吕峰波 嘉兴市第一中学数学教研组长 数学高级教师

李惟峰 杭州外国语学校数学教研组长 数学高级教师

张金良 浙江省教研室数学教研员 数学特级教师

吴国建 东阳中学教务处主任 数学高级教师

许康华 富阳市第二中学数学高级教师

郑日锋 杭州市学军中学数学教研组长 数学高级教师

虞金龙 绍兴市第一中学数学高级教师

蔡小雄 杭州市第二中学数学高级教师

**本册主编** 虞金龙

**丛书总策划** 徐 莹

**丛书审稿** 王祖樾 李名德 徐士英 王航平

**业务联系** 地址：浙江省杭州市学院路 83 号 221 室

电话：0571-85028528 85021510

传真：0571 85028578

# 目 录

## 第 1 章 直线和圆



## 第 2 章 圆锥曲线



## 第 3 章 解析几何专题讲座

# 第1章 直线和圆

## 1.1 直线

### 知识概要

直线是平面上最简单、最常见的几何图形.在解析几何中,直线是最基本的研究对象之一,它既能反映直线运动的规律,又是解决平面几何中直线型问题的强有力工具.

**1. 两点间距离公式**

设 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$,

则 $|P_1P_2| = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} = \sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|$,

或者 $|P_1P_2| = |x_1-x_2|\sec\alpha = \dfrac{|y_1-y_2|}{\sin\alpha}$,

其中 $\alpha$ 为直线 $P_1P_2$ 的倾斜角,$k$ 为直线 $P_1P_2$ 的斜率.

**2. 线段定比分点坐标公式**

设 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$,点 $P(x, y)$分$\overline{P_1P_2}$的比为 $\lambda$,则

$x = \dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$, $y = \dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}(\lambda \neq -1)$.

**3. 直线的斜率 $k$ 与直线的倾斜角 $\alpha$**

$k = \tan\alpha(\alpha \neq 90°)$. 直线的倾斜角的取值范围是 $0° \leqslant \alpha < 180°$或$[0, \pi)$.

经过两点 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$的直线的斜率为

$k = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x_1 \neq x_2)$.

**4. 直线方程的各种形式**

(1) 点斜式:$y-y_0 = k(x-x_0)$.

(2) 斜截式:$y = kx+b$.

(3) 两点式：$\dfrac{x-x_1}{y-y_1}=\dfrac{x_2-x_1}{y_2-y_1}$.

(4) 截距式：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$.

(5) 一般式：$Ax+By+C=0$ ($A$、$B$ 不同时为 0).

(6) 参数方程(Ⅰ)

$$\begin{cases} x=x_0-t\cos\alpha, \\ y=y_0+t\sin\alpha, \end{cases} t \text{ 为参数.}$$

(7) 参数方程(Ⅱ)

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \\ y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, \end{cases} \lambda \text{ 为参数.}$$



**5. 两直线平行与垂直的判断**

(1) 设直线 $l_1$、$l_2$ 的斜率存在，且分别为 $k_1$, $k_2$.

① 若 $l_1$、$l_2$ 不重合，则 $l_1 /\!/ l_2$ 的充分必要条件是 $k_1=k_2$；

② $l_1 \perp l_2$ 的充分必要条件是 $k_1k_2=-1$. ($k_1$, $k_2$ 均存在时)

(2) 设直线 $l_1$ 的方程为 $A_1x+B_1y+C_1=0$ ($A_1$、$B_1$ 不全为零)，直线 $l_2$ 的方程为 $A_2x+B_2y+C_2=0$ ($A_2$、$B_2$ 不全为零)，则

① $l_1$ 与 $l_2$ 相交的充分必要条件是 $A_1B_2 \neq A_2B_1$；

② $l_1 \perp l_2$ 的充分必要条件是 $A_1A_2+B_1B_2=0$；

③ $l_1 /\!/ l_2$ 的充分必要条件是 $A_1B_2=A_2B_1$，且 $A_1C_2 \neq A_2C_1$ 与 $B_1C_2 \neq B_2C_1$ 至少有一个成立.

**6. 直线 $l_1$ 与 $l_2$ 的夹角**

设直线 $l_1$、$l_2$ 的斜率存在，分别为 $k_1$, $k_2$，且夹角不是 90°.

