高等数学

解题指导

刘 群 李 红 主编

東北大學出版社
Northeastern University Press

高等数学解题指导

主　编　刘　群　李　红
副主编　王新心　刘艳兰

东北大学出版社
·沈　阳·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学解题指导 / 刘群，李红主编 .— 沈阳 ：东北大学出版社，2007.10
ISBN 978-7-81102-401-2

Ⅰ.高…　Ⅱ.①刘…　②李…　Ⅲ.高等数学—高等学校—解题　Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 150433 号

出 版 者：东北大学出版社
地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号
邮编：110004
电话：024—83687331（市场部）　83680267（社务室）
传真：024—83680180（市场部）　83680265（社务室）
E-mail：neuph @ neupress.com
http：//www.neupress.com
印 刷 者：沈阳中科印刷有限责任公司
发 行 者：东北大学出版社
幅面尺寸：184mm×260mm
印　　张：18
字　　数：449 千字
出版时间：2007 年 10 月第 1 版
印刷时间：2007 年 10 月第 1 次印刷
责任编辑：潘佳宁　刘宗玉
责任校对：王　敏
封面设计：唐敏智
责任出版：杨华宁

ISBN 978-7-81102-401-2　　　　定　价：25.00 元

前　言

高等数学是高等理工科院校最主要的基础理论课之一，掌握好高等数学的基本知识，基本理论，基本运算和分析方法，不仅对学生学好后继课程是必要的，而且对提高学生分析问题、解决问题的能力有着深远的影响。

我们从长期的教学实践中体会到，大班讲课这一教学形式要想做到精讲多练是很不容易的。因此，本书本着巩固基础知识、提高解题能力和拓展解题思路的目的，与同济大学数学教研室主编的《高等数学》相配套，分十二章，每章包含内容提要、典型例题解析及相关章节的自测题，并且自测题都附有答案。其中“内容提要”是指各章相关内容的系统总结，具有小结的特点。“典型例题解析”介绍了解题方法及一些评议；所选例题既有用以巩固知识的基本题，也有具有一定难度的综合题。综合测试题既可以全面的帮助学生巩固所学知识，又可以作为考前的自我检测。

本书具有相对的独立性，每章既有中心内容，又有相关内容的要点总结。因此，本书除可作为巩固教材知识的辅导书，还可作为报考硕士研究生和高等数学自学者的学习指导书。

本书由刘群、李红主编，王新心、刘艳兰副主编，参加编写的还有张琨、徐延钦、王翠萍、刘艳、陈艳军等。限于编者水平，书中难免存在错误和不妥之处，欢迎广大读者提出批评和指正。

编　者

2007 年 6 月于东北大学秦皇岛分校

目　　录

第一章　函数与极限 …… 1

一、内容提要 …… 1
二、典型例题解析 …… 2
三、综合测试题 …… 21

第二章　导数与微分 …… 27

一、内容提要 …… 27
二、典型例题解析 …… 29
三、综合测试题 …… 42

第三章　微分中值定理与导数应用 …… 47

一、内容提要 …… 47
二、典型例题解析 …… 49
三、综合测试题 …… 65

第四章　不定积分 …… 70

一、内容提要 …… 70
二、典型例题解析 …… 72
三、综合测试题 …… 86

第五章　定积分 …… 90

一、内容提要 …… 90
二、典型例题解析 …… 93
三、综合测试题 …… 109

第六章　定积分的应用 …… 116

一、内容提要 …… 116
二、典型例题解析 …… 118
三、综合测试题 …… 130

第七章　空间解析几何与向量代数 …… 137

一、内容提要 …… 137

二、典型例题解析……………………………………………………………………………… 140
三、综合测试题………………………………………………………………………………… 145
综合测试题第一部分 A 卷 ……………………………………………………………… 150
综合测试题第一部分 B 卷 ……………………………………………………………… 153

第八章　多元函数微分学……………………………………………………………………… 157

一、内容提要…………………………………………………………………………………… 157
二、典型例题解析……………………………………………………………………………… 161
三、综合测试题………………………………………………………………………………… 172

第九章　重积分………………………………………………………………………………… 179

一、内容提要…………………………………………………………………………………… 179
二、典型例题解析……………………………………………………………………………… 183
三、综合测试题………………………………………………………………………………… 199

