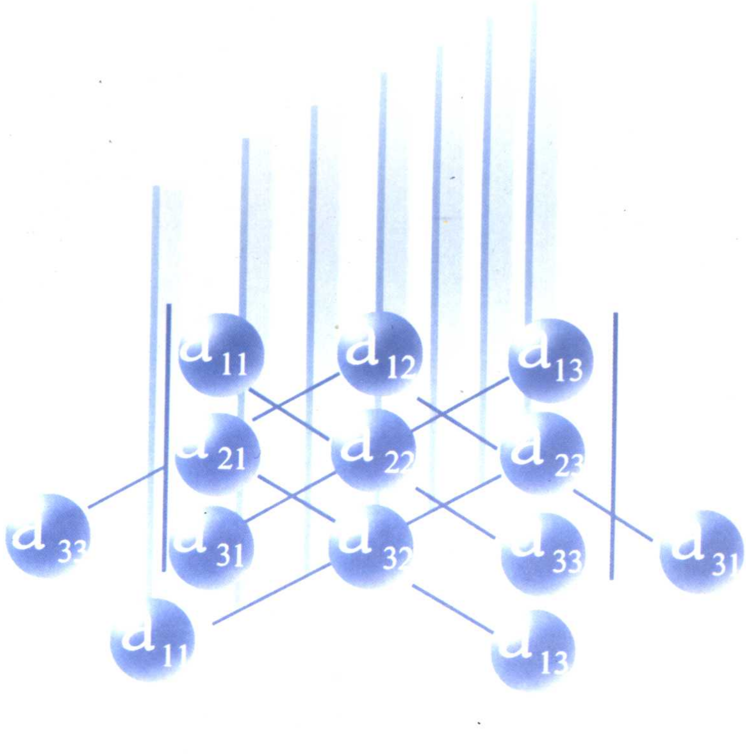
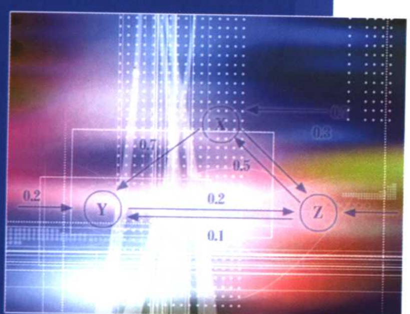
高等教材

全国高等农林院校教材

线性代数

郑大川 吴瑞武 主编





中国林业出版社

线性代数

全国高等农林院校教材

线性代数

郑大川　吴瑞武　主编

中国林业出版社

内 容 简 介

本书主要内容有：行列式、矩阵、向量、线性方程组、相似矩阵与二次型、线性空间与线性变换。每章基本内容介绍完成后，有知识应用和提高学习两节。前者为学生树立数学建模思想，注重培养学生提出问题，利用数学知识解决实际问题的能力。后者对所学知识进一步总结分析，并附有难度较高的练习题，供学有余力的学生和报考研究生的学生选用。

本书与传统教材相比，既有继承，又有创新。逻辑清晰、叙述详细、通俗易学。可作为高等农林院校工、农、林、牧、经营等专业的教科书，也可作为各类专业技术人员的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/郑大川，吴瑞武主编. —北京：中国林业出版社，2006. 12
全国高等农林院校教材
ISBN 978-7-5038-4476-8

Ⅰ. 线…　Ⅱ. ①郑…　②吴…　Ⅲ. 线性代数－高等学校－教材　Ⅳ. O151. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 141222 号

中国林业出版社·教材建设与出版管理中心
责任编辑： 牛玉莲
电话： 66170109　　**传真：** 66170109

出版发行	中国林业出版社（100009　北京西城区德内大街刘海胡同 7 号） E-mail：cfphz@ public. bta. net. cn　电话：66184477 网　址：http：//www. cfph. com. cn
经　销	新华书店北京发行所
印　刷	北京百善印刷厂
版　次	2007 年 1 月第 1 版
印　次	2007 年 1 月第 1 次
开　本	850mm × 1168mm　1/16
印　张	10. 25
字　数	222 千字
定　价	15. 00 元

