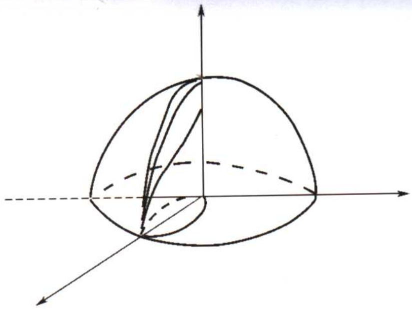
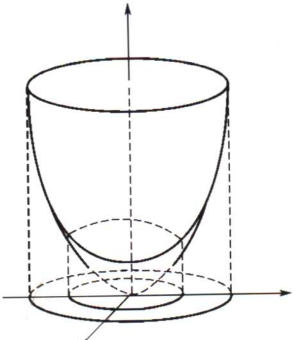
21世纪高等理工科重点课程辅导丛书

高等数学

学习辅导

杨永愉　李秋姝　崔丽鸿　编





化学工业出版社

21世纪高等理工科重点课程辅导丛书

高等数学学习辅导

杨永愉　李秋姝　崔丽鸿　编

化学工业出版社

·北京·

本书是根据2005年教育部数学课程教学指导委员会下发的《工科类本科数学基础课程教学基本要求（修订稿）》的基本精神，结合现行的通用教材《高等数学（第五版）》（同济大学应用数学系主编）的内容编写而成。内容包括一元函数微积分、多元函数微积分、空间解析几何与向量代数、无穷级数、微分方程等12章。每章包含五部分：内容提要、知识点关联网络、例题分析、习题、习题答案与提示。全书共收录1000多道例题和习题，所有例题按基本题型分类编排。通过研读例题分析和演算每章中的习题，可以使读者深入理解基本概念，熟练掌握各种题型的解题思路和解题技巧，提高逻辑思维的条理性与严密性。

本书是理工类和经管类本科各专业学生的“高等数学”或“微积分”课程的学习辅导用书，是参加硕士研究生入学数学考试的复习资料，同时也可作为相关课程数学教师的教学参考资料。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学学习辅导/杨永愉，李秋姝，崔丽鸿编. —北京：化学工业出版社，2007.9
（21世纪高等理工科重点课程辅导丛书）
ISBN 978-7-122-01161-9

Ⅰ.高… Ⅱ.①杨…②李…③崔… Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第139986号

责任编辑：唐旭华　　文字编辑：宋湘玲
责任校对：吴　静　　装帧设计：郑小红

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街13号　邮政编码100011）
印　　刷：北京市振南印刷有限责任公司
装　　订：三河市宇新装订厂
850mm×1168mm　1/32　印张15¾　字数445千字
2007年10月北京第1版第1次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）
售后服务：010-64518899
网　　址：http://www.cip.com.cn
凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：25.00元

前　言

本书是根据2005年教育部数学课程教学指导委员会下发的《工科类本科数学基础课程教学基本要求（修订稿）》的基本精神，结合现行的通用教材《高等数学（第五版）》（同济大学应用数学系主编）的内容编写而成。

全书内容分为12章和附录，具体包括函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分应用、空间解析几何与向量代数、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、微分方程。每章均包含五部分：内容提要、知识点关联网络、例题分析、习题、习题答案与提示。

本书的重点是每章的“例题分析”部分，这部分内容的编写指导思想是，首先归纳出每章的基本题型，然后以基本题型为框架，对每一种题型选配若干典型例题，其中大部分例题都包含分析或注释。旨在便于教师在教学中使用本书，学生在课下复习时研读本书。所选例题的难度相当或高于通用教材中每章总习题中的题目，包括教材中较难而又具有典型性的习题，近年硕士研究生入学考试的试题（例题编号前标有△记号），以及课程考试试卷中的试题。附录为高等数学课程期中和期末考试试卷和答案，可供读者自测用。

本书的一个特色是，在每章中都绘制了“知识点关联网络”，目的是帮助学生在复习基本概念、基本理论和基本方法时，掌握各知识点之间的相互联系，在头脑中形成完整的认知结构，防止知识点的缺失。

