新世纪高校经济学·管理学系列教材

XINSHIJIGAOXIAOJINGJIXUE · GUANLIXUEXILIEJIAOCAI

Gailülunyushulitongji

经济应用数学：概率论与数理统计

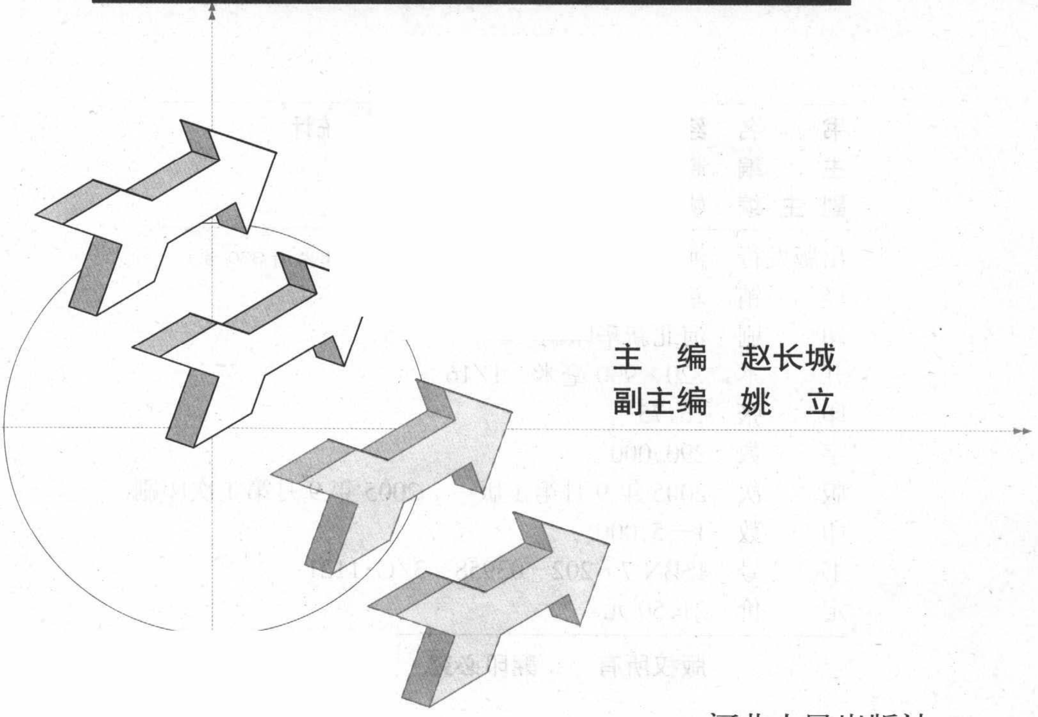
主　编　赵长城
副主编　姚　立

河北人民出版社

新世纪高校经济学·管理学系列教材

XINSHIJIGAOXIAOJINGJIXUE · GUANLIXUEXILIEJIAOCAI

经济应用数学：概率论与数理统计



主　编　赵长城

副主编　姚　立

河北人民出版社

图书在版编目（CIP）数据

经济应用数学：概率论与数理统计/赵长城主编．—石家庄：河北人民出版社，2005.9
（新世纪高校经济学·管理学系列教材）
ISBN 7-202-03958-3

Ⅰ．经…　Ⅱ．赵…　Ⅲ．①经济数学-高等学校-教材②概率论-高等学校-教材③数理统计-高等学校-教材　Ⅳ．F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 091623 号

书　　名	**经济应用数学：概率论与数理统计**
主　　编	赵长城
副 主 编	姚　立
出版发行	河北人民出版社（石家庄市友谊北大街 330 号）
经　　销	新华书店
印　　刷	河北新华印刷一厂
开　　本	720×960 毫米　1/16
印　　张	16.75
字　　数	290,000
版　　次	2005 年 9 月第 1 版　　2005 年 9 月第 1 次印刷
印　　数	1—5,000
书　　号	ISBN 7-202-03958-3/G·1121
定　　价	21.50 元

