中国科学院规划教材

ZHONGGUO KEXUEYUAN GUIHUA JIAOCAI

数理经济学精要

——经济理论中的最优化数学分析

邵宜航 编著

科学出版社

www.sciencep.com

中国科学院规划教材

数理经济学精要

——经济理论中的最优化数学分析

邵宜航 编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

经济学作为研究经济现象的科学，其主要内容是通过研究经济中各行为者的理性(最优)选择，探讨如何实现有限资源的有效配置。因此，最优化数学是天然的最合适的经济理论分析语言。本书力求精练、系统地介绍作为现代最优化理论主要内容的非线性规划、变分法、最优控制理论、动态规划的基本原理与方法及其在微观经济学和宏观经济学中的应用。

本书适合作为经济学和相关专业的高年级本科生和研究生的教材或参考书，也可供对经济学和最优化数学感兴趣的读者参考。

图书在版编目(CIP)数据

数理经济学精要：经济理论中的最优化数学分析/邵宜航编著．—北京：科学出版社，2007

中国科学院规划教材

ISBN 978-7-03-020105-8

Ⅰ．数…　Ⅱ．邵…　Ⅲ．数理经济学-高等学校-教材　Ⅳ．F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 146642 号

责任编辑：林　建　卜　新/责任校对：张怡君

责任印制：张克忠/封面设计：耕者设计工作室

科 学 出 版 社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

新 蕾 印 刷 厂 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2007 年 10 月第 一 版　　开本：B5(720×1000)

2007 年 10 月第一次印刷　　印张：9 3/4

印数：1—3 500　　字数：181 000

定价：22.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈新欣〉)

前 言

在现代经济理论分析中，数学方法的应用已经不可或缺。数理经济学的概念也从原来狭义的关于瓦尔拉斯一般均衡体系的数学研究扩展到现今泛指利用数学方法和概念进行分析演绎的经济学。实际上，现在数理经济学涉及的数学和经济学的分支领域之广泛（目前还在发展中），已经使我们无法在一本书中对其主要内容加以罗列。本书主要介绍作为现代经济学理论基础的微观经济学和宏观经济学所必须使用的最优化数学方法。

简略地说，经济学是探讨经济中各行为者选择的科学，而最优化数学是研究最优选择的方法，所以二者具有天然的紧密关联性。对本书所讨论的最优化数学基本方法的掌握实际上已经成为理解现代经济学的前提条件，这一点只要翻开现在的中、高级微观经济学和宏观经济学教材就可以得到确认。如同多数数理经济学教材一样，本书也包括数学原理与方法的介绍和在经济学中的应用分析两个方面。但本书更突出以下特点：其一，在数学方法介绍方面，我们力求对最优化数学理论进行系统、精练且具有一定理论深度的介绍。我们相信，要达到能真正应用最优化数学方法分析经济学问题，就必须对其数学理论体系有一定程度的深入理解。当然，在部分细节上，有时为求简洁和易解，也将放弃一些严密性，但这些部分的简略并不影响数学结论的正确性及其在经济理论分析上的可应用性。其二，在经济学应用分析方面，我们更注重在经济理论分析中的应用，注重数学作为理论的逻辑分析语言而非计算工具的作用。本书的许多应用例子实际上就是现代微观经济学和宏观经济学的相关内容的数理描述。对初学者而言，本书的部分数理展开和经济学理论的深入探讨可能一时难以掌握，但忽略这些内容，并不影响初学者对最优化基本方法及其经济学应用的系统了解。书中带星号的节或小节相对较难，初学者

可以省略。

本书是几年来笔者在日本国立埼玉大学和中国厦门大学为高年级本科生和研究生开设的有关课程讲义内容的基础上写成的，可以作为经济学相关专业高年级本科生和研究生的教材，也可供对现代经济学和最优化数学感兴趣的读者参考。