全国高等农林院校“十一五”规划教材

《线性代数》编写人员

主　编　郑大川　吴瑞武

副主编　胡　俊　何沅娟

编　委　杨如艳　高　鑫　张立敏　梁　兵　黄勇林

前　言

为了更好地适应农林院校培养高等技术应用型人才的需要，提高学生的基本素质和教学质量，根据农林院校对数学教学的基本要求，本着教学与专业相融，基础教学为专业服务和以应用为目的，以必须、够用为度的原则，我们在多年从事高等农林院校教学实践的基础上，编写了本书。

本书在保证科学性、系统性、严密性的基础上，注意概念的恰当引出、例题合理的配置，并强调了知识的具体应用。认真贯彻少而精的原则，尽量减少烦琐而又难以起到启发思维作用的逻辑证明，将主要篇幅用于实际需要的典型情况，在无损于基本内容的情况下，突出了本教材的理论与实际应用相结合的目的。本书特别注重对学生的基本运算、分析问题与解决问题能力的培养，突出了应用性和实用性，内容通俗易懂；同时又专门设置了提高学习的内容。这样，既达到了大纲的要求，又便于学生学习，充分体现了高等教育的特色。

本书在有关节后配有课堂练习，每章后配有练习题或习题。此外，每章还有知识应用和提高学习两节供学生开拓视野，进一步掌握所学知识。本书的具体学时数建议为 40 ~ 60 学时，可根据实际教学情况适当增减。

本书由云南农业大学郑大川、吴瑞武担任主编，胡俊、何沅娟担任副主编；云南农业大学杨如艳、高鑫、张立敏，成都电子机械高等专科学校梁兵，云南省机电职业技术学院黄勇林参加编写。限于编者的水平，书中难免出现缺点和错误，敬请批评指正。

在此，向对本书出版发行给予帮助的同志们表示感谢！

编　者

2006 年 10 月

目 录

第1章　行　列　式

线性方程组的理论是线性代数的基础部分，而行列式是研究线性方程组的一个重要工具。早在18世纪，为了寻求含有 n 个未知数的 n 个方程构成的线性方程组的一般解的公式，莱布尼兹和克莱姆引进了行列式的概念，随后它被广泛应用在数学、工程技术及经济学等众多领域。本章主要介绍 n 阶行列式的定义、性质及其计算方法，此外还介绍了使用行列式求解线性方程组的克莱姆(Cramer)法则。

1.1　行列式的引入和行列式的概念

1.1.1　行列式的引入

(1)行列式的引入

在中学学习过，含两个未知量的线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

可以通过消元法求出未知量 x_1 、x_2 的值。当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，有

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases}$$

这就是二元一次方程组的解的公式。为了便于记忆，下面引入新的记号：

$$D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$D_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$D_2 = a_{11}b_2 - a_{12}b_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

于是该线性方程组的解可记为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D} \\ x_2 = \dfrac{D_2}{D} \end{cases}$$

称记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

为二阶行列式。二阶行列式所表示的是：行列式中两行两列中的元素构成的两项乘积的代数和，它是一个数。

称记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

为三阶行列式，且规定

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

三阶行列式表示的是行列式中的元素按一定规律运算所得的六项乘积的代数和，式中每项均为不同行不同列的三个元素的乘积再冠以正负号，其规律遵循图 1.1 所示的对角线法则：图中有三条实线看作是平行于主对角线的连线，三条虚线看作是平行于辅对角线的连线，实线上三元素的乘积冠以正号，虚线上三元素的乘积冠以负号。

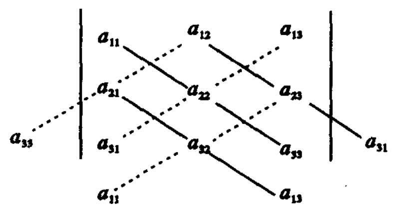


图 1.1

【例 1.1.1】　计算三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & -7 & 5 \end{vmatrix}$$