总　序

高校教材是各门科学中人类所取得的既有成果的集中体现，是一门学科教学内容和知识体系的载体，是展开教学的基本依据。所以，教材建设是学科建设的基础工程。在人类已经进入21世纪的背景下，科学技术发展突飞猛进，知识更新速度加快。中国社会主义市场经济体制的确立，中国加入“WTO”所带来的冲击，对中国高校的教育教学改革提出了更高的要求，也对中国高校的教材建设提出了更高的要求。基于发展河北高等教育、推动河北高校教材建设的历史责任感，河北人民出版社组织河北各高校经济学、管理学各学科的学术带头人和教学骨干，共同编写了这套“新世纪高校经济学·管理学系列教材”。参加的院校有河北大学、燕山大学、河北师范大学、河北农业大学、河北经贸大学、石家庄铁道学院、河北科技大学、河北理工学院、石家庄经济学院等。

本套教材第一批以高校经济类、管理类的核心课程为主体，包括：《政治经济学（资本主义部分）》、《政治经济学（社会主义部分）》、《微观经济学》、《宏观经济学》、《管理学》、《统计学》、《财政学》、《货币银行学》、《基础会计学》、《国际贸易》、《市场营销学》、《管理信息系统》、《运筹学》等，已于2003年8月出版。

第二批以高校经济类、管理类基础课程为主体，包括《金融市场学》、《产业经济学》、《经济法》、《国家税收》、《财务管理》、《证券投资学》、《国际经济

学》、《经济应用数学：概率论与数理统计》、《经济应用数学：微积分》、《数据库原理及应用》、《风险管理》共计11本。

本套教材编委会组织编委、各教材主编和部分作者在石家庄多次就本套教材编写的指导思想、编写体例及主编、副主编、作者的入选资格等进行研究，力图从主编负责制、作者筛选、统一编写体例与编写要求等方面，确保本套教材的编写质量，力图使本套教材能充分地体现近年来相关学科科学研究、教学内容和课程体系改革研究的新成果，使之适应新世纪高校厚基础、宽口径、高素质的培养要求。本套教材曾送经济学家、河北大学博士生导师刘永瑞教授等专家审阅，他们都给予高度评价。

本套教材主要是按照高校经济学类、管理学类本科学生的教学要求规划设计的，也可供各类继续教育的教学使用。

新世纪高校经济学·管理学系列教材编委会

2005.6

前 言

本教材是河北人民出版社为推动河北高校教材建设，打造河北精品教材，满足河北高等教育需要而推出的新世纪高等教育经济学、管理学系列教材之一，由河北经贸大学、河北大学、河北科技大学、石家庄铁道学院、石家庄职业技术学院等院校多年从事概率论与数理统计教学的教师共同编写。

概率论与数理统计发展到今天，已成为一门内容丰富、应用广泛的学科。怎样使经济、管理类各专业的学生在有限的教学时间内，利用最基本的数学工具，掌握最重要的概率论与数理统计理论和方法，是我们选取教材内容的基点。依据教育部关于“二十一世纪教学内容和课程体系改革总体目标和要求”，总结多年的教学经验，我们选取了在经济管理中应用最广泛、最基本的概率论与数理统计的内容作为本教材的基本素材。限于篇幅，有些数理统计的经典内容只能割爱。比如，“方差分析”，考虑到其基本思想在回归分析中亦可体现，就没有纳入本教材。

本书由赵长城教授任主编，姚立教授任副主编，其中第一章由王玉苏编写，第二章由王群编写，第三章由田会英编写，第四章由索秀云编写，第五章由赵长城、姚立编写，第六章由张国防编写，第七章由王亚红编写，全书最后由赵长城、姚立统稿。

本书取材如有不妥，内容如有错误，恳请同行专家及读者批评指正，以使本教材不断完善。

编　者

2005.7

启 事

“新世纪高校经济学·管理学系列教材”自2003年8月出版以来，至今已经出版24种，影响范围越来越大。为进一步做好本套教材的编写出版工作，河北人民出版社开始征集对本套教材编写的意见和建议。同时也希望广大高校教师和学生就本套教材使用过程中的有关问题与我们联系。

联系地址：河北人民出版社经济读物编辑室
（石家庄市友谊北大街330号）
邮政编码：050061
传真：0311-87778671
联系电话：0311-88641232
E-mail：abc8641232@126.com
教材编写：0311-88641232
教材出版：0311-88641233
教材发行：0311-87066745，87053689，85915127

