高校经典教材同步辅导

九章丛书

经济应用数学基础（三）

概率论与数理统计

人大修订本第二版

辅导及习题全解

主编／杨富云　孙怀东
编写／九章系列课题组

★知识点穷 ★逻辑推理
★习题全解 ★全真考题
★名师执笔 ★题型归类

新版

人民日报出版社

高校经典教材同步辅导

经济应用数学基础(三)

概率论与数理统计

(人大修订本第二版)

辅导及习题全解

主编　杨富云　孙怀东

主审　战　扬

编写　九章系列课题组

赵志新　曹伊悦

杨威平　康　伟

人民日报出版社

图书在版编目(CIP)数据

高校经典教材同步辅导·概率论与数理统计(人大修订本第二版)/杨富云,孙怀东主编. 一北京:人民日报出版社,2004.4
ISBN 7-80153-865-X

Ⅰ.高… Ⅱ.①杨…②孙… Ⅲ.高校一教学参考资料
Ⅳ.G624

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 030530 号

高校经典教材同步辅导·概率论与数理统计(人大修订本第二版)

主　　编:杨富云　孙怀东
责任编辑:安　申
封面设计:伍克润

出版发行:人民日报出版社(北京金台西路 2 号/邮编:100733)
经　　销:新华书店
印　　刷:

字　　数:327 千字
开　　本:850×1168　1/32
印　　张:12.75
印　　数:3000
印　　次:2005 年 8 月第 1 次印刷

书　　号:ISBN 7-80153-865-X/G·479
定　　价:13.80 元(全五册·128.00 元)

前　言

概率论和数理统计是研究随机现象客观规律的数学学科，是高等院校的一门重要数学基础课。通过本课程，培养学生运用概率统计方法分析和解决实际问题的能力。概率统计方法广泛应用于科学技术、经济管理、工农业生产和社会人文等诸多领域。因而学好概率统计的各种方法与理论非常重要。

本书主要是配套人大修订版的《概率论与数理统计》教材，针对每章内容，精选各种具有代表性的例题，并按章节附有历年考研真题，内容齐全，题型多样，从读者的角度出发，帮助大家来解决学习过程中遇到的种种疑难。

此书的特点在于选题上的精，针对每一章的内容，归纳出若干题型，每一题型中的选题不赘余，达到掌握该种方法的效果即可。书中不仅题型多样，而且在难易程度上由浅入深，由易到难。为方便广大读者查找，本书还将各题型题目列入目录，使人一目了然。此外，每一题大体上分成“知识点窍”、“逻辑推理”和“解题过程”三个部分，既有点睛之处，又有详尽解答。

本书给出了教材中全部课后习题的详细解答，以帮助广大读者掌握并巩固理论知识与解题方法，扩充大脑思维。相信本书能给各位读者以启迪，更好地掌握概率统计

方法。除了作为辅助教材和复习参考书外，本书还可以为准备报考硕士研究生的考生提供一些帮助。

在成书过程中，编者参考了众多优秀的著作和教材，由于篇幅所限，未能一一列出，在此谨向有关作者表示衷心感谢。

由于时间较仓促，编者水平有限，难免书中有疏漏之处，敬请各位同行和读者给予批评、指正。

编者

2005 年 6 月

目　录

第一章　随机事件及其概率

一、基本要求

1. 熟悉随机事件、频率的概念以及概率的定义；

2. 掌握随机事件的各运算法则，包括交换律、结合律、分配律及吸收律等等；

3. 理解样本空间和样本点的概念；

4. 掌握概率的古典定义，学会计算古典型概率问题；

5. 理解并掌握概率的基本性质；

6. 掌握概率的加法公式、乘法公式、全概率公式及贝叶斯公式；

7. 能利用乘法公式和事件的独立性计算有关积事件的概率；

8. 能利用全概率公式和贝叶斯公式计算概率；

9. 理解独立重复试验的概念以及 n 重贝努利试验的含义；

10. 了解二项概率公式及其运用.

二、基本概念与公式

1. 随机试验

满足下列三个条件的试验称为随机试验，常用 E 来表示.

(1) 在相同条件下可以重复进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，并且事先可以知道试验的所有可能结果；

(3) 进行一次试验之前不能确定出现的是哪个结果.

2. 随机事件

在随机试验中，可能发生也可能不发生的结果称为随机事件，常用 $A,B,C,\cdots$ 表示.

(1) 基本事件：在一个试验中，总可以从结果中找到一组基本结果，满足：

① 每进行一次试验，必须出现且只能出现一个基本结果；

② 任何事件,都是由其中的一些基本结果所组成.

随机试验中的每一个基本结果是一个随机事件,称为基本事件.

(2) 复合事件:由多个基本事件构成的事件称为复合事件.