本书参考了许多经济学和数学专业书籍与论文，在书中恕不一一列举。其中，主要参考书籍列入参考文献。这些专业书籍也可作为读者对相关内容进一步学习的参考资料。本书在成稿过程中得到许多老师和同学的有益建议和帮助，特别是我的研究生刘雅南、丁锦秀和李纲等在对本讲义前后几稿的阅读修正和部分文稿的打印等方面提供了很大的帮助。另外，厦门大学经济系基地班的许多本科生对本讲义的准确理解与掌握也给了笔者很大的鼓励和支持。同时，本书得到了教育部留学回国人员科研启动基金和厦门大学精品课程建设基金的资助。科学出版社编辑林建、卜新对本书的出版也给予了很大的帮助。在此，一并深表感谢。

最后，不妥与错误之处，还请各位读者指正。

邵宜航

2007 年 3 月于厦门大学海滨

目　录

前言

第1部分　静态最优化理论及其应用

第2部分 动态最优化理论及其应用

绪　论

0.1　关于数理经济学

数理经济学有广义和狭义的不同含义。广义上，指运用数学概念和方法进行经济分析，解释经济学现象的理论。狭义上，特指瓦尔拉斯开创的一般均衡理论体系。在目前数学已经被广泛应用的现代经济学体系中，广义的定义可能更为恰当。

一般而言，所谓理论应包括一定的前提假设和该假设下的通过逻辑分析而得出的结论。借助数学模型研究经济理论更有利于明确理论的前提条件，使逻辑分析严谨准确，理论表述简洁明了，更易于通过模型修正进行理论拓展，更便于发展出用于实证分析的计量模型，以利理论与实证的结合。此外，运用数学模型讨论经济问题，还有利于进行规范的学术论争，促进学术发展。正因为数理分析具有上述优点，现代经济学研究才越来越多地引入数学。马克思曾指出：一门科学，只有当它成功地运用数学时，才能达到真正完善的地步①。大量数学的使用将使经济学理论日臻成熟，也是现代经济学与传统经济学区别的主要标志之一。从今天的数学与经济学、经济学与社会发展的关联性来看，也许可以从另一个侧面印证历史伟人拿破仑的一句名言：数学的进步和完美与国家的繁荣和富强是紧密相连的。

在经济学中还有一门与数学密切相关的学科——计量经济学，它与数理经济学时常被混淆。实际上，计量经济学与经济数据有关，它主要利用数理统计等方法对经济现象进行实证分析，数理经济学则是把数学应用于理论分析。计量经济学有较明确范围的计量分析方法，而数理经济学利用的数学方法则涉及数学的许多

---

① 马克思的这句名言常被引用，实际上康德(Kant)说过类似的名言：在知识的每个分支中，哪里有多少数字，哪里就有多少真正的科学。

分支:微积分学、线性代数、数学规划、微分方程、概率论、控制理论、泛函分析、测度论、拓扑学等。甚至数理经济研究本身也会产生新的数学分支,如对策论等。所以,不同的数理经济学教材所包含的数学内容及其应用可能存在很大差异。本书要讨论的则主要是在微观经济学和宏观经济学中经常使用的最优化数学分析方法。

经济学作为研究经济现象的科学,可以定义为研究有限资源的有效(最优)配置的学问。因此,许多经济学问题可以表示为数学的最优化问题。例如,微观经济学中最为基本的消费需求分析,生产利润和成本分析等都可借助数学的非线性规划问题来表述。而在宏观经济学领域,现在作为考察经济长期增长和波动的基本分析框架之一的 Ramsey 最优增长模型则可表述为数学的最优控制问题。一般而言,现代最优化数学理论主要包括非线性规划、变分法、最优控制理论和动态规划,本书将集中介绍这些最优化理论的基本原理和方法及其在经济学理论分析中的应用。

以上我们强调了数学的重要性,但要认识到数学在经济学研究中只是工具和语言,我们最终要研究的是经济学问题而不是数学问题。因此,探讨如何用数学语言准确、精练地描述经济学问题,并推敲通过数理分析而导出的数学关系式所表达的经济学含义,由此揭示经济活动的规律性才是数理经济学的本质所在。我们必须认识到,绝大多数利用数学展开分析的经济学研究的学术价值在于其经济学思想,而非数学方法和技巧,不能把数理经济学肤浅地理解为应用数学。

最后,数学作为科学研究的语言(伽利略名言:数学是上帝用来书写宇宙的语言),我们建议读者在学习数学时,注意到它其实也有语言学习的特性。就如学习外语,如果你的目的主要是在应用而不是想成为语言学家,那么对其基础部分的掌握并不是十分困难但却是非常有效的。同时,学习数学也存在适应和习惯的过程。在学习了本书所讨论的基本原理之后,尽量接触用数学语言描述的经济学文献将会使你事半功倍。

0.2 经济学问题的数学表示

我们将观察一些用数学最优化模型表述的经济学基本问题。此前,我们首先看看何为最优化问题?如何利用数学语言描述?