目　录

第一章

随机事件与概率

本章学习目的和要求

学习本章务必要求掌握试验样本空间、事件、随机现象等基本概念。理解古典概型的定义，掌握古典概型的计算方法，牢固掌握条件概率独立性等概念，熟练掌握条件概率及有关的乘法公式全概率公式和贝叶斯公式。

概率论是研究随机现象的数量规律的科学，是统计学的基础. 概率论与数理统计已广泛应用于自然科学、社会科学、工程技术、工农业生产和军事技术中，并且正广泛地与其他学科互相渗透或结合，成为近代经济理论、管理科学等学科的应用、研究中的重要工具.

第一节 随机事件

一、随机现象

在自然界和人类社会生活中存在着两种不同类型的现象. 一种是确定性现象. 例如，在标准大气压下，100℃的纯水必然沸腾；太阳必然从东边升起；带

异性电荷的小球必然相互吸引等. 这些现象的特点是在一定的条件下结果必然会发生，事前人们可以预言会发生什么结果. 有时将确定性现象也称之为必然现象.

另一种是非确定性现象. 例如，明天是下雨还是晴天，是否可以出游；买一张彩票，是中头奖，还是中二等奖，三等奖，还是不中奖；明天的股市是上涨还是下跌，是买入还是卖出；向上掷一枚硬币，结果可能是正面向上或向下等. 这些现象的特点是在相同的条件下进行同样的观测或试验，有可能发生多种结果，事前人们不能预言将出现哪种结果. 这种在相同条件下进行一系列的试验或观察得到各种不同结果的现象称为随机现象或偶然现象. 许多影响事物发展的偶然因素的存在，是产生随机现象中不确定性的原因.

二、随机试验

对于随机现象，人们事先不能断定它将发生哪一种结果，从表面上看好像结果是不可捉摸的，纯粹是偶然性在起支配作用，其实不然，实践证明，随机现象在相同条件下重复进行多次观察，通常总能呈现某种规律性. 例如，投掷一枚质地均匀的硬币，只投掷一次时，投掷的结果是正面还是反面是无法确定的，但当大量重复投掷硬币时，就可以看到出现正面的次数约占试验总数的一半. 表 1—1 列出了 *Buffon* 等人连续抛掷均匀硬币所得的结果. 又如某人打靶射击，若射击次数不多，靶上的弹着点的分布似乎是随意分布的，但倘若进行大量的重复射击时，弹着点的分布就逐渐呈现规律性；大体上它们关于靶中心对称，靠近靶心的弹着点密，偏离靶心越远弹着点越稀少，且弹着点落在靶内任意指定区域的次数与射击次数之比（频率）大体上保持稳定，射击次数越多，其频率的稳定性就愈加明显.

表 1—1

试验者	投掷硬币次数 n	出现正面的次数	频率
Buffon	4040	2048	0.5069
De Morgan	4092	2048	0.5005
Feller	10000	4979	0.4979
Pearson	12000	6019	0.5016
Romanovski	80640	39699	0.4923

上面列举的两个试验的结果表明，在相同条件下大量地重复某一随机试验时，各可能结果出现的频率稳定在某个确定的数值附近，称这种性质为频率的稳定性. 频率稳定性的存在，标志着随机现象有数量规律性. 通常称之为统计规

律.

概率统计就是研究随机现象中数量规律的一门学科.

在概率论中，我们把在一定条件下进行某种实验然后对发生的现象进行观测，称为一个试验. 如果一个试验满足下述条件，就称为随机试验.

（1）试验可以在相同的条件下重复进行.

（2）试验之前能确定所有可能的结果.

（3）试验之前不能确定将会出现所有可能结果中的哪一个.

本书中所谈的试验，均为随机试验.

三、样本空间、随机事件

（一）*样本空间*

我们把随机试验中的每个可能的结果称为样本点，也称为基本事件，用 ω 表示，全体样本点构成的空间称为样本空间，用 Ω 表示. 从集合论的观点看，样本空间就是针对该随机试验的全集，而样本点就是构成样本空间的元素.