第十章　曲线积分与曲面积分………………………………………………………………… 206

一、内容提要…………………………………………………………………………………… 206
二、典型例题解析……………………………………………………………………………… 211
三、综合测试题………………………………………………………………………………… 222

第十一章　无穷级数…………………………………………………………………………… 229

一、内容提要…………………………………………………………………………………… 229
二、典型例题解析……………………………………………………………………………… 233
三、综合测试题………………………………………………………………………………… 247

第十二章　微分方程…………………………………………………………………………… 253

一、内容提要…………………………………………………………………………………… 253
二、典型例题解析……………………………………………………………………………… 256
三、综合测试题………………………………………………………………………………… 271
综合测试题第二部分 A 卷 ……………………………………………………………… 276
综合测试题第二部分 B 卷 ……………………………………………………………… 279

第一章　函数与极限

一、内容提要

(一) 主要定义

【定义 1.1】函数　设数集 $D\subset\mathbf{R}$，如果存在一个法则，使得对 D 中每个元素 x，按法则 f，在 $\mathbf{R}$ 中总有唯一确定的元素 y 与之对应，则称 f：$D\to\mathbf{R}$ 为定义在 D 上的函数，记作

$$y=f(x),\ x\in D.$$

x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为定义域.

【定义 1.2】数列极限　给定数列 $\{x_n\}$ 及常数 a，若对任意 $\varepsilon>0$，总存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立，则称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

【定义 1.3】函数极限

(1) 对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta(\varepsilon)>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$. 则称 A 为 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

(2) 对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $X>0$，当 $|x|>X$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$. 则称 A 为 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

(3) 单侧极限

左(右)极限　对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta(\varepsilon)>0$，使得当 $-\delta<x-x_0<0(0<x-x_0<\delta)$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$. 则称当 $x\to x_0^-$ $(x\to x_0^+)$ 时，$f(x)$ 有左(右)极限 A，记为 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A(\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A)$ 或 $f(x_0-0)=A(f(x_0+0)=A)$.

单边无穷极限　对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $X>0$，使得当 $x>X(x<-X)$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A)$.

【定义 1.4】无穷小、无穷大　若函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0(x\to\infty)$ 时的极限为零($|f(x)|$ 无限增大)，那么称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0(x\to\infty)$ 时的无穷小(无穷大).

【定义 1.5】等价无穷小　若 $\lim\alpha=0$，$\lim\beta=0$，$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$，则称 α 与 β 是等价的无穷小.

【定义 1.6】连续　若 $y=f(x)$ 在点 x_0 附近有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续. 否则 x_0 为 $f(x)$ 的间断点.

(二) 主要定理

【定理 1.1】极限运算法则　若 $\lim u(x)=a$，$\lim v(x)=b$，则：

(1) $\lim(u\pm v)$ 存在，且 $\lim(u\pm v)=\lim u\pm\lim v=a\pm b$；

(2) $\lim(u\cdot v)$存在，且 $\lim(u\cdot v)=\lim u\cdot\lim v=a\cdot b$；

(3) 当 $b\neq0$ 时，$\lim\frac{u}{v}$存在，且 $\lim\frac{u}{v}=\frac{\lim u}{\lim v}=\frac{a}{b}$.

推论 (1) $\lim Cu=C\lim u=Ca$； (2) $\lim u^n=(\lim u)^n=a^n$.

【定理 1.2】极限存在的充要条件

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A;$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=A.$$

【定理 1.3】极限存在准则

(1) 单调有界数列必有极限；

(2) 夹逼准则：设数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$及$\{z_n\}$满足

① $$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n,$$

② $$\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}z_n=a,$$

则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

【定理 1.4】极限与无穷小的关系 若 $\lim f(x)=A$，则 $f(x)=A+\alpha$，其中 $\lim\alpha=0$.

【定理 1.5】两个重要极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.

【定理 1.6】初等函数的连续性 初等函数在其定义区间内连续.

【定理 1.7】闭区间上连续函数的性质

(1) **最值定理** 闭区间上连续函数在该区间上一定有最大值 M 和最小值 m；

(2) **有界定理** 闭区间上连续函数一定在该区间上有界；

(3) **介值定理** 闭区间上连续函数必可取介于最大值 M 与最小值 m 之间的任何值；

(4) **零点存在定理** 设函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续，$f(a)\cdot f(b)<0$，则至少存在一个$\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$.