若 $l_1$ 与 $l_2$ 的夹角是 $\theta$，则 $\tan\theta=\left|\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|$，此公式称为"夹角公式".

**7.** 点 $P(x_0, y_0)$ 到直线 $Ax+By+C=0$ ($A$, $B$ 不全为零) 的距离 $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

**8.** 两平行线 $Ax+By+C_1=0$、$Ax+By+C_2=0$ 间的距离为 $\dfrac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

**9. 直线系方程**

设两直线

$l_1: A_1x+B_1y+C_1=0,\ l_2: A_2x+B_2y+C_2=0.$

相交于 $P$，则对于任何过 $P$ 点的直线 $l$，存在不全为零的实数 $\lambda$、$\mu$ 使 $l$ 的方程可表示为

$\lambda(A_1x+B_1y+C_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2)=0.$

特别地，当 $l$ 不表示 $l_2$ 时，可取 $\lambda=1$.

**10.** 直线方程形式多样，解题时应着眼全局去考虑方程的选取. 在直线方程中，重要的是掌握直线的斜率和截距的意义，灵活利用其确定直线方程和判断两条直线的位置关系. 这些有关直线方程的基本问题，在数学竞赛中常有所体现.

## 例题精讲

**例1** 已知两点 $A(3,3)$，$B(-1,5)$，直线 $l: y=kx+1$ 与线段 $AB$ 有公共点，求实数 $k$ 的取值范围.

**分析1** 利用区间根原理.

**解法1** 线段 $AB: y-3=-\frac{1}{2}(x-3)(-1\leqslant x\leqslant 3)$.

由 $\begin{cases} y=kx+1, \\ y-3=-\frac{1}{2}(x-3), \end{cases}$

得公共点横坐标为 $x=\frac{7}{2k+1}$.

由 $-1\leqslant\frac{7}{2k-1}\leqslant 3$，得 $k\leqslant -4$，或 $k\geqslant\frac{2}{3}$.

**分析2** 利用定比分点坐标公式.

**解法2** 若公共点为 $A$，则 $3=3k+1$，所以 $k=\frac{2}{3}$.

若公共点为 $B$，则 $5=-k+1$，所以 $k=-4$.

若公共点在线段 $AB$ 内，设公共点坐标为 $\left(\frac{3-\lambda}{1+\lambda},\frac{3+5\lambda}{1+\lambda}\right)$，代入 $y=kx+1$，得 $\lambda=\frac{3k-2}{k+4}$.

由 $\lambda>0$，得 $\frac{3k-2}{k+4}>0$，所以 $k<-4$，或 $k>\frac{2}{3}$.

综上所述，$k$ 的取值范围是 $(-\infty,-4]\cup\left[\frac{2}{3},+\infty\right)$.

**分析 3** 利用数形结合思想.

**解法 3** 显然直线 $l$ 过定点 $(0,1)$.

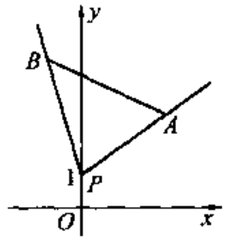


图 1-1

$\because k_{PA}=\frac{2}{3}$，$k_{PB}=-4$，

$\therefore$ 当直线 $PA$ 绕 $P$ 点逆时针旋转到 $y$ 轴时，斜率 $k$ 由 $\frac{2}{3}$ 增大到 $+\infty$；当直线 $PB$ 绕 $P$ 点顺时针旋转到 $y$ 轴时，斜率 $k$ 由 $-4$ 减少到 $-\infty$.

$\therefore k\geqslant\frac{2}{3}$ 或 $k\leqslant-4$. 如图 1-1 所示.

**点评** 以上三种解法都是解决此类问题的有效方法. 但对于此类选择题、填空题，还是用解法 3 方便.

**例 2** 对于直线上任意一点 $P(x,y)$，点 $Q(4x+2y,x+3y)$ 也在此直线上，求直线 $l$ 的方程.

**分析** 欲求 $l$ 的方程，需设出 $l$ 的方程，应用待定系数法，利用两条直线重合的条件求待定系数.

**解** 设 $P$ 点所在直线 $l$ 的方程为

$Ax+By+C=0$ ($A$，$B$ 不全为零).　①

$\because$ 点 $Q(4x+2y,x+3y)$ 也在直线上，

$\therefore A(4x+2y)+B(x+3y)+C=0$

即 $(4A+B)x+(2A+3B)y+C=0$.　②

易知，方程①、②表示同一条直线.

$$\therefore\begin{cases}A(2A+3B)=B(4A+B), & ③\\ BC=C(2A+3B). & ④\end{cases}$$

由 ① 得 $C=0$，或 $A+B=0$.