解：

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & -7 & 5 \end{vmatrix} = 2\times1\times5 + (-1)\times4\times3 + 1\times(-7)\times(-1) - (-1)\times1\times3 - (-1)\times1\times5 - 4\times(-7)\times2 = 69$$

(2) n 阶行列式的概念

定义 1.1.1　由排成 n 行 n 列的 n^2 个数 $a_{ij}(i,j = 1,2,\cdots,n)$ 构成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式。

数 $a_{ij}(i,j = 1,2,\cdots,n)$ 称为行列式的元素。元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标，表明该元素位于第 i 行，第二个下标 j 称为列标，表明该元素位于第 j 列。n 阶行列式表示的是行列式中的元素按不同行不同列的 n 个元素的乘积再冠以正负号所得的 $n!$ 个乘积项的代数和。为了确定不同行不同列的 n 个元素的乘积的符号，本书引入以下概念。

1.1.2 全排列，逆序数及逆序数的性质

(1)全排列

定义 1.1.2 把 n 个不同的数排成一列，这一列数被称为这 n 个数的全排列（简称排列）。

例如：123，231，321，312，132，213 均为数 1、2、3 构成的全排列。显然，对于 n 个不同的数，它的全排列共有 $n!$ 个。

一般地，将 n 个不同的自然数 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 的任意一个全排列记为 $p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_n}$。

(2)逆序数

对于 n 个不同的元素，先规定各元素之间有一个标准次序（例如 n 个不同的自然数，可规定由小到大为标准次序）。本书中，若无特殊说明，元素间排列的标准次序均规定为由小到大的。例如：123 为数 1、2、3 的全排列的标准次序排列。

定义 1.1.3 在一个由 n 个不同元素构成的全排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中，如果有某个较大的数 p_i 排在较小的数 p_j 的左边，就称 p_i 与 p_j 构成了一个逆序。一个排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中所有逆序的总数称为这个排列的逆序数，记为 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$。

例如：在排列 21354 中，2 与 1 就构成一个逆序，5 与 4 也构成一个逆序，而其余两数间均不构成逆序，因此，排列 21354 的逆序数 $\tau(21345) = 2$。

定义 1.1.4 逆序数为奇数的排列称为奇排列，逆序数为偶数的排列称为偶排列。

【例 1.1.2】 求排列 35241 的逆序数。

解： 在排列 35241 中，3 的左边无比它大的数，故 3 的逆序数为 0；5 的左边无比它大的数，故 5 的逆序数为 0；2 的左边比它大的数有 2 个，故 2 的逆序数为 2；4 的左边比它大的数有 1 个，故 4 的逆序数为 1；1 的左边比它大的数有 4 个，故 1 的逆序数为 4。所以，排列 35241 的逆序数为

$$\tau(35241) = 0 + 2 + 1 + 4 = 7$$

且排列 35241 为奇排列。

(3) 对换

定义 1.1.5 在一个排列 $p_1p_2\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 的中，如果只将 p_i 与 p_j 两元素的位置互换(其余均不动)，得到另一个排列 $p_1p_2\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$ ，这样的变换称为一次对换。

例如，在排列 35241 中，将 5 与 4 对换，得到新的排列 34251 。奇排列 35241 经对换后，变成了偶排列 34251 (其中 $\tau(34251) = 6$)。反之，也可以说偶排列 34251 经对换 4 与 5 之后，变成了奇排列 35241 。

定理 1.1.1 一个排列中的任意两个元素对换，将改变该排列的奇偶性。

证明: 先证相邻两个元素对换的情形

设排列 $a_1a_2\cdots a_labb_1b_2\cdots b_m$ 经对换 a 与 b 的位置，得到排列 $a_1a_2\cdots a_lbab_1b_2\cdots b_m$，显然，$a_1a_2\cdots a_l$ 以及 $b_1b_2\cdots b_m$ 的逆序数经过对换并没有改变，而 a,b 两元素的逆序数改变为：当 $a > b$ 时，经对换后 b 的逆序数不变而 a 的逆序数减少 1 ；当 $a < b$ 时，经对换后 b 的逆序数增加 1 而 a 的逆序数不变。于是有

$$\tau(a_1\cdots a_lbab_1\cdots b_m) = \tau(a_1\cdots a_labb_1\cdots b_m) \pm 1$$