0.2.1 数学的最优化问题

简单而言,所谓最优化问题是“在关于变量的约束条件下,寻找使目标值最大化或最小化的变量”的问题。

目标值的变化可用函数表示,这样的函数称为目标函数。若约束条件可表示

为等式或不等式约束时，则最优化问题可表示为

(P) 目标函数	$\min\limits_{x}(\max):F(x)$
约束条件	s. t. (subject to)：$G(x)\leqslant 0$
	$H(x)=0$

其中，$F(x):X\to R$，$G(x):X\to Y$，$H(x):X\to Z$。这里，x 为选择变量，X 为变量 x 的取值空间(范围)，R 为实数空间。X、Y、Z 可为有限维(n 维)实数空间 R^n 或无限维函数空间等。该问题表示：在满足约束条件 $G(x)\leqslant 0$ 和 $H(x)=0$ 的所有 x 中，寻求使目标值 $F(x)$ 最小(或最大)的 x。

一般地，称满足所有约束条件的变量 x 为可行解或许可解，在所有的可行解中，使目标函数值最小(或最大)的可行解称为最优解或全局最优解。相对于全局最优解，还有局部最优解的概念。局部最优解的准确定义将在后面给出，粗略而言，局部最优解指的是一可行解的目标函数值比起在自己周围(某一局部)的其他所有可行解的目标函数值更优。

当变量空间 X 和约束条件中函数的取值空间 Y、Z 均为有限(维)空间时，上述最优化问题(P)一般称为非线性规划问题(Nonlinear Programming, NLP)。$X=R^n$ 空间的非线性规划问题一般可表述如下：

(NLP)

$$\min: f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

$$\text{s. t.}: g(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{bmatrix} g_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\ g_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\ \vdots\\ g_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)\end{bmatrix}\leqslant\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix}=0$$

$$h(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{bmatrix} h_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\ h_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\ \vdots\\ h_l(x_1,x_2,\cdots,x_n)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix}=0$$

其中，$f:R^n\to R$；$g_i:R^n\to R, i=1,\cdots,m$；$h_j:R^n\to R, j=1,\cdots,l$。对应于该非线性规划问题，(P)的目标函数为 $F(x):=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$①。

特别是，若非线性规划问题(NLP)中的相关函数 f,g,h 均为线性函数时，则称为线性规划问题(Linear Programming)，显然线性规划问题是非线性规划问题

① $:=$ 表示“定义为”，表示等号右边为左边的定义。若等号左边为右边的定义，则可写作 $=:$。本书下同。

的一个特例。

当变量空间 X 为函数空间时，借用上述术语，最优化问题(P)也可称为函数空间的非线性规划问题。对于函数空间的最优化问题，实际上，在微积分诞生后不久就受到了关注，并产生了变分法理论。以下是简单的变分法问题(Calculus of Variations)，它寻求符合端点条件的使目标积分值最小的函数。

(CVP)
$$\min_{x(\cdot)}:\int_{t_0}^{t_1} f(t,x(t),\dot{x}(t))\mathrm{d}t$$
$$\text{s. t. }: x(t_0)=x_0,\ x(t_1)=x_1$$

其中，$f:R\times R^n\times R^n\to R$，$x(t)=(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t))$为向量值函数，$\dot{x}(t)=\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$表示其导函数。一般的变分法问题多在分段连续可微函数空间上考虑最优化问题。