若 $C=0$，由 ③ 得 $B=A$，或 $B=-2A$，

$\therefore l$ 的方程为 $x+y=0$，或 $x-2y=0$.

若 $A+B=0$，由 ③ 得 $A=B=0$，矛盾.

$\therefore A+B\neq0$.

综上所述，$l$ 的方程为 $x+y=0$，或 $x-2y=0$.

**点评** 当直线 $A_1x+B_1y+C_1=0$ 与直线 $A_2x+B_2y+C_2=0$ 重合时，若用"$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$"，可能会出现分母为零的情况，还是应用"$\begin{cases}A_1B_2=A_2B_1,\\B_1C_2=B_2C_1\end{cases}$"保险.

**例 3** 经过点 $M(2,1)$ 作直线 $l$，分别交 $x$ 轴、$y$ 轴于 $A$、$B$，

(1) 若 $A$、$B$ 是 $l$ 与 $x$，$y$ 轴的正向的交点，求当 $\triangle AOB$ 的面积最小时，直线 $l$ 的方程.

(2) 当 $|MA|\cdot|MB|$ 最小时，直线 $l$ 的方程.

**分析** $\triangle AOB$ 面积的变动是因为直线绕点 $M$ 转动引起，确定直线还需要斜率或者一个角，用待定系数法.

**解** 直线在两轴上的截距不会为零，选用直线的截距式方程.

设所求的直线方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1(a>0,\ b>0)$，

(1) 由题意知 $1=\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\geqslant 2\sqrt{\frac{2}{ab}}$，即 $ab\geqslant 8$，故 $S_{\triangle}=\frac{1}{2}ab\geqslant 4$，当且仅当 $\frac{2}{a}=\frac{1}{b}$，即 $a=2b$ 时取得最小值. 从而 $b=2$，$a=4$，所以直线 $l$ 的方程为 $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1$.

(2) 设 $\angle BAO=\theta$，$\theta$ 为锐角. 过 $M$ 分别作 $x$，$y$ 轴的垂线，垂足分别为 $C$、$D$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle MAC$ 中，$|MA|=\frac{1}{\sin\theta}$，在 $\mathrm{Rt}\triangle MBD$ 中，$|MB|=\frac{2}{\cos\theta}$，$|MA|\cdot|MB|=\frac{4}{\sin 2\theta}$. 当 $\theta=45^\circ$，直线 $AB$ 的斜率为 $-1$ 时，$|MA|\cdot|MB|$ 最小，直线 $l$ 的方程为 $x+y-3=0$.

**思考** 去掉直线必须与坐标轴正半轴相交的条件限制，① 使 $\triangle AOB$ 面积为 4 的直线有几条？② 使 $\triangle AOB$ 面积为 8 的直线有几条？③ 使 $\triangle AOB$ 面积为 2 的直线有几条？为什么？

**例 4** 已知 $\triangle ABC$ 中，顶点 $A(2,1)$，$B(-1,-1)$，$\angle C$ 的平分线的方程是 $x+2y-1=0$. 求顶点 $C$ 的坐标.

**分析** 注意到三角形角平分线的性质，作与 $A$ 关于直线 $l$ 对称的点 $A'$，因为 $l$ 平分 $\angle ACB$，所以点 $A'$ 必在直线 $CB$ 上，这样可以先求出点 $A'$ 的坐标，

然后求出 $BA'$ 的方程，从而求出点 $C$ 的坐标.

**解** 设与 $A(2, 1)$ 关于直线 $x+2y-1=0$ 对称的点为 $A'(x', y')$，所以有 $\dfrac{y'-1}{x'-2}=2$，$\dfrac{x'+2}{2}+2\cdot\dfrac{y'+1}{2}-1=0$，解得 $x'=\dfrac{4}{5}$，$y'=-\dfrac{7}{5}$.