【例 1.1】向上掷一枚骰子，观察朝上一面的点数. 这个试验共有 6 个样本点，它们是：

$$\omega_i\text{:表示掷出 } i \text{ 点}(i=1,2,\cdots,6)$$

样本空间可以写成 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$. 这个随机试验的样本空间是由 6 个元素（6 个样本点）组成的集合.

一般地，像上面只有有限个样本点的样本空间可以表示为：

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$$

【例 1.2】观察某电话交换台在 $[0,\ t]$ 内的电话呼叫次数. 其样本点是非负整数，但很难确定呼叫次数的上界，因此样本空间 $\Omega=\{1,2,\cdots\}$，这时我们称它有可列个样本点. 其一般形式为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots\}$.

【例 1.3】在一批显像管中，任意取一只，测试它的使用寿命 t. 因为使用寿命 t 可以取（0，$+\infty$）中的任何一个值，所以在这个试验中，样本点有无穷多个，而且不能一一列举出来. 因此样本空间为 $\Omega=\{t\mid t>0\}$，我们称这样的样本空间所包含样本点为不可列个.

【例 1.4】为评价某学校小学生的生长发育状况，需要同时测量小学生的身高、体重和胸围，在这一随机试验中，任一可能的结果即样本点是一个有序数组 $\{x,y,z\}$，其中 x，y，z 分别表示被测量小学生的身高、体重和胸围，因此样本空间为 $\Omega=\{(x,y,z)\mid 0<x\leqslant a,0<y\leqslant b,0<z\leqslant c\}$，这里的 a,b,c 分别表示该学校学生身高、体重和胸围的最大值.

不难看出，随着所讨论随机试验的不同，相应的样本空间可能很简单，也可

能很复杂. 我们指出，样本空间是研究随机现象的数学模型. 正确的确定不同随机试验的样本点与样本空间是极为重要的.

（二）随机事件

随机试验可能出现的结果，称为随机事件. 简称事件. 通常用大写字母 A，B，C，…来表示事件.

样本空间 Ω 包含了全体样本点，随机事件是由若干个样本点组成的集合，它是样本空间 Ω 的子集. 例如，在前面例 1 中，样本空间为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$，事件 A “出现点数是偶数” 可以表示为 $A=\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\}$，它是 Ω 的一个子集.

在每次随机试验中一定会发生的事件，称为必然事件. 相反地，如果某事件一定不会发生，则称为不可能事件.

由于随机事件是样本空间的子集，所以样本空间 Ω 本身也可以看作一个事件，由于在任何一次试验中总有 Ω 中的某一样本点出现，也就是说 Ω 总会发生，所以我们用 Ω 表示必然事件. 类似地，空集 ϕ 是不包含任何样本点的集合，它也可以看作是 Ω 的子集，在每一次试验时，由于空集不包含任何样本点，ϕ 永远不可能发生，因此，我们用 ϕ 表示不可能事件.

必然事件 Ω 与不可能事件 ϕ 均属于确定性现象，因而严格地说，它们不属于“随机”事件，但是，为了今后讨论方便起见，我们把它们作为随机现象的两个极端包括在随机事件中.

四、事件的关系及运算

给定一个样本空间可以有很多随机事件，事件与事件之间存在着各种关系，还能进行各种运算，研究这些事件之间的相互关系和运算，有助于认识事物的本质，可以通过对简单事件规律的研究推算出复杂事件的规律.

（一）事件之间的关系

1. 包含关系

如果事件 A 发生时，必然导致事件 B 发生，则称事件 A 包含于事件 B. 或称事件 B 包含事件 A，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

事件 A 包含于事件 B，就是当 A 中的任何一个样本点发生时，B 必定发生. 即 A 中样本点都包含在 B 中.

2. 相等关系

对事件 A 与 B，如果同时成立 $A\subset B$ 和 $B\subset A$，则称事件 A 与事件 B 相等，记为 $A=B$ 或 $B=A$.

3. 对立（互逆）关系

如果事件 A 发生时，必然导致事件 B 不发生，事件 A 不发生时，必然导致事件 B 发生，则称 A 与 B 是相互对立（或互逆）的事件，记为 $A=\overline{B}$ 或 $B=\overline{A}$.