所以，经一次相邻对换，排列改变奇偶性。

再证一般对换的情形：

设排列 $a_1a_2\cdots a_lab_1b_2\cdots b_mbc_1c_2\cdots c_n$ 经过 a 与 b 的对换，得到新的排列为

$$a_1a_2\cdots a_lbb_1b_2\cdots b_mac_1c_2\cdots c_n$$

将排列 $a_1a_2\cdots a_lbb_1b_2\cdots b_mac_1c_2\cdots c_n$ 看作排列 $a_1a_2\cdots a_lab_1b_2\cdots b_mbc_1c_2\cdots c_n$ 中 a 与 b_1 对换，得到新排列 $a_1a_2\cdots a_lb_1ab_2\cdots b_mbc_1c_2\cdots c_n$ ，再将 a 与 b_2 对换，得到新排列 $a_1a_2\cdots a_lb_1b_2a\cdots b_mbc_1c_2\cdots c_n$ ，这样的对换反复做 $m+1$ 次，得到排列

$$a_1a_2\cdots a_lb_1b_2\cdots b_mbac_1c_2\cdots c_n$$

将此排列中 b 与 b_m 对换，得到新排列 $a_1a_2\cdots a_lb_1b_2\cdots bb_mac_1c_2\cdots c_n$ ，再将 b 与 b_{m-1} 作对换，得到新排列 $a_1a_2\cdots a_lb_1b_2\cdots bb_{m-1}b_mac_1c_2\cdots c_n$ ，这样的对换反复做 m 次，就可得到排列

$$a_1a_2\cdots a_lbb_1b_2\cdots b_mac_1c_2\cdots c_n$$

按以上方法，排列 $a_1a_2\cdots a_lab_1b_2\cdots b_mbc_1c_2\cdots c_n$ 经过 $2m+1$ 次相邻对换变为排列

$$a_1a_2\cdots a_lbb_1b_2\cdots b_mac_1c_2\cdots c_n$$

根据相邻对换的情形及 $2m+1$ 是奇数，得到这两个排列的奇偶性相反。

推论 1.1.1 奇排列变为标准排列的对换次数为奇数，偶排列变为标准排列的对换次数为偶数。

1.1.3 n 阶行列式的计算

(1) n 阶行列式的值

定义 1.1.6 n 阶行列式 D 的值为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

这里记号 $\sum$ 为连加求和号；$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 称为行列式的一般项，是取自不同行不同列的 n 个元素的乘积；各项的符号是：当这一项中各元素的行标按自然数顺序排列后，如果列标的排列 $p_1p_2\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 为偶排列，取正号；列标的排列为奇排列，则取负号；行列式的值是 $n!$ 个一般项的代数和。

n 阶行列式还可简记为 $\det(a_{ij})$，即 $D=\det(a_{ij})$。

式中 a_{ij} 为行列式 D 的元素。

n 阶行列式的定义有以下四个要点：

①n 阶行列式是 $n!$ 项数乘的代数和，代表的是按一定算法得到的一个数值。

②每一项是取自不同行不同列的 n 个元素的乘积(这样的项恰有 $n!$ 项)。

③每一项的符号是：当其元素的行标按自然数顺序排列后，如果列标排列为偶排列，则取正号；如果为奇排列，则取负号。

④当 $n=1$ 时，一阶行列式 $|a|=a$，注意不要与绝对值记号相混淆($|a|=\sqrt{a^2}$)。

(2)一些特殊行列式

【例 1.1.3】 计算下列行列式的值(这种对角线以外元素全为零的行列式被称为对角形行列式)。

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \lambda_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解： 由行列式的定义，和式 $\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 中，只有当

$$p_1=n, p_2=n-1, \cdots, p_{n-1}=2,\quad p_n=1$$

时，才能满足 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}\neq 0$，所以

$$D=(-1)^{\tau(n(n-1)\cdots 321)}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