∴ $BA'$ 的方程为 $2x+9y+11=0$.

解方程组 $\begin{cases}2x+9y+11=0,\\ x+2y-1=0\end{cases}$

得 $x=\dfrac{31}{5}$，$y=-\dfrac{13}{5}$，这就是点 $C$ 的坐标.

**说明** (1) 本题解法较多. 如用"到角公式"，设 $\angle C$ 的平分线为 $l$，由于由直线 $CA$ 到 $l$ 的角等于直线 $l$ 到直线 $CB$ 的角，利用这一条件建立它们斜率间的关系式，从而求出点 $C$ 的坐标，设 $C(x_0, y_0)$，所以 $CA$、$CB$ 的斜率为 $K_{CA}=\dfrac{y_0-1}{x_0-2}$，$K_{CB}=\dfrac{y_0+1}{x_0+1}$，由题意，

得 $\dfrac{-\dfrac{1}{2}-\dfrac{y_0-1}{x_0-2}}{1-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{y_0-1}{x_0-2}}=\dfrac{\dfrac{y_0+1}{x_0+1}+\dfrac{1}{2}}{1-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{y_0+1}{x_0+1}}$. 化简时注意到 $x_0+2y_0=1$，

上式化简为 $2x_0-y_0-15=0$. 与 $x_0+2y_0-1=0$ 联立，解得 $x_c=\dfrac{31}{5}$，$y_c=-\dfrac{13}{5}$. 顶点 $C$ 的坐标为 $\left(\dfrac{31}{5}, -\dfrac{13}{5}\right)$.

请读者再给出两种解法.

(2) 凡是与角平分线有关的问题注意用"对称法". 设点 $M(x_0, y_0)$ 与点 $M'(x', y')$ 关于直线 $Ax+By+C=0$（$A$、$B$ 不全为零）对称，则有

$$\begin{cases}\dfrac{y'-y_0}{x'-x_0}=\dfrac{B}{A}(MM'\perp l);\\ A\cdot\dfrac{x'+x_0}{2}+B\cdot\dfrac{y'+y_0}{2}+C=0(MM'\text{ 的中点在 }l\text{ 上}).\end{cases}$$

解得 $x'=x_0-\dfrac{2A(Ax_0+By_0+C)}{A^2+B^2}$，

$y'=y_0-\dfrac{2B(Ax_0+By_0+C)}{A^2+B^2}$.

特别地，与点 $M(x_0, y_0)$ 关于直线 $y=x+b$（斜率为 1）对称的点就是 $(y_0-b, x_0+b)$；关于直线 $y=-x+b$（斜率为 $-1$）对称的点就是 $(-y_0+b,$

$-x_3-b)$.

**例 5** 已知直线 $l$ 经过点 $M(3, 2)$，与 $x$ 轴正向、射线 $y=4x(x>0$，不含端点)分别交于点 $A$、$B$，求当$\triangle AOB$ 面积最小时直线 $l$ 的方程.

**分析** 选择自变量建立函数关系式，求出函数最小值，其取得最小值时的自变量值就是确定直线的另一个条件.

**解** 点 $A$ 确定，直线 $AM$ 就确定. 设 $A(t, 0)$(以 $t$ 为自变量)，$AM$ 的方程为

$$y=\frac{2}{3-t}(x-t),$$

与 $y=4x$ 联立，解得 $\quad y=\frac{4t}{2t-5}$.

$\because\ y>0$，$\therefore\ t>\frac{5}{2}$.

$\triangle AOB$ 的面积 $S=\frac{2t^2}{2t-5}$.

设 $u=2t-5$(为使分母成为单项式)，则

$$S=\frac{(u+5)^2}{2u}=5+\frac{1}{2}\left(u+\frac{25}{u}\right)\geqslant 5+5=10,$$

等号在 $u=5$ 时成立，此时 $t=5$，直线 $AM$ 的方程为

$$x+y-5=0.$$

**思考** 为什么 $t>\frac{5}{2}$？$\triangle AOB$ 的面积有最大值吗？

**例 6** 如图 34-1，设 $A(0, a)$、$B(0, b)$是 $y$ 轴正半轴上的两个定点，其中 $a>b$，在 $x$ 轴正半轴上求一点 $C$，使$\angle ACB$ 最大.

**分析** 研究角的最大最小值的问题实际上是研究它的有关三角函数的最大最小值问题.

**解** 设 $M(x, 0)$，$x>0$. 由题意，直线 $MA$ 的斜率为 $-\frac{a}{x}$，直线 $MB$ 的斜率为 $-\frac{b}{x}$，则 $\tan\angle AMB=\dfrac{-\frac{b}{x}+\frac{a}{x}}{1+\frac{ab}{x^2}}=\dfrac{a-b}{x+\frac{ab}{x}}$.