（二）事件之间的运算

1. 事件 A 与 B 的并（和）

“事件 A 与 B 至少有一个发生”也是一个事件，称这个事件为事件 A 与 B 的并（和），记作 $A\cup B$ 或者 $A+B$. 同样 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 表示 A_1，A_2，…，A_n 这 n 个事件至少有一个发生.

2. 事件 A 与 B 的交（积）

“事件 A 与 B 同时发生”也是一个事件，称这个事件为 A 与 B 的交（积），记作 $A\cap B$ 或者 AB. 同样 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 表示 A_1，A_2，…，A_n 这 n 个事件同时发生.

3. 事件 A 与 B 的差

“事件 A 发生而事件 B 不发生”这一事件称为 A 与 B 的差，记作 $A-B$. 显然 $A-B=A\cap\overline{B}$

由于事件是通过集合来定义的，所以上面介绍的事件之间的关系与运算和相应的集合之间关系与运算非常相似. 一方面，我们可以借助集合论的知识和方法来帮助理解事件之间的关系与运算，如图 1—1；另一方面，应学会用概率论的观点来解释这些关系与运算.

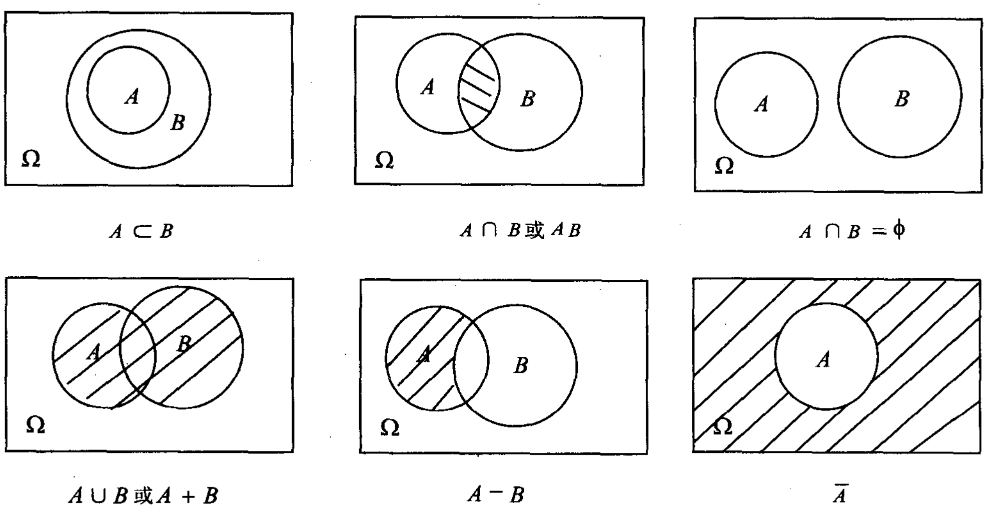


图 1—1

对于事件之间的运算，有以下法则：

①交换律　　$A\cup B=B\cup A$,$A\cap B=B\cap A$

②结合律　　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

③分配律　　$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

④德莫根（*De Morgan*）定律

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$$

【例 1.5】 设 A，B，C 为三个事件，利用它们表示下列事件：

（1）A 发生而 B，C 都不发生：$A\overline{B}\ \overline{C}$或 $A-B-C$ 或 $A-(B\cup C)$；

（2）三个事件都不发生：$\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}$或$\overline{A\cup B\cup C}$；

（3）三个事件中至少发生一个：

$A\cup B\cup C$ 或 $ABC+AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC+A\overline{B}\ \overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\ \overline{B}C$

【例 1.6】 摇奖机中有编号为 0，1，2，…，9 的 10 个奖球. 设事件 A 是“摇出一个号码大于 5 的奖球”，事件 B 是“摇出一个号码为奇数的奖球”.

（1）写出这一试验的样本点和样本空间；

（2）将下列事件表示成样本点的集合，并分别说明它们是什么事件：

$A,\overline{A},B,\overline{B},A+B,AB,A-B,B-A,\overline{A+B}$.

解：（1）样本点共有 10 个，它们是：

ω_i：表示摇出一个号码为 i 的奖球,$(i=0,1,2,\cdots,9)$,

样本空间为 $\Omega=\{\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_9\}$.