对应于前述问题(P)，变分法的目标函数可以理解为

$$F(x(\cdot)):=\int_{t_0}^{t_1} f(t,x(t),\dot{x}(t))\mathrm{d}t$$

而端点条件也可理解为

$$H_1(x(\cdot)):=x(t_0)-x_0=0,\ H_2(x(\cdot)):=x(t_1)-x_1=0$$

所以，变分法问题与非线性规划问题的表示形式可以是一致的。在这里 F，H_1 和 H_2 都是函数的函数。一般，我们把函数的函数称为泛函数，因此函数空间最优化问题的目标函数也称为目标泛函。

20 世纪 50 年代，从古典的变分法进一步发展出最优控制理论(Optimal Control Theory)。最优控制理论使函数空间的最优化问题得到了更深入和全面的研究，并大大促进了最优化问题在包含经济学在内的各个科学领域的应用。以下的最优化问题为基本的最优控制问题：

(OCP)
$$\min:\int_{t_0}^{t_1} f(t,x(t),u(t))\mathrm{d}t$$
$$\begin{aligned}\text{s. t. }: &\dot{x}(t)=\Phi(t,x(t),u(t))\\ &x(t_0)=x_0\\ &u(t)\in U\end{aligned}$$

其中，$f:R\times R^n\times R^m\to R$，$\Phi:R\times R^n\times R^m\to R^n$，$U\subset R^m$，$u$ 称为控制变量，x 称为状态变量。此最优化问题是通过选择控制变量 u，由以上微分方程决定了相应的状态变量 x，而后在控制变量和相应状态变量组成的所有组合(x,u)中，选择使目标积分值最优的组合。此处的控制变量可在比分段连续函数空间更一般的函数空间

(如 Lebesgue 本质有界可积空间)上探讨,同时可用非函数形式的集合约束对控制变量的变化范围加以限制。

上述函数空间最优化问题的变量可以是时间的函数,当变量随时间变化而变化时最优化问题也被称为动态最优化问题。与此相比较,不涉及时间变化的前述有限空间的非线性规划问题有时也被称为静态最优化问题。

在考察动态最优化问题时,除了上述连续型的问题之外,还有离散型的最优化问题。探讨离散型的动态最优化问题除了可以利用非线性规划原理外,主要还有从古典的变分法发展而来的动态规划(Dynamic Programming)方法。动态规划方法如变分法与最优控制理论一样也可以用来探讨连续型的最优化问题,但对离散的和随机的最优化问题更有效。

对应以上的连续型最优化问题,离散型的最优化问题可表示如下:

(DP)

$$
\begin{aligned}
&\min:\ \sum_{t=0}^{T-1} f(t,x_t,u_t)+\varphi(T,x_T)\\
&\text{s. t.}:x_{t-1}=g(t,x_t,u_t),\ t=0,1,\cdots,T-1\\
&\qquad x_0=\bar{x}_0\\
&\qquad u_t\in U\ ,t=0,1,\cdots,T-1
\end{aligned}
$$

其中,t 表示离散的时间,初期为 0,第一期为 1,第二期为 2,…,终期为 T。x_t 表示第 t 期的 x,u_t 变量同理。$\bar{x}_0$ 为给定值。

现代最优化理论研究表明:变分法和最优控制问题可以作为函数空间的非线性规划问题,采用与有限空间的非线性规划问题相类似的方法探讨有关最优性条件,函数空间和有限空间的最优化问题的最优性条件有本质上的一致性。但探讨函数空间的非线性规划问题将涉及较复杂的泛函分析理论中的相关知识,本讲义不涉及该部分内容。我们将力求在微积分和线性代数的基础知识的范围内讨论上述最优化问题的最优性条件等内容。

以上综述了数学最优化理论的主要模型。接下来,我们观察如何应用这些模型描述现代经济理论中的几个基本问题。

0.2.2　经济学问题的数学表述

如前所述,经济学可以理解为研究有限资源的有效配置的学问。资源的有限性就是约束条件,有效配置就是我们的最优目标。因此许多经济学的基本问题可以表示为约束条件下的目标最优化问题,借助最优化数学模型可以更准确、精练地描述和展开分析。以下,我们观察几个微观和宏观经济学中的基本范例。