二、典型例题解析

(一) 填空题

【例 1.1】 函数 $y=\arccos\frac{3x}{x^2+2}$的定义域是________.

解 由 $y=\arccos u$ 的定义域知 $-1\leqslant u\leqslant1$，从而 $-1\leqslant\frac{3x}{x^2+2}\leqslant1$，即

$$(-\infty,-2]\cup[-1,1]\cup[2,+\infty).$$

【例 1.2】 设 $f(x)=\sin x$，$f(\phi(x))=1-x^2$，则函数 $\phi(x)$的定义域为________.

解 由已知 $f(\phi(x))=\sin[\phi(x)]=1-x^2$，所以 $\phi(x)=\arcsin(1-x^2)$，则

$$-1\leqslant1-x^2\leqslant1,\ 即\quad-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}.$$

【例 1.3】 设 $f(x)=\frac{x}{x-1}$ $(x\neq0,x\neq1)$，$f_n(x)=\underbrace{f(f(\cdots f(x)))}_{n}$，试求 $f_n(x)$.

解 由 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$，则 $f_2(x)=f(f(x))=\dfrac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{x}{x-1}-1}=x$，显然复合两次变回原来的形式，所以 $f_n(x)=\begin{cases} x, & n=2k, \\ \dfrac{x}{x-1}, & n=2k+1. \end{cases}$

【例 1.4】 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$，则 $a=$________.

解 因为
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-a+3a}{x-a}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3a}{x-a}\right)^x$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{3a}\cdot\frac{3a}{x-a}x}=e^{3a}.$$

再由 $e^{3a}=8=e^{\ln 8}=e^{3\ln 2}$，得到 $a=\ln 2$.

【例 1.5】 (2004，数三) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$，则 $a=$________，$b=$________.

解 因 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$，而 $\lim\limits_{x\to 0}\sin x(\cos x-b)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}e^x-a=0$，所以 $a=1$. 又 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$，$e^x-1\sim x$，则

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{e^x-1}(\cos x-b)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}(\cos x-b)=\lim\limits_{x\to 0}\cos x-b=5$，则 $1-b=5$，即 $b=-4$.

【例 1.6】 已知当 $x\to 0$ 时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $1-\cos x$ 是等价无穷小，则常数 $a=$________.

解 由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1}{1-\cos x}=1$，而
$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{3}\ln(1+ax^2)}-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}\ln(1+ax^2)}{\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{3}ax^2}{x^2}=\frac{2a}{3},$$
故 $a=\dfrac{3}{2}$.

【例 1.7】 (2004，数二) 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)x}{nx^2+1}$，则 $f(x)$ 的间断点为 $x=$________.

解 $f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)x}{nx^2+1}=x\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)}{nx^2+1}=\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$

而 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty\neq f(0)$，故 $f(x)$ 的(无穷)间断点为 $x=0$.

【例 1.8】 设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{x}{2}, & x\neq 0, \\ a, & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$________.

解 要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，应有 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=a$.

而
$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\sin\frac{x}{2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=\frac{1}{2},$$

所以　$a=\frac{1}{2}$.

(二) 选择题

【例 1.9】 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，又 $a>0$ 且 $a\neq 1$，则函数 $F(x)=f(|\sin x|-2)\operatorname{sgn}(\sin x)$ 是[　　].

(A) 偶函数;　　(B) 奇函数;　　(C) 非奇非偶函数;　　(D) 奇偶函数.

解 因为 $\operatorname{sgn}[\sin(-x)]=-\operatorname{sgn}(\sin x)$，所以 $\operatorname{sgn}(\sin x)$ 为奇函数. 而 $f(|\sin x|-2)$ 为偶函数，故 $f(|\sin x|-2)\cdot\operatorname{sgn}(\sin x)$ 为奇函数，故选(B).

【例 1.10】 设 $f(x)$ 是偶函数，当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=x-x^2$，则当 $x\in[-1,0]$ 时，$f(x)=$[　　].

(A) $-x+x^2$;　　(B) $x+x^2$;　　(C) $|x-x^2|$;　　(D) $-x-x^2$.