$\because\ x>0$，$\therefore\ x+\frac{ab}{x}\geqslant 2\sqrt{ab}$，等号在 $x=\sqrt{ab}$ 时成立，即有 $\tan\angle AMB\leqslant\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}$，$\because\ \angle AMB$ 是锐角，$\therefore\ \angle AMB\leqslant\arctan\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}$，所以，当点C的坐标为

( $\sqrt{ab}$, 0) 时，$\angle AMB$ 最大，最大值是 $\arctan\dfrac{a-b}{2\sqrt{ab}}$.

**说明** (1) 本题也可以说成"足球射门"问题. 假设线段 $AB$ 代表球门，在 $x$ 轴上的球员应该站在何处射门容易射中.

(2) 利用平面几何结论是解决解析几何问题的重要方法之一.

如图 1-2，作 $\triangle AMB$ 的外接圆 $G$. 显然当点 $C$ 在圆内时，$\angle ACB > \angle AMB$，所以当圆 $G$ 与 $x$ 轴相切时，切点就是要找的点 $C$，此刻 $OC^2 = ab$，$OC = \sqrt{ab}$，点 $C(\sqrt{ab}, 0)$.

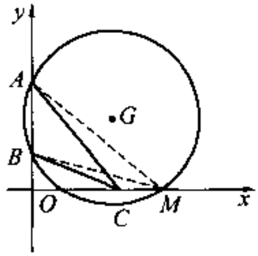


图 1-2

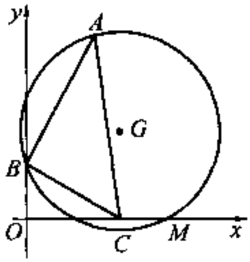


图 1-3

(3) 如图 1-3，把"$AB$ 与 $x$ 轴垂直"改成"$AB$ 与 $x$ 轴成角 $\alpha$"，仍然研究 $x$ 轴正半轴上的点 $C$ 在何处时，$\angle ACB$ 最大.

设 $B(0, b)$，点 $A(a\cos\alpha, b+a\sin\alpha)$（$\alpha$ 为锐角，线段 $AB$ 的长为 $a$），在 $x$ 轴正半轴上求一点 $C$，使 $\angle ACB$ 最大.

作出 $\triangle ABM$ 的外接圆，作出经过点 $M$ 的优弧. 假设线段 $AB$ 是一个学校大门的位置，当门卫工作人员在 $x$ 轴的正半轴巡逻时，在点 $C$ 处时视角最大.

**例 7** 设已知三条直线 $l_1$：$mx-y+m=0$；$l_2$：$x+my-m(m+1)=0$；$l_3$：$(m+1)x-y+(m+1)=0$，它们围成 $\triangle ABC$.

(1) 求证不论 $m$ 为何值，$\triangle ABC$ 有一个顶点为定点；

(2) 当 $m$ 为何值时，$\triangle ABC$ 面积有最大值、最小值.

**分析** 利用参数 $m$ 的任意性.

**解** (1) 把直线 $l_1$ 的方程 $mx-y+m=0$ 整理成 $m$ 的方程，得 $(x+1)m-y=0$，由于 $m$ 的任意性，有 $x=-1$，且 $y=0$，直线恒过点 $C(-1, 0)$.

由直线 $l_3$：$(m+1)x-y+(m+1)=0$，得 $(x+1)m+x-y+1=0$，由于 $m$ 的任意性，直线恒过点 $C(-1, 0)$.

可见 $\triangle ABC$ 顶点 $C$ 为定点.