构成微观经济学基础的需求与供给理论即是从对消费者的效用最大化和生产者的利润最大化或成本最小化问题的分析而来。现在,我们来观察如何用非线性

规划模型来表示这些问题。

例 0.2.1 消费选择问题

考虑消费者的最优消费选择问题。该问题表示为：在收入水平的约束条件下，选择最优的消费量组合以最大化消费效用。用上述最优化模型可表示如下：

$$\max_{(x_1,\cdots,x_n)}: U(x_1,x_2,\cdots,x_n), \quad \text{效用函数}$$

$$\text{s.t.}: p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n \leqslant y, \quad \text{收入约束}$$

其中，x_i 表示第 i 个商品的消费量，p_i 表示相对应的商品价格，U 为消费效用函数，y 为收入。

该问题是在给定价格水平 $p=(p_1,\cdots,p_n)$ 和收入水平 y 的条件下，寻求最优的各商品的消费量。所以该问题的最优解 $x_i(p,y), i=1,\cdots,n$，即表示消费者在给定收入水平和价格体系下对各商品的需求量，一般称为 Marshall 型需求函数。

从另一方面看，消费选择问题也可表示为：在达到一定的效用水平的约束下最小化消费支出的问题：

$$\min_{(x_1,\cdots,x_n)}: p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n$$

$$\text{s.t.}: U(x_1,x_2,\cdots,x_n) \geqslant v$$

其中，v 为给定的效用水平。显然此时问题的最优解 $x_i(p,v)$，$i=1,\cdots,n$ 表示消费者在给定效用水平和价格体系下对各商品的需求量，它被称为 Hicks 型需求函数。

例 0.2.2 厂商选择问题

在固定产量下，考虑厂商最优的投入选择。厂商的成本最小化问题可模型化为

$$\min_{(x_1,\cdots,x_n)}: w_1x_1+w_2x_2+\cdots+w_nx_n$$

$$\text{s.t.}: f(x_1,x_2,\cdots,x_n) \geqslant y$$

其中，x_i 表示第 i 个生产要素的投入量，w_i 表示相对应的要素价格，f 为生产函数，y 为给定的产量。此问题是在给定产量水平 y 的条件下，寻求要素价格体系 $w=(w_1,\cdots,w_n)$ 下的各个要素最优投入量。解函数 $x_i(w,y)$ 称为第 i 个生产要素的条件投入需求函数(这里的条件指产量的限制条件)。

此时最优目标值函数定义为

$$c(w,y)=\min_{(x_1,\cdots,x_n)}\left\{\sum_{i=1}^{n}w_ix_i \mid f(x_1,\cdots,x_n)\geqslant y\right\}$$

该最优值函数即成本函数。

同时考虑产出和投入时，厂商的问题可表示为以下的利润最大化问题：

$$\max_{(x,y)\geqslant 0}: py - \sum_{i=1}^{n} w_i x_i = py - w \cdot x$$
$$\text{s. t.}: f(x_1, \cdots, x_n) = f(x) \geqslant y$$

其中，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，在此问题中，厂商将在市场给定的产品价格 p 和生产要素价格体系 w 下，寻求最优的投入 x 和产出 y。此时的最优解函数 $x_i=x_i(p,w)$ 称为投入需求函数（注意与上面的条件投入需求函数不同），$y=y(p,w)$ 称为供给函数。

此时，以下的最优目标值函数称为利润函数。

$$\pi(p,w) = \max_{(x,y)\geqslant 0}\{py - w \cdot x : f(x) \geqslant y\}$$

以上的最优化资源配置问题并没有考虑到时间的因素。在探讨长期的经济增长与波动时，则需考虑跨时期的动态最优化资源配置。下述的最优经济增长问题被表示为数学的最优控制问题。

例 0.2.3　最优经济增长问题（连续型）

最优经济增长模型设想一代表性家庭如何选择最优的动态消费路径，以最大化其从现在到将来的效用现值总和。该模型假设代表性家庭可以无限延续，同时把经济抽象为只生产一种产品，该产品可用于生产或消费。此时的动态最优选择问题表述如下：

$$\max_{(c,k)}: \int_0^{\infty} U(c(t))e^{-\theta t}\mathrm{d}t, \qquad \text{消费效用现值总和}$$
$$\text{s. t.}: \dot{k}(t) = f(k(t)) - c(t) \qquad \text{资源和技术的约束}$$
$$k(0) = k_0 \qquad \text{初期的资本存量限制}$$