解 因为 $f(-x)=f(x)$，取 $x\in[-1,0]$，则 $-x\in[0,1]$，所以

$$f(-x)=(-x)-(-x)^2=-x-x^2,\text{ 故选(D).}$$

【例 1.11】 $f(x)=\begin{cases}x-1, & -1<x\leqslant 0,\\ x, & 0<x\leqslant 1,\end{cases}$ 则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$[　　].

(A) -1;　　(B) 0;　　(C) 不存在;　　(D) 1.

解 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-1)=-1$.

因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在，故选(C).

【例 1.12】 下列结论正确的是 [　　].

(A) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在;

(B) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\lim\limits_{n\to+\infty}a_{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}=\frac{A}{A}=1$;

(C) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n)^{b_n}=A^B$;

(D) 若数列 $\{a_{2n}\}$ 收敛，且 $a_{2n}-a_{2n-1}\to 0(n\to\infty)$，则数列 $\{a_n\}$ 收敛.

解 (A)不正确，反例为 $a_n=\{n\}$;

(B)不正确，因为只有当 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 0$ 时，才能运用除法法则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\lim\limits_{n\to+\infty}a_{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}$;

(C)不正确，只有 $A\neq 0$ 时，$\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n)^{b_n}=A^B$ 才成立. 故选(D).

【例 1.13】 当 $x\to 0$ 时，变量 $\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ 是 [　　].

(A) 无穷小;　　(C) 有界的，但不是无穷小量;

(B) 无穷大;　　(D) 无界的，但不是无穷大量.

解 $\forall M$，$\exists x_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$，只要 $n>\left[\frac{M}{2\pi}\right]$，则 $|f(x_n)|=\left|2n\pi+\frac{\pi}{2}\right|>M$，所以 $\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ 无界. 再令 $x=\frac{1}{2k\pi}(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{k\to\infty}(2k\pi)^2\cdot\sin 2k\pi\equiv 0$，故

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\neq\infty$. 故选(D).

【例 1.14】 当 $x\to 0$ 时，下列 4 个无穷小关于 x 的阶最高的是 [　　].

(A) x^2+x^4;　　　(B) $\dfrac{\sin x}{x}-1$;

(C) $\sqrt{1+\sin x}-1$;　(D) $\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x^4}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)=1$，所以 x^2+x^4 是 x 的 2 阶无穷小.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin x}{x}-1}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^{k+1}}=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{1}{6}x^3}{x^{k+1}},$$

要使极限存在 $k=2$, 故(B)是 x 的 2 阶无穷小.

当 $x\to 0$ 时，$\sqrt{1+\sin x}-1=\sin\dfrac{x}{2}\sim\dfrac{1}{2}x$, 故(C)是 x 的同阶无穷小.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^k}&=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x\sin x}{x^k(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}\\&=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^k\cos x}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^k}.\end{aligned}$$

故(D)是 x 的 3 阶无穷小. 因此选(D).

【例 1.15】 (2005，数二)设函数 $f(x)=\dfrac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}$，则 [　　].

(A) $x=0$，$x=1$ 都是 $f(x)$的第一类间断点;

(B) $x=0$，$x=1$ 都是 $f(x)$的第二类间断点;

(C) $x=0$ 是 $f(x)$的第一类间断点，$x=1$ 是 $f(x)$的第二类间断点;

(D) $x=0$ 是 $f(x)$的第二类间断点，$x=1$ 是 $f(x)$的第一类间断点.

解 因为$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\infty$，则 $x=0$ 是 $f(x)$的第二类间断点;而

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}=0,\quad \lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}=-1,$$

所以 $x=1$ 是 $f(x)$的第一类(跳跃)间断点,故选(D).

(三) 非客观题

1. 函数及其性质

【例 1.16】 求函数 $f(x)=\lg(1-\lg x)$的定义域.

解 要使 $f(x)$有意义，x 应满足$\begin{cases}x>0,\\1-\lg x>0,\end{cases}$即 $0<x<10$，所以 $f(x)$的定义域为$(0, 10)$.

【例 1.17】 设函数 $f(x)$的定义域是$[0, 1]$，试求 $f(x+a)+f(x-a)$的定义域($a>0$).