(3) 必然事件:在每次试验中一定发生的事件称为必然事件,用 Ω 来表示.

(4) 不可能事件:在每次试验中一定不发生的事件称为不可能事件,用 $\varnothing$ 来表示.

3. 样本点和样本空间

基本事件又称为样本点,记为 w;随机试验 E 的全体样本点组成的集合称为样本空间,记为 Ω. 随机事件即为样本空间的一个子集.

4. 事件之间的关系及运算

(1) 相等:$A \subset B$ 且 $B \subset A$,则称事件 A 与事件 B 相等,记为 $A = B$.

(2) 和事件:事件 A 与事件 B 至少有一个发生,这一事件称为 A 与 B 的和事件,记为 $A \cup B$ 或 $A + B$.

(3) 积事件:事件 A 与事件 B 同时发生,这一事件称为 A 与 B 的积事件,记为 $A \cap B$ 或 AB.

(4) 差事件:事件 A 发生而事件 B 不发生,这一事件称为 A 与 B 的差事件,记为 $A - B(= A\overline{B} = A - AB)$.

(5) 逆事件(对立事件):事件 A 不发生称为 A 的逆事件,记为 $\overline{A}(= \Omega - A)$. 即在每次试验中,$A$ 与 $\overline{A}$ 有且仅有一个发生.

(6) 互斥事件(互不相容事件):事件 A 与事件 B 不同时发生称为 A 与 B 互斥,即 $A \cap B = \varnothing$. 若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互斥,即 $A_i \cap A_j = \varnothing (i \neq j)$,则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为互斥事件组. 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 互斥,且 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$,则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为完备事件组.

5. 概率的定义

(1) 统计定义

在 n 次重复试验中,若事件 A 发生了 m 次,则称 $\frac{m}{n}$ 为事件 A 发生的频率. 在相同的条件下,重复进行 n 次实验,随着 n 的不断增大,事件 A 发生的频率会稳定的趋于某一常数 p,则称常数 p 为事件 A 的概率,记为 $P(A)$.

(2) 古典定义

若随机试验满足:① 有限性,即样本空间中基本事件的个数有限,$S = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$;② 等可能性,即基本事件发生的可能性相等,$P(e_1) = P(e_2) =$

$\cdots = P(e_n)$，则称之为古典概型，此时，若 Ω 中有 n 个基本事件，A 中有 m 个基本事件，则事件 A 的概率为 $P(A)=\frac{m}{n}$. 这里 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 是一完备事件组.

6. 概率的性质

(1) $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$；

(2) $P(\varnothing)=0$；

(3) $P(A)+P(\overline{A})=1$；

(4) 可列可加性：设 $A_1,A_2,\cdots$，是一列两两互不相容的事件，即

$$A_iA_j=\varnothing,(i \neq j),i,j=1,2,\cdots$$

有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots.$$

(5) 有限可加性：设 $A_1,A_2,\cdots A_n$ 是 n 个两两互不相容的事件，即

$$A_iA_j=\varnothing,(i \neq j),i,j=1,2,\cdots,n$$

则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n);$$

(6) 单调不减性：若事件 $A \subset B$，则

$$P(A) \leqslant P(B)$$

(7) 事件差：设 A、B 是两个事件，则

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)$$

(8) 加法公式：对任意两事件 A、B，有

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB),$$

该公式可推广到任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的情形；

(9) 可分性：对任意两事件 A、B，有

$$P(A)=P(AB)+P(A\overline{B}).$$

7. 条件概率的定义、性质及乘法公式

(1) 定义

设 A、B 为两个事件，且 $P(B)>0$，则称 $\frac{P(AB)}{P(B)}$ 为事件 B 发生的条件下事件 A 发生的条件概率，记为

$$P(A \mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

(2) 性质

根据条件概率定义，不难验证它具有下列三个性质，即

① $P(A \mid B) \geqslant 0$；

② $P(\Omega \mid B)=1$；

③ 若事件 $A_1, A_2, \cdots$ 是两两互不相容的，则

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \mid B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \mid B)$$

(3) 概率的乘法公式

设有事件 A 和 B，若 $P(A) > 0$ 或 $P(B) > 0$，则由条件概率定义，得

$$P(AB) = P(A)P(B \mid A),$$

或

$$P(AB) = P(B)P(A \mid B).$$

一般地，设事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，若 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1}) > 0$，则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2)\cdots P(A_n \mid A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

8. 全概率公式与贝叶斯公式

设 Ω 为随机试验 E 的样本空间，$B_1, B_2, \cdots$ 为 Ω 的一个完备事件组，设 A 为样本空间 Ω 的事件，且 $P(B_i) > 0 (i = 1,2,\cdots)$，则

(1) $P(A) = P(B_1)P(A \mid B_1) + P(B_2)P(A \mid B_2) + \cdots$

称为全概率公式.