其中，$c(t)$ 表示 t 时点的人均消费；$k(t)$ 表示 t 时点的人均资本存量；①$U(\cdot)$ 表示个人的效用函数；θ 表示时间偏好率或主观贴现率，它把将来的效用价值折算为现在价值。目标泛函表示从现在到无限远将来的现值效用的总和。f 为该经济的生产函数（也隐含了技术约束），$\dot{k}$ 表示资本的增加量，微分方程表示该经济的资源配置：产出 $f(k)$ 用于消费 c 或用于资本再投入 $\dot{k}$。同时，在该模型中劳动的投入为一定，并且不考虑人口增长和资本消耗（折旧）等因素。另外，k_0 为给定的初期值。该最优化问题的最优解 $c(t)$、$k(t)$ 即最优的消费和资本的增长路径，$\frac{\dot{c}}{c}$ 和 $\frac{\dot{k}}{k}$ 即可用以描述经济的增长率。

① 在该问题中，涉及存量和流量的概念。存量对应上述数学模型中的状态变量，流量对应控制变量。后面部分会再作说明。

例 0.2.4 有限期离散型 Ramsey 最优增长问题

用时间离散型的模型也可以表示上述增长问题，在离散型问题中，积分式将变为代数和式，微分方程将变为差分方程。我们考虑如下有限期问题：

$$\max_{c_0,\cdots,c_T}:\sum_{t=0}^{T}\beta^t U(c_t)$$

$$\text{s.t.}:k_{t+1}-k_t=f(k_t)-c_t,\quad t=0,\cdots,T$$

$$k_0=\bar{k}_0$$

$$k_{T+1}\geqslant \bar{k}_{T+1}$$

其中，t 表示第 t 期，与例 0.2.3 的 t 不同，它是一个离散而非连续的量；c,k,U,f 的意义与例 0.2.3 相同；β 的含义与例 0.2.3 的 θ 含义相对应，此时，$\beta^t=\frac{1}{(1+\theta)^t}$ 对应于连续性的 $e^{-\theta t}$[①]；另外，$\bar{k}_0$ 和 $\bar{k}_{T+1}$ 为给定量。

以上我们给出了若干经济学基本问题的数学描述。在后面的章节，我们将探讨如何利用最优化数学原理，通过分析最优解的最优性条件来推导以上诸问题中包含的经济学原理。

0.3 数学预备知识

在开始分析最优化问题之前，首先简单回顾一下后续部分将要用到的一些基本的数学概念和结论。

0.3.1 逻辑命题

数学推导过程是逻辑分析过程，在此首先对逻辑命题中的语言和符号做一简单说明。

设 A 和 B 是两个命题。命题"如果 A，则 B"的含义是：如果 A 是真的，则 B 是真的。这里 A 是假设，B 是结论。为求简便，通常用"$A\Rightarrow B$"表示。

必要条件与充分条件：如果命题"$A\Rightarrow B$"为真，则 B 称为 A 的必要条件，A 称为 B 的充分条件。

充分必要条件（充要条件）：如果"$A\Rightarrow B$"和"$B\Rightarrow A$"都为真，则称 B 为 A 的充

① 贴现系数实质上等同于该变量的增长率。在离散的问题中体现为

$$\frac{V_{t+1}-V_t}{V_t}=\theta\Leftrightarrow\frac{V_{t+1}}{1+\theta}=V_t\Leftrightarrow\frac{1}{(1+\theta)^t}V_t=V_0$$

在连续型的问题中则体现为

$$\frac{\dot{V}(t)}{V(t)}=\theta\Leftrightarrow V(t)e^{-\theta t}=V(0)$$

分必要条件。此时记为“$A\Leftrightarrow B$”。

称“$B\Rightarrow A$”为“$A\Rightarrow B$”的逆命题；

称“非 $A\Rightarrow$非 B”为“$A\Rightarrow B$”的否命题；

称“非 $B\Rightarrow$非 A”为“$A\Rightarrow B$”的逆否命题。

一命题和它的逆否命题是等价的，即“$A\Rightarrow B$” $\Leftrightarrow$ “非 $B\Rightarrow$非 A”