(2) 注意到 $l_1 \perp l_2$, $AB \perp AC$, $B(0, m+1)$, $\triangle ABC$ 是直角三角形. 用点到直线的距离公式求出点 $C$ 到直线 $AB$ 的距离 $d_1 = \dfrac{|m^2+m+1|}{\sqrt{m^2+1}}$, 求出 $B$ 到 $AC$ 的距离 $d_2 = \dfrac{1}{\sqrt{m^2+1}}$.

$$\triangle ABC \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2} \cdot \frac{|m^2+m+1|}{m^2+1} = \frac{1}{2}\left|1+\frac{m}{m^2+1}\right|$$
$$= \frac{1}{2}\left|1+\frac{1}{m+\dfrac{1}{m}}\right|.$$

当 $m>0$ 时, $m+\dfrac{1}{m} \geqslant 2$, 等号在 $m=1$ 时成立, $S$ 有最大值 $\dfrac{3}{4}$; 当 $m<0$ 时, $m+\dfrac{1}{m} \leqslant -2$, 等号在 $m=-1$ 时成立, $S$ 有最小值 $\dfrac{1}{4}$.

**例 8** 在四边形 $ABCD$ 中, 对角线 $AC$ 平分 $\angle BAD$. 在 $CD$ 上取一点 $E$, $BE$ 与 $AC$ 相交于 $F$, 延长 $DF$ 交 $BC$ 于 $G$. 求证: $\angle GAC = \angle EAC$.

**分析** 建立直角坐标系, 用解析法. 注意基本量应该有 4 个, 其他都可以用它们来表示; 把证明两角 $\angle GAC$、$\angle EAC$ 的关系转化为证明直线的斜率关系.

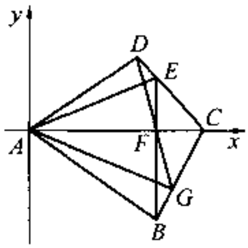

图 1-4

**证明** 图 1-4, 以 $A$ 为原点, 以直线 $AC$ 为 $x$ 轴, 建立直角坐标系. 设 $C(c, 0)$, $F(f, 0)$, $D(x_D, kx_D)$, $B(x_B, -kx_B)$.

则直线 $DF$ 的方程为

$$x - f + \frac{f - x_D}{kx_D} y = 0 \qquad ①$$

直线 $BC$ 的方程为

$$x - c + \frac{c - x_B}{-kx_B} y = 0 \qquad ②$$

$c \cdot ① - f \cdot ②$ 得

$$(c-f)x + \frac{1}{k}\left[cf\left(\frac{1}{x_D}+\frac{1}{x_B}\right)-(c+f)\right]y = 0 \qquad ③$$

③表示一条直线, 它过原点 $A$, 也过 $DF$ 与 $BC$ 的交点 $G$, 因而③就是直线 $AG$ 的方程.

同样可得直线 $AE$ 的方程为

$$(c-f)x-\frac{1}{k}\left[cf\left(\frac{1}{x_D}+\frac{1}{x_B}\right)-(c+f)\right]y=0 \qquad ④$$

③、④的斜率互为相反数，所以$\angle GAC=\angle EAC$.

**说明**　本题利用“直线串”的思想，由①、②导出 $AG$ 的方程③. 这比求交点 $G$ 的坐标要简单许多.

**例 9**　已知 $AM$ 是$\triangle ABC$ 的边 $BC$ 上的中线，任作一直线顺次交 $AB$，$AC$，$AM$ 于 $P$，$Q$，$N$. 求证：$\frac{AB}{AP}$，$\frac{AM}{AN}$，$\frac{AC}{AQ}$成等差数列.

**证明**　作 $AO\perp BC$ 交 $BC$ 于 $O$. 分别以 $BC$，$AO$ 所在直线为 $x$ 轴和 $y$ 轴建立坐标系(如图 1-5). 设

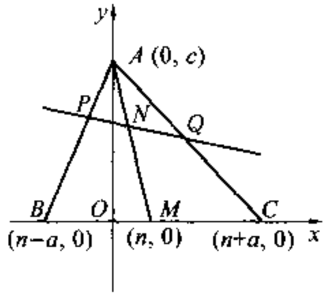

图 1-5

$A(0,c)$，$M(n,0)$，$C(n+a,0)$，$B(n-a,0)$，直线 $PQ$ 的方程为

$$kx-y+b=0. \qquad (1)$$

又设$\frac{AP}{PB}=\lambda$，$P$ 的坐标为$(x_1,y_1)$，则

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{\lambda(n-a)}{1+\lambda}, \\ y_1=\dfrac{c}{1+\lambda}. \end{cases}$$