式中，$\tau(n(n-1)(n-2)\cdots 321)=\dfrac{n(n-1)}{2}$。

【例 1.1.4】 证明下列行列式。

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

这种对角线以上的元素均为零的行列式称为下三角行列式。

证明：由于当 $j > i$ 时，$a_{ij} = 0$，故 D 中可能不为0的元素 a_{ip_t} 的下标应满足

$$p_t \leqslant i(t = 1,2,\cdots,i)$$

即

$$p_1 \leqslant 1, p_2 \leqslant 2, \cdots, p_n \leqslant n$$

在所有排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中，能满足上述关系的排列只有一个自然排列 $12\cdots n$，其逆序数为0，所以 D 中不为0的项只有唯一的一项 $(-1)^{\tau}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$。符号为 $(-1)^0 = 1$，所以 $D = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$。

同理可得如下一些相关的结论：

①上三角形行列式(对角线下方元素全为零的行列式)：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n-2} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}$$

②下三角形行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1n-1} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}$$

③对角形行列式：

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n, \quad \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \cdots & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \lambda_n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

定理 1.1.2 n 阶行列式的一般项可写为

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)+\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{p_1q_1}a_{p_2q_2}\cdots a_{p_nq_n}$$

式中 $p_1p_2\cdots p_n$ 与 $q_1q_2\cdots q_n$ 均分别为 $1,2,\cdots,n$ 的某一全排列，即 n 阶行列式又可定义为

$$D = \sum (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)+\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{p_1q_1}a_{p_2q_2}\cdots a_{p_nq_n}$$

推论 1.1.2 n 阶行列式的也可定义为

$$D = \sum (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{p_{11}} a_{p_{22}} \cdots a_{p_{nn}}$$

上式是 $n!$ 个乘积项的代数和，每一项是取自不同行和列的 n 个元素的乘积，各项的符号是：当这一项中各元素的列标按自然数顺序排列后，如果行标的排列为偶排列，取正号；如果行标的排列为奇排列，取负号。

课堂练习

1. 求排列：

(1) $n(n-1)(n-2)\cdots321$

(2) $135\cdots(2n-1)246\cdots2n$

(3) $2n(2n-2)\cdots642(2n-1)(2n-3)\cdots531$ 的逆序数

2. 写出四阶行列式中含有 $a_{11}a_{23}$ 的项。

1.2 行列式的性质及计算

1.2.1 行列式的性质和利用行列式性质进行计算

定义 1.2.1 将行列式 D 的行依次变为相应的列，列依次变为相应的行，得到行列式 D^T，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

D^T被称为 D 的转置行列式，其中 T 为转置符号。

性质 1.2.1 行列式与它的转置行列式相等，即 $D^T = D$。

证明： 记 $D = \det(a_{ij})$ 的转置行列式为

$$D^T = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

即 D^T 的元素为 b_{ij}，则 $b_{ij} = a_{ji}(i,j = 1,2,\cdots,n)$。按行列式的定义，有

$$D^T = \sum (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} b_{1p_1} b_{2p_2} \cdots b_{np_n} = \sum (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{p_{11}} a_{p_{22}} \cdots a_{p_{nn}}$$

而由定理 1.1.2 及推论 1.2，有

$$D = \sum (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{p_{11}} a_{p_{22}} \cdots a_{p_{nn}}$$

所以

$$D^T = D$$

由此性质可知，行列式中的行和列具有同等的地位，行列式中凡是对行成立的运算对列也同样成立，反之亦然。

性质 1.2.2　互换行列式的两行(列)，行列式变号。

一般地，以 r_i 表示行列式的第 i 行，以 c_i 表示行列式的第 i 列。交换 i,j 两行记作 $r_i \leftrightarrow r_j$；交换 i,j 两列记作 $c_i \leftrightarrow c_j$，性质 1.2.2 可简记为 $D \overset{r_i \leftrightarrow r_j\text{或}c_i \leftrightarrow c_j}{=} -D$。