(2) $$P(B_i \mid A) = \frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(B_i)P(A \mid B_i)} \quad i = 1,2,\cdots$$

称为贝叶斯公式或逆概率公式.

9. 事件的独立性

若 $P(AB) = P(A)P(B)$，则称事件 A 与事件 B 相互独立. n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，若 $\forall i \neq j$，A_i 与 A_j 独立，则称这 n 个事件两两相互独立；若 $P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$，$1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$，$2 \leqslant k \leqslant n$ 均成立，则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立.

注 ① 事件 A 与事件 B 独立，则 A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 亦相互独立.

② $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立与 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两相互独立是不同的概念，前者蕴涵后者，但反之不真.

③ A 与 B 相互独立 $\Leftrightarrow P(B \mid A) = P(B)$ $(P(A) > 0)$.

④ $P(B \mid A) = 1 - P(\overline{B} \mid A)$ $(P(A) > 0)$；

$P(A_1 + A_2 \mid B) = P(A_1 + B) + P(A_2 \mid B) - P(A_1A_2 \mid B)$.

10. 贝努利概型

(1) 独立重复试验序列：

在相同条件下将同一试验重复做 n 次，且这 n 次试验是相互独立的，每次试验的结果只有两个：A、$\overline{A}$，这样的试验称为 n 重贝努利概型.

(2) 二项概率公式：

在贝努利概型中，设事件 A 发生的概率为 $p(0<p<1)$，则 n 次试验中 A 发生了 k 次的概率为

$$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}, k=0,1,2,\cdots,n.$$

此公式称为二项概率公式.

三、重点与难点

1. 随机事件的概念；
2. 概率的定义(统计定义，古典定义)；
3. 古典概率；
4. 条件概率的性质及计算；
5. 全概率公式与贝叶斯公式的计算应用；
6. 事件的独立性与二项概率公式.

四、典型题型的解题方法与技巧

题型(一)　事件的表示方法及其运算

【解题提示】 事件是空间的子集，因此要想正确的表示事件必须首先写出正确的样本空间，并进而弄清楚不同事件之间的关系；对于事件的运算，其与集合运算相对应.

【例 1－1】 连续进行三次独立射击，设 A_i“第 i 次射击命中”，$i=1,2,3$；B_j 恰好命中 j 次”，$j=0,1,2,3$；$C_k=$“至少命中 k 次”，$k=0,1,2,3$.

(1) 试用 A_i 表示 B_j 和 C_k；$i=1,2,3$，j、$k=0,1,2,3$.

(2) 试用 B_j 表示 C_k；j、$k=0,1,2,3$.

【解】 (1) $B_0=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$；　$B_1=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3$；

$B_2=A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3$；　$B_3=A_1A_2A_3$；

$C_0=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3+A_1+A_2+A_3$；　$C_1=A_1+A_2+A_3$；

$C_2=A_1A_2+A_1A_3+A_2A_3$；　$C_3=A_1A_2A_3$.

(2)
$$C_0=B_0+B_1+B_2+B_3;$$
$$C_1=B_1+B_2+B_3;$$
$$C_2=B_2+B_3;$$

$$C_3 = B_3.$$

【点评】 由本例可见

$A_1 + A_2 + A_3 = B_0 + B_1 + B_2 + B_3 = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3 + A_1A_2A_3$;

等式左端是三个相容事件的和,而右端各项互不相容,就是说任意事件的和,可以化为不相容事件的和,这在计算概率时是经常应用的,一般方法如下:

设 A,B,C 为任意事件,则

$$A+B = A+(B-A) = A+B\overline{A}.$$

$$A+B+C = A+(B-A)+(C-A-B) = A+B\overline{A}+C\overline{A}\overline{B}.$$

【例 1-2】 在电炉上安装了 4 个温控器,其显示温度的误差是随机的.在使用过程中,只要有两个温控器显示的温度不低于临界温度 t_0,电炉就断电.以 E 表示事件"电炉断电",而 $T_{(1)} \leqslant T_{(2)} \leqslant T_{(3)} \leqslant T_{(4)}$ 为 4 个温控器显示的按递增顺序排列的温度值,则事件 E 等于.

(A) $\{T_{(1)} \leqslant t_0\}$ (B) $\{T_{(2)} \leqslant t_0\}$ (C) $\{T_{(3)} \leqslant t_0\}$ (D) $\{T_{(4)} \leqslant t_0\}$

【解】 由题意可知只有两个温控器显示的温度不低于临界温度 t_0,事件 E 就发生.由于 $T_{(1)} \leqslant T_{(2)} \leqslant T_{(3)} \leqslant T_{(4)}$,$\{T_{(1)} \geqslant t_0\}$ 表示 4 个温控器显示的温度都不低于 t_0;$\{T_{(2)} \geqslant t_0\}$ 表示至少有 3 个温控器显示的温度都不低于 t_0;$\{T_{(3)} \geqslant t_0\}$ 表示至少有两个温控显示器的温度不低于 t_0;$\{T_{(4)} \geqslant t_0\}$ 表示至少一个温控器显示的温度不低于 t_0.因此仅选(C).