有关命题的否命题：

“对所有(任意，$\forall$)的 $x\in D$，P 成立” 的否命题是：

“对某些(存在，$\exists$)$x\in D$，P 不成立”。

“对某些(存在，$\exists$)$x\in D$，P 成立”的否命题是：

“对所有(任意，$\forall$)的 $x\in D$，P 不成立”。

0.3.2 微积分与矩阵代数的相关基础知识

【多维空间的范数】

范数用来表示向量的“长度”，是一维实数空间的绝对值的推广。它是满足以下性质的一种映射 $\|\cdot\|:R^n\to R^+$。

(1) $\|x\|\geqslant 0,\forall x\in R^n$；

(2) $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|,\ \alpha\in R,\forall x\in R^n$；

(3) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|,\ \forall x\in R^n,\ \forall y\in R^n$；

(4) $\|x\|=0\Leftrightarrow x=0$。

R^n 的范数可定义为：$\|x\|_1=|x|$（一维）；$\|x\|_n=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$（二维及二维以上），在二维及二维空间中，此范数即表示一点与原点的距离。

【δ-邻域】

对点 $x^*\in R^n$，如下定义的集合称为 x^* 的 $\delta(>0)$邻域。

$$N_\delta(x^*):=\{x\in R^n\mid \|x-x^*\|<\delta\}$$

式中，$N_\delta(x^*)$可理解为以 x^* 为球心、以 δ 为半径但不包含球表面的球，故也称开球，参考以下开集的定义。

【内点、边界点、开集与闭集】

一点 x 为集合 S 的内点是指：$x\in S$ 且存在 $\delta>0$，使得 $N_\delta(x)\subset S$。即，存在以 x 为球心，以 δ 为半径的小开球，使得该小开球的点全都在 S 中。

x 称为 S 的边界点(x 可以不属于 S)是指：任意以 x 为球心的开球均含有不属于 S 的点和属于 S 的点。

若一集合的所有点都是内点，称该集合为开集。

若一集合包含所有的边界点,则称为闭集。

闭集的特征:R^n 上的集合 S 是闭的$\Leftrightarrow$S 内的点列$\{x_k\}$的极限 x 也属于 S。内点、边界点和开集如图 0.3.1 所示。

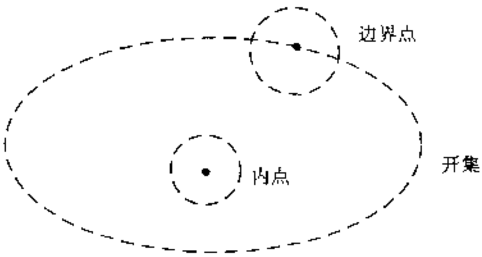

图 0.3.1 内点、边界点与开集

探讨最优化问题离不开微分和导数的概念。实际上,微分和导数虽然是由 Newton 和 Leibniz 分别在研究物体运动和曲线的几何性质时独立建立的,但微分的思想可以追溯到更早的 Fermat 对极值问题的研究。

以下我们将给出一维和多维 Euclid 空间的导数的概念。许多多维空间的微积分理论是一维空间微积分理论的推广。理解多维空间的最优化理论时,在许多场合可以借助一维空间函数的直观几何图示来加深理解。因此首先必须深入理解单变量函数的导数的概念和性质。下述单侧导数的概念有助于加深对导数性质的理解。

【单变量函数的单侧导数】

左导数:
$$f'_-(x)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

右导数:
$$f'_+(x)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

函数 $f(x)$在 x 可导的充分必要条件是相应的左右导数存在且相等。

【多变量函数的导数】

考虑 n 维变量函数 $f(x_1,\cdots,x_n):R^n\to R$ 的导数。

多变量函数的一阶导数称为梯度,用$\nabla f(x)$表示,$x=(x_1,\cdots,x_n)$,

$$\nabla f(x)=\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1},\frac{\partial f(x)}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right)^T \text{①}$$

① 向量或矩阵的右上标 T 表示转置,本书下同。一般情况下,本书的向量表示列向量。