（2）$A=\{\omega_6,\omega_7,\omega_8,\omega_9\}=\{$摇出一个号码大于 5 的奖球$\}$,

$\overline{A}=\{\omega_0,\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5\}=\{$摇出一个号码不大于 5 的奖球$\}$,

$B=\{\omega_1,\omega_3,\omega_5,\omega_7,\omega_9\}=\{$摇出一个号码为奇数的奖球$\}$,

$\overline{B}=\{\omega_0,\omega_2,\omega_4,\omega_6,\omega_8\}=\{$摇出一个号码为偶数的奖球$\}$,

$A+B=\{\omega_1,\omega_3,\omega_5,\omega_6,\omega_7,\omega_8,\omega_9\}$

$=\{$摇出一个号码大于 5 或为奇数的奖球$\}$,

$AB=\{\omega_7,\omega_9\}=\{$摇出一个号码大于 5 而且为奇数的奖球$\}$,

$A-B=A\overline{B}=\{\omega_6,\omega_8\}=\{$摇出一个号码大于 5 而且为偶数的奖球$\}$,

$B-A=B\overline{A}=\{\omega_1,\omega_3,\omega_5\}=\{$摇出一个号码为奇数但号码不大于 5 的奖球$\}$,

$\overline{A+B}=\overline{A}\ \overline{B}=\{\omega_0,\omega_2,\omega_4\}$

$=\{$摇出一个号码为偶数而且奖球号码不大于 5 的奖球$\}$.

【例 1.7】 设一个工人生产了 4 个零件. A_i 表示第 i 个零件是正品（$i=1$，2，3，4），试用 A_1，A_2，A_3，A_4 表示下列事件：

（1）4 个零件中没有一个是次品；（2）4 个零件中至少有一个是次品；

（3）4 个零件中只有一个是次品；（4）4 个零件中至少有三个不是次品.

解： (1) $A_1A_2A_3A_4$；

(2) $\overline{A_1A_2A_3A_4}=\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\overline{A_3}\cup\overline{A_4}$；

(3) $\overline{A_1}A_2A_3A_4+A_1\overline{A_2}A_3A_4+A_1A_2\overline{A_3}A_4+A_1A_2A_3\overline{A_4}$；

(4) $\overline{A_1}A_2A_3A_4+A_1\overline{A_2}A_3A_4+A_1A_2\overline{A_3}A_4+A_1A_2A_3\overline{A_4}+A_1A_2A_3A_4$.

第二节　随机事件的概率

一、事件的频率与概率的统计定义

前面讲过，随机现象具有偶然性的一面，在一次试验中，某个随机事件可能发生，也可能不发生，确实是无法预料的，是不确定的. 但是，如果我们在相同条件下进行大量多次重复试验，就会发现，随机现象结果的出现，其实是具有一定的规律性的，因而在某种程度上也是可以预言的.

例如掷一颗均匀的骰子，六面中任一面出现的可能性是相同的，“出现奇数点”这一事件的发生比“出现 1 点”的可能性大，我们怎样度量随机事件发生的可能性大小呢？首先从事件发生的频率说起.

定义 1.1　设事件 A 在 n 次重复试验中发生了 m 次，则称比值 $\frac{m}{n}$ 为事件 A 在 n 次试验中出现的频率，记为 $f_n(A)$. 显然 $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$.

如果试验的次数不多，求出的频率可大可小，似乎没有什么规律，但是，如果我们进行大量重复试验，就会发现频率在一个固定的常数值附近稳定地变化，而且随着试验次数的增多，这种稳定性会越来越明显.

【例 1.8】 在掷一枚硬币的试验中（表 1—1），设 A 为“出现正面”的事件.

由表 1—1 可以看出，投掷次数越多时，频率越接近于 0.5，且稳定在 0.5，这样，0.5 这个数反映了事件 A 发生的可能性的大小. 这种特性就称为随机事件发生的频率的稳定性.

定义 1.2　在相同的条件下进行 n 次重复试验，事件 A 发生的频率总是在 [0，1] 上的一个确定的常数附近摆动，并且稳定在这个常数值附近. 这个常数