代入(1) 得 $\lambda=\frac{c-b}{k(n-a)+b}$，

所以
$$\frac{AB}{AP}=\frac{k(n-a)+c}{c-b}.$$

同理
$$\frac{AM}{AN}=\frac{kn+c}{c-b},\ \frac{AC}{AQ}=\frac{k(n+a)+c}{c-b}.$$

所以
$$2\cdot\frac{AM}{AN}=\frac{AB}{AP}+\frac{AC}{AQ}.$$

**例 10**　在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$AD$ 是斜边上的高，$M$，$N$ 分别是$\triangle ABD$ 与$\triangle ACD$ 的内心. 连接 $MN$ 并延长分别交 $AB$ 与 $AC$ 于 $K$ 及 $L$. 求证：

$$S_{\triangle ABC}\geqslant 2S_{\triangle AKL}$$

**证明**　分别以 $AC$、$AB$ 所在直线为 $x$ 轴和 $y$ 轴建立直角坐标系，并记

$$|AC|=a,\ |AB|=b,\ |OD|=c，则\ c=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

设 $\triangle ACD$，$\triangle ABD$ 的内切圆半径分别为 $r_1$，$r_2$，则 $N$、$M$ 的坐标分别为 $N(c-r_1, r_1)$，$M(r_2, c-r_2)$. 于是直线 $MN$ 的斜率为

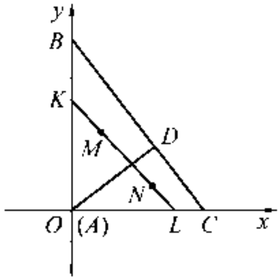

图 1-6

$$k_{MN}=\frac{c-r_2-r_1}{r_2-c+r_1}=-1$$

这说明 $\triangle AKL$ 为等腰直角三角形(如图 1-6)，直线 $MN$ 的方程为

$$y-r_1=-(x-c+r_1)$$

其横、纵截距均为 $c$. 所以

$$2S_{\triangle AKL}=c^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\leqslant\frac{a^2b^2}{2ab}=\frac{1}{2}ab=S_{\triangle ABC}$$

**例 11** 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，分别以直角边 $AB$ 和斜边 $BC$ 为一边向两侧作正方形 $ABDE$ 和 $BCFG$. 求证：$GA\perp DC$.

**证明** 以 $B$ 为原点，直线 $BC$ 为 $x$ 轴建立直角坐标系(图 1-7). 设 $A(b, c)$，$C(a, 0)$，$G(0, a)$，$D(x_0, y_0)$，则直线 $AB$，$BD$ 的斜率分别为 $k_{AB}=\frac{c}{b}$，$k_{BD}=\frac{y_0}{x_0}$.

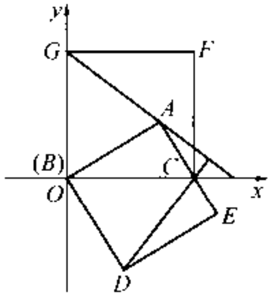

图 1-7

因为 $AB\perp BD$，所以 $k_{AB}\cdot k_{BD}=\frac{c}{b}\cdot\frac{y_0}{x_0}=-1$，

即 $\quad bx_0+cy_0=0. \qquad (1)$

直线 $AB$ 的方程为 $cx-by=0$. $D$ 点到 $AB$ 的距离等于 $|BD|=|AB|$，所以 $\frac{|cx_0-by_0|}{\sqrt{c^2+b^2}}=\sqrt{b^2+c^2}$，

即 $cx_0-by_0=\pm(b^2+c^2). \qquad (2)$

由(1)、(2) 解得 $\quad x_0=c$，$y_0=-b$.

所以 $k_{CA}\cdot k_{DC}=\frac{c-a}{b}\cdot\frac{-b}{c-a}=-1$.

故 $GA\perp DC$.

**例 12** 证明：无论 $\lambda$ 取何值，直线

$$(2+\lambda)x-(1+\lambda)y-2(3+2\lambda)=0$$

与点 $P(-2, 2)$ 的距离 $d$ 都只能小于 $4\sqrt{2}$.