解 $f(x)$的定义域是$[0, 1]$，则$\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1,\\0\leqslant x-a\leqslant 1,\end{cases}$故 $a\leqslant x\leqslant 1-a$，则

当 $a=1-a$，即 $a=\dfrac{1}{2}$时，函数的定义域为 $x=\dfrac{1}{2}$;

当 $1-a>a$，即 $a<\dfrac{1}{2}$时，函数的定义域为$[a,\ 1-a]$；

当 $1-a<a$，即 $a>\dfrac{1}{2}$时，函数的定义域为空集.

【例 1.18】 设 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$，$f(\varphi(x))=1-x$，并且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$及其定义域.

解 因为 $f(\varphi(x))=\mathrm{e}^{[\phi(x)]^2}=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，故 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$，为使此式有意义，需 $\ln(1-x)\geqslant 0$，所以函数 $\varphi(x)$的定义域为$\{x\,|\,x\leqslant 0\}$.

【例 1.19】 设 $f(x+2)=2^{x^2+4x}-x$，求 $f(x-2)$.

解 方法一(配方法) $f(x+2)=2^{(x+2)^2-4}-(x+2)+2$，所以

$$f(x-2)=2^{x^2-4x}-x+4.$$

方法二(变量代换法) 令 $x=t-2$，代入得 $f(t)=2^{t^2-4}-t+2$，即

$$f(x)=2^{x^2-4}-x+2,\ \text{则}\ f(x-2)=2^{x^2-4x}-x+4.$$

【例 1.20】 设 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x^2, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$ $g(x)=\ln x$，求 $f(g(x))$.

解 $$f(g(x))=f(\ln x)=\begin{cases}2\ln x, & 0\leqslant \ln x\leqslant 1,\\ \ln^2 x, & 1<\ln x\leqslant 2\end{cases}=\begin{cases}2\ln x, & x\in[1,\ \mathrm{e}]\cap(0,\ +\infty),\\ \ln^2 x, & x\in[\mathrm{e},\ \mathrm{e}^2]\cap(0,\ +\infty)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}2\ln x, & x\in[1,\ \mathrm{e}],\\ \ln^2 x, & x\in[\mathrm{e},\ \mathrm{e}^2].\end{cases}$$

【例 1.21】 设 $\varphi(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ $\Psi(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 1,\\ 2, & |x|>1.\end{cases}$ 求 $\varphi(\varphi(x))$，$\varphi(\Psi(x))$.

解 (1) 当 $x\in(-\infty,\ +\infty)$时，$0\leqslant\varphi(x)\leqslant 1$，所以 $\varphi(\varphi(x))\equiv 1$，$x\in(-\infty,\ +\infty)$.

(2) 因为 $\varphi(\Psi(x))=\begin{cases}1, & |\Psi(x)|\leqslant 1,\\ 0, & |\Psi(x)|>1,\end{cases}$ 且 $\begin{cases}\Psi(x)=1, & |x|=1,\\ 1<\Psi(x)\leqslant 2, & |x|\neq 1,\end{cases}$ 故

$$\varphi(\Psi(x))=\begin{cases}1, & |x|=1,\\ 0, & |x|\neq 1.\end{cases}$$

【例 1.22】 求函数 $f(x)=\begin{cases}1-2x^2, & x<-1,\\ x^3, & -1\leqslant x\leqslant 2,\\ 12x-16, & x>2\end{cases}$ 的反函数.

解 当 $x<-1$ 时，$y=1-2x^2<-1$，则 $x=-\sqrt{\dfrac{1-y}{2}}$(正值舍去)；

当 $-1\leqslant x\leqslant 2$ 时，$-1\leqslant y=x^3\leqslant 8$，则 $x=\sqrt[3]{y}$；

当 $x>2$ 时，$y=12x-16>8$，则 $x=\dfrac{y+16}{12}$. 所以 $f(x)$的反函数为

$$y=f^{-1}(x)=\begin{cases}-\sqrt{\dfrac{1-x}{2}}, & x<-1,\\ \sqrt[3]{x}, & -1\leqslant x\leqslant 8,\\ \dfrac{x+16}{12}, & x>8.\end{cases}$$

【例 1.23】 设 $f(x)$在$(-\infty, +\infty)$上有定义，且对任意 x，$y\in(-\infty, +\infty)$，有 $|f(x)-f(y)|<|x-y|$，讨论 $F(x)=f(x)+x$ 在$(-\infty, +\infty)$上的单调性.