推论 1.2.1　若行列式 D 中有两行(列)完全相同，则 $D = 0$。

性质 1.2.3　行列式某一行(列)的所有元素都乘以同一数 k，等于数 k 乘以此行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

第 i 行(或列)乘以 k，记作 $r_i \times k$（或 $c_i \times k$）。

推论 1.2.2　行列式中某一行(列)所有元素的公因子可提到行列式符号的外面。

推论 1.2.3　行列式中某一行(列)所有元素均为零，则此行列式等于零。

性质 1.2.4　行列式中如果有两行(列)元素对应成比例，则此行列式等于零。

性质 1.2.5　若行列式某一行(列)的所有元素都是两个数的和，则此行列式等于两个行列式的和。其中这两个行列式的这一行(列)的元素分别为对应的两个加数之一，其余各行(列)的元素与原行列式相同。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 1.2.6　行列式 D 的某一行(列)的所有元素都乘以数 k 加到另一行(列)的相应元素上，行列式的值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (i \neq j)$$

了解行列式的性质后，对于行列式不必一定要按定义来计算，可利用其性质将其简化为一些特殊的行列式来计算。

【例 1.2.1】　计算下列行列式。

$$D=\begin{vmatrix}2&-5&1&2\\-3&7&-1&4\\5&-9&2&7\\4&-6&1&2\end{vmatrix}$$

解：利用行列式性质将行列式化为三角形行列式计算。

$$D=\begin{vmatrix}2&-5&1&2\\-3&7&-1&4\\5&-9&2&7\\4&-6&1&2\end{vmatrix}\overset{c_1\leftrightarrow c_3}{=}\begin{vmatrix}1&-5&2&2\\-1&7&-3&4\\2&-9&5&7\\1&-6&4&2\end{vmatrix}\underset{r_4-r_1}{\overset{r_2+r_1,r_3-2r_1}{=}}\begin{vmatrix}1&-5&2&2\\0&2&-1&6\\0&1&1&3\\0&-1&2&0\end{vmatrix}$$

$$\overset{r_2\leftrightarrow r_3}{=}\begin{vmatrix}1&-5&2&2\\0&1&1&3\\0&2&-1&6\\0&-1&2&0\end{vmatrix}\underset{r_4+r_2}{\overset{r_3-2r_2}{=}}\begin{vmatrix}1&-5&2&2\\0&1&1&3\\0&0&-3&0\\0&0&3&3\end{vmatrix}\overset{r_4+r_3}{=}\begin{vmatrix}1&-5&2&2\\0&1&1&3\\0&0&-3&0\\0&0&0&3\end{vmatrix}=-9$$

【例 1.2.2】 计算下列行列式。

$$D=\begin{vmatrix}a&b&c&d\\a&a+b&a+b+c&a+b+c+d\\a&2a+b&3a+2b+c&4a+3b+2c+d\\a&3a+b&6a+3b+c&10a+6b+3c+d\end{vmatrix}$$

解：从第 4 行开始，后行减前行，有

$$D=\begin{vmatrix}a&b&c&d\\0&a&a+b&a+b+c\\0&a&2a+b&3a+2b+c\\0&a&3a+b&6a+3b+c\end{vmatrix}\underset{r_3-r_2}{\overset{r_4-r_3}{=}}\begin{vmatrix}a&b&c&d\\0&a&a+b&a+b+c\\0&0&a&2a+b\\0&0&a&3a+b\end{vmatrix}$$

$$\overset{r_4-r_3}{=}\begin{vmatrix}a&b&c&d\\0&a&a+b&a+b+c\\0&0&a&2a+b\\0&0&0&a\end{vmatrix}=a^4$$

1.2.2 行列式按行(列)展开

(1)余子式和代数余子式

一般来说，低阶行列式的计算比高阶行列式的计算要简便，于是，考虑用低阶行列式来表示高阶行列式的问题，为此先引进余子式和代数余子式的概念。

定义 1.2.2 在 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$