题型(二) 随机试验的样本空间的描述

【解题提示】 随机试验具有以下三种特点:① 可以在相同的条件下重复地进行;② 每次试验的可能结果不止一个,且能事先明确试验的所有可能结果;③ 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.随机试验的每一个可能结果称为随机事件,相对于观察目的不能再分解的事件称为基本事件.所有基本事件的全体称为样本空间,记做 Ω(或 S).

【例 1-3】 将一颗骰子连掷两次,观察其掷出的点数.令 $A=\{$两次掷出的点数相同$\}$,$B=\{$点数之和为 10$\}$,$C=\{$最小点数是 4$\}$.

(1) 写出试验的样本空间;

(2) 用样本点表示事件 A,B,C 以及 $A\cup B, ABC, A-C, C-A, B\overline{C}, A\cup(BC)$.

【解】 (1) 每次掷骰子都有 6 个可能结果,令第一次出现 1 点,且第二次出现 1 点的表示方法为"11",其他类似,因此样本空间可表示为

$$\Omega = \{11,12,\cdots,16,21,22,\cdots,26,\cdots,61,62,\cdots,66\},$$

Ω 共包含有 36 个元素.

(2) 通过以上分析可知 $A=\{11,22,33,44,55,66\}$;$B=\{46,55,64\}$,C

$=\{44,45,46,54,64\}$. $A\cup B=\{11,22,33,44,55,66,46,64\}$,

$ABC=\varnothing$,

$A-C=\{11,22,33,55,66\}$,

$C-A=\{45,46,54,64\}$,

$B\overline{C}=\{55\}$,

$A\cup(BC)=\{11,22,33,44,55,66,46,64\}$.

【例 1－4】 写出下列随机试验 E 的样本空间 Ω，如果 Ω 是有限集，计算样本空间的容量 V_Ω（Ω 中样本点的总数目）：

(1) E：一个小班进行一次数学考试，试录其平均成绩（百分制）；

(2) E：10 件产品中有 3 件是次品，每次从该 10 件中任取 1 件（取后不放回），直将 3 件次品都取出为止，记录抽取的次数；

(3) E：连续生产某种产品，直到生产出 10 个正品为止，记录产品总件数；

(4) E：某射击手向靶射击，直到击中为止，记录击中的各种情况；

(5) E：向 xoy 平面上的单位圆内（$x^2+y^2<1$）投点，记录落点的坐标．

【解】 (1) 试验 E 的样本空间为 $\Omega=\frac{0}{n},\frac{1}{n},\frac{2}{n},\cdots,\frac{1000\cdot n}{n}$，$n$ 为小班人数，

因此，样本空间的容量为 $V_\Omega=100n+1$；

(2) 试验 E 的样本空间为 $\Omega=\{3,4,\cdots10\}$，因此，样本空间的容量为 $V_\Omega=8$；

(3) 试验 E 的样本空间为 $\Omega=\{10,11,12,\cdots\}$；

(4) 用 ω_i 表示第 i 次击中，$\overline{\omega_i}$ 表示第 i 次不中，则试验 E 的样本空间为

$$\Omega=\{\omega_1,\overline{\omega_1}\,\omega_2,\overline{\omega_1}\,\overline{\omega_2}\,\omega_3,\cdots,\overline{\omega_1}\,\overline{\omega_2}\cdots\overline{\omega_{n-1}}\,\omega_n,\cdots\}$$

Ω 为无限集；

(5) 试验 E 的样本空间为 $\Omega=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$.

题型(三)　事件运算的性质的应用

【解题提示】 事件运算的性质主要包括事件之间的交换律、结合律、分配律及摩根律，此外在事件关系运算中还有 ①$A=AB+A\overline{B}$，其中 AB 与 $A\overline{B}$ 互不相容；②A,B 互不相容，$A-B=A,AB=\varnothing$；③$A\supset B$ 时，$A+B=A,AB=B$.

【例 1－5】 设袋内有 10 个编号为 $1\sim10$ 的球，从中任取一个，观察其号码：

(1) 写出此试验的样本空间；

(2) 若 A 表示"取得的球的号码是奇数"，B 表示"取得的球的号码是偶数"，C 表示"取得的球的号码小于 5"，则：①$A\cup B$，②AB，③$\overline{C}$，④$\overline{A}\,\overline{C}$，⑤