解 任取 x_1，$x_2\in(-\infty, +\infty)$，不妨设 $x_2>x_1$，则由条件有

$$f(x_2)-f(x_1)<|f(x_2)-f(x_1)|<|x_2-x_1|=x_2-x_1,$$

所以 $f(x_1)-f(x_2)<x_2-x_1$，则可变形为 $f(x_1)+x_1<f(x_2)+x_2$，即

$$F(x_1)<F(x_2),$$

故 $F(x)$在$(-\infty, +\infty)$上单调增加.

【例 1.24】 求 c 的一个值，使$(b+c)\sin(b+c)-(a+c)\sin(a+c)=0$，这里 $b>a$，且均为常数.

解 令 $f(x)=x\sin x$，则 $f(x)$是一个偶函数，则有 $f(b+c)=f[-(b+c)]$，要使 $f(b+c)=f(a+c)$ $(a\neq b)$成立，则有$(a+c)=-(b+c)$，即 $c=-\dfrac{1}{2}(a+b)$.

2. 数列的极限

(1) 用 ε-N 定义证明数列极限.

定义证明的关键是利用$|x_n-A|<\varepsilon$ 倒推找到正整数N(与 ε 有关)，这个过程常常是通过不等式适当放大来实现的.

【例 1.25】 求证$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$.

证明 对$\forall\varepsilon>0$，要使$\left|\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon$ 成立，则需

$$\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|=\frac{\sqrt{n^2+a^2}-n}{n}<\frac{n+|a|-n}{n}=\frac{|a|}{n}<\varepsilon.$$

只要 $n>\left[\dfrac{|a|}{n}\right]+1$，取 $N=\left[\dfrac{|a|}{n}\right]+1$，当 $n>N$ 时，有$\left|\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon$.
证毕.

【例 1.26】 设常数 $a>1$，用 ε-N 定义证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$.

证 对$\forall\varepsilon>0$，要使$\left|\dfrac{a^n}{n!}-0\right|<\varepsilon$ 成立，则需

$$\left|\frac{a^n}{n!}-0\right|=\frac{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}{1\cdot\cdots\cdot[a]\cdot([a]+1)\cdot\cdots\cdot n}<k\cdot\left[\frac{a}{[a]+1}\right]^{n-[a]}<\varepsilon,\quad\left(\text{其中 } k=\frac{a\cdot\cdots\cdot a}{1\cdot\cdots\cdot[a]}\right).$$

只要 $n>\dfrac{\lg\frac{\varepsilon}{k}}{\lg\frac{a}{[a]+1}}+[a]$，为保证 $N>0$，取 $N=\max\left\{1,\ \left[\dfrac{\lg\frac{\varepsilon}{k}}{\lg\frac{a}{[a]+1}}+[a]\right]\right\}$，当 $n>N$ 时，有$\left|\dfrac{a^n}{n!}-0\right|<\varepsilon$，证毕.

(2) 通过代数变形求数列极限.

【例 1.27】 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^4}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2^{2n}}\right)$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^4}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2^{2n}}\right)$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{2n}}\right)}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{2^{2(n+1)}}\right] = 2.$$

【例 1.28】 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+1}-n)$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+1}-n) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+n)}{\sqrt{n^2+1}+n}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1} = \frac{1}{2}.$$

【例 1.29】 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{5^n}}$.

解 由等比数列的求和公式 $q+q^2+\cdots+q^n = \dfrac{q(1-q^n)}{1-q}$，将数列变形，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{5^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{3}\times\frac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}}}{\frac{1}{5}\times\frac{1-\frac{1}{5^n}}{1-\frac{1}{5}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{5^n}\right)} = \frac{2+\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 10.$$

【例 1.30】 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}[(2n-1)+2(2n-3)+3(2n-5)+\cdots+n]$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}[(2n-1)+2(2n-3)+3(2n-5)+\cdots+n] = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum\limits_{k=1}^{n}k(2n-2k+1)$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\left[(2n+1)\sum_{k=1}^{n}k - 2\sum_{k=1}^{n}k^2\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\left[\frac{(2n+1)n(n+1)}{2} - 2\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3}.$$

【例 1.31】 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\cdots+\frac{1}{4n^2-1}\right)$.

解 因为 $\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right]$，则

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\cdots+\frac{1}{4n^2-1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}.$$

【例 1.32】 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+\cdots+n}\right)$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+\cdots+n}\right)$ （由等差数列的前 n 项和公式）

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\frac{2}{2\times3}+\frac{2}{3\times4}+\cdots+\frac{2}{n(n+1)}\right]$ （逐项拆分）

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left[2-\frac{2}{n+1}\right]=2.$

(3) 利用夹逼准则求数列极限.

【例 1.33】 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}$.

解 因为 $1<\sqrt{1+\frac{1}{n}}<1+\frac{1}{n}$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$，

由夹逼准则得，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}=1$.

【例 1.34】 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)$.

解 因为 $\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}\leqslant\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\leqslant\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}$，

且
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}=\frac{1}{2},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}=\frac{1}{2},$$

由夹逼准则得，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)=\frac{1}{2}$.

【例 1.35】 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^6+n}}+\frac{2^2}{\sqrt{n^6+2n}}+\cdots+\frac{n^2}{\sqrt{n^6+n^2}}\right)$.

解 $\frac{1}{\sqrt{n^6+n^2}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^6+kn}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^6+n}}$，则

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{\sqrt{n^6+n^2}}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{\sqrt{n^6+kn}}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{\sqrt{n^6+n}},$$

且
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{\sqrt{n^6+n^2}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{n^6+n}}\ \frac{1}{3},$$

由夹逼准则得，原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2}{\sqrt{n^6+kn}}=\frac{1}{3}$.

【例 1.36】 证明(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$；(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\ (a>0)$.

证 (1) 令 $\sqrt[n]{n}=1+h_n$，则

$$n=(1+h_n)^n=1+nh_n+\frac{n(n-1)}{2}h_n^2+\cdots+h_n^n>\frac{n(n-1)}{2}h_n^2,$$

即
$$0<h_n<\sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

由夹逼准则，$\lim\limits_{n\to\infty}h_n=0$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+h_n)=1$.

(2) 当 $a>1$ 时，$0<\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{n}$，由夹逼准则，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

当 $0<a<1$ 时，令 $b=\frac{1}{a}>1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{b}}=1$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>0)$.

注 例 1.36 的结果以后可直接作为结论使用.

【例 1.37】 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}$ $(a_1, a_2, \cdots, a_k>0, k\in\mathbf{N})$.

解 记 $a=\max\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$，则 $\sqrt[n]{a^n}\leqslant\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}\leqslant\sqrt[n]{ka^n}$，且

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n}=a,\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{ka^n}=a\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{k}=a,$$

由夹逼准则得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}=a=\max\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}.$$

(4) 利用单调有界准则求数列极限.

一般采用 $x_n-x_{n-1}\geqslant 0$，$\dfrac{x_n}{x_{n-1}}\geqslant 1$ 证明数列的单调性或函数的单调性；数列的有界性证明方法比较灵活.

【例 1.38】 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}}}_{n}$.

解 设 $x_n=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}}$，

则 $x_1=\sqrt{a}$，$x_2=\sqrt{a+\sqrt{a}}$，…，$x_n=\sqrt{x_{n-1}+\sqrt{a}}$，从而 $x_{n-1}<x_n$，数列 $\{x_n\}$ 单调增加.

又 $x_n=\sqrt{a+x_{n-1}}$，$x_n^2=a+x_{n-1}$，$x_n=\dfrac{a}{x_n}+\dfrac{x_{n-1}}{x_n}<\dfrac{a}{\sqrt{a}}+1=\sqrt{a}+1$，数列有上界，故 $\{x_n\}$ 有极限.

不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，将 $x_n^2=a+x_{n-1}$ 两边取极限，有 $A^2=a+A$，故 $A=\dfrac{1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$.

【例 1.39】 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\cdots\sqrt{3}}}}$（共有 n 个根号）.

解 设 $x_n=\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\cdots\sqrt{3}}}}$，显然 $x_n>x_{n-1}$，$\{x_n\}$ 单调增加；且 $x_n=\sqrt{3x_{n-1}}$，$x_1=\sqrt{3}$，$x_2=\sqrt{3\sqrt{3}}$，…，$x_n=\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\cdots\sqrt{3}}}}<3$，$\{x_n\}$ 有上界，所以数列极限存在.

不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，将 $x_n^2=3x_{n-1}$ 两边取极限，有 $A^2=3A$，则 $A=3$，(舍去 $A=0$).

【例 1.40】 设 $a>0$，$x_1>0$，$x_{n+1}=\dfrac{x_n^2+a}{2x_n}$，$n=1, 2, \cdots$，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求极限.

解 $x_{n+1}-x_n=\dfrac{a-x_n^2}{2x_n}\leqslant 0$，数列 $\{x_n\}$ 单调递减，且

$$x_{n+1}=\frac{x_n^2+a}{2x_n}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)\geqslant\sqrt{x_n\cdot\frac{a}{x_n}}=\sqrt{a},$$

$\{x_n\}$ 有界，所以数列 $\{x_n\}$ 收敛.

令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，对 $x_{n+1}=\dfrac{x_n^2+a}{2x_n}$ 两边取极限，有 $A=\dfrac{1}{2}\left(A+\dfrac{a}{A}\right)$，则 $A=\sqrt{a}$（舍去负值）.

(5) 利用无穷小的性质求数列极限.

【例 1.41】 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a}-1)\quad(a>0)$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(3^{\frac{1}{n}}-3^{\frac{1}{n+1}})$； (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n}{n^2+1}$.

解 (1) 当 $n\to\infty$时，$e^{\frac{1}{n}\ln a}-1\sim\dfrac{1}{n}\ln a$，则

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a}-1)=\lim_{n\to\infty} n(e^{\frac{1}{n}\ln a}-1)=\lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{1}{n}\ln a=\ln a.$$

(2) 当 $n\to\infty$时，$3^{\frac{1}{n(n+1)}}-1\sim\dfrac{\ln 3}{n(n+1)}$，则

$$\lim_{n\to\infty} n^2(3^{\frac{1}{n}}-3^{\frac{1}{n+1}})=\lim_{n\to\infty}3^{\frac{1}{n+1}}n^2(3^{\frac{1}{n(n+1)}}-1)=\lim_{n\to\infty}3^{\frac{1}{n+1}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\cdot\ln 3}{n(n+1)}=\ln 3.$$

(3) 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}}{n^2+1}=0$，而$|\sin n|\leqslant 1$，由于无穷小与有界函数的乘积仍为无穷小，所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n}{n^2+1}=0.$$

注 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$ 不存在，故不能写成$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n}{n^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}}{n^2+1}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\sin n=0$.

【例 1.42】 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\arctan(n!)\times(\sqrt{n+1}-n)^2-\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2\times 3}+\cdots+\dfrac{1}{(n-1)n}\right)\dfrac{3n^2+1}{n^2-1}\right]$.

解 因为 $\arctan(n!)\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，$(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^2=\dfrac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^2}$.

所以
$$\lim_{n\to\infty}\arctan(n!)(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^2=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}\right]=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=1,\ \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+1}{n^2-1}=3,$$

则
$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}\right]\frac{3n^2+1}{n^2-1}=3.$$

故 $\quad$ 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}[(\sqrt{n+1}-n)^2\arctan(n!)]-\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3n^2+1}{n^2-1}=0-3=-3$.

注 利用函数极限求数列极限见第三章；利用定积分定义求数列极限见第六章；利用级数收敛的性质求极限见第十一章.

3. 函数的极限

(1) 用 ε-δ 定义或ε-X 定义证明极限.

用 ε-δ 定义证明函数极限的关键是用倒推法适当放缩找到$|x-x_0|$与 ε 的关系，确定$\delta(\varepsilon)$；而用 ε-X 定义证明函数极限的关键则是用倒推法适当放缩找到$|x|$与ε 的关系，确定$X(\varepsilon)$.

【例 1.43】 证明$\lim\limits_{x\to 2}x^2=4$.

证 对于$\forall\varepsilon>0$，不妨设$|x-2|<1$，则$|x+2|\leqslant|x|+2<|x-2|+2+2<5$，要使$|x^2-4|=|x+2|\cdot|x-2|<5\cdot|x-2|<\varepsilon$，只要取 $\delta=\min\left\{1,\ \dfrac{\varepsilon}{5}\right\}$，当$0<|x-2|<\delta$ 时，就有$|x^2-4|<\varepsilon$. 证毕.

注 函数在 x_0 的极限只与函数在$\mathring{U}(x_0,\ \delta)$的定义有关，与函数的整个定义范围无关，