本书可作为理工类和经管类本科各专业学生的“高等数学”或“微积分”课程的学习辅导用书，同时也可用作参加硕士研究生入学数学考试的复习资料。

本书由杨永愉教授负责组织编写和统稿。参加编写的有杨永

愉、李秋姝、崔丽鸿。其中第一、二、三、七章及附录由杨永愉编写，第四、五、六、十一、十二章由李秋姝编写，第八、九、十章由崔丽鸿编写。在编写过程中得到了黄金坤和杨丰梅两位教授的悉心指导与大力支持，在此一并表示感谢。

由于水平有限，缺点与错误在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

2007 年 7 月

目　　录

第一章　函数与极限

一、内容提要

1. 函数定义

设有两个变量 x 和 y，D 是一个给定的数集. 如果对于变量 x 的每一个取值 $x\in D$，变量 y 按照一定的法则总有确定的数值和它对应，则称变量 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$，$y=g(x)$ 或 $y=f(x)$ 等. 其中数集 D 称为这个函数的定义域，x 称为自变量，y 称为因变量. 变量 y 的取值全体 $W=\{y \mid y=f(x), x\in D\}$ 称为函数的值域.

2. 函数的有界性

如果存在正数 M，对于任意的 $x\in \mathrm{Z}$ 都有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在Z 内有界.

3. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果对于 I 内的任意两个数 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$[或 $f(x_1)>f(x_2)$]，则称 $f(x)$ 在 I 上单调增加（或单调减少).

4. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对于 D 内的任意 x，恒有 $f(-x)=f(x)$ [或 $f(-x)=-f(x)$]，则称 $f(x)$ 为偶函数 [或奇函数].

5. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在正数 T，使得对于任意一 $x\in D$ 有 $(x\pm T)\in D$，且 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是以 T

为周期的周期函数.

6. 数列 $\{x_n\}$ 的极限

设数列 $\{x_n\}$ 和常数 A，如果对于任意给定的正数 ε，总存在正整数N，当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-A|<\varepsilon$，则称常数 A 是数列 $\{x_n\}$ 的极限，或称当 $n\to\infty$ 时，数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A，记作 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

7. 函数 $f(x)$ 的极限

设函数 $f(x)$ 和常数 A，如果对于任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 以 A 为极限，或称当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 收敛于 A，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

设函数 $f(x)$ 和常数 A，如果对于任意给定的正数 ε，总存在正数Z，当 $|x|>Z$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 以 A 为极限，或称当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 收敛于 A，记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

8. 极限计算的常用法则　公式　定理

(1) 无穷小量的性质与运算法则；

(2) 极限的四则运算法则；

(3) 复合函数极限的运算法则；

(4) 极限存在的两个准则；

(5) 两个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e};$$

(6) 无穷小的等价代换定理

常用等价无穷小：当 $x\to 0$ 时，

$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$\arcsin x\sim x$，$\arctan x\sim x$，

$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$，$\mathrm{e}^x-1\sim x$，$a^x-1\sim x\ln a$，$\ln(1+x)\sim x$，

$\sqrt[n]{1+x^m}-1\sim\frac{x^m}{n}$；

（7）洛必达法则；

（8）导数和定积分的定义；

（9）泰勒公式.

9. 函数在一点处连续的定义

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，记 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，如果 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，则称 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上处处连续，则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，记作 $f(x)\in C[a,b]$.

10. 函数间断点及其分类

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义（在 x_0 处可以没有定义），如果 $f(x)$ 有下列三种情形之一：①在 x_0 处没有定义；②虽在 x_0 处有定义，但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在；③虽在 x_0 处有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 处不连续，点 x_0 称为 $f(x)$ 的间断点.

设 x_0 是函数 $f(x)$ 的间断点，如果 $f(x)$ 在 x_0 处的左右极限都存在，则称 x_0 为 $f(x)$ 的第一类间断点. 其中当左右极限相等时，x_0 称为 $f(x)$ 的可去间断点；当左右极限不相等时，x_0 称为 $f(x)$ 的跳跃间断点. 如果 $f(x)$ 在 x_0 处的左右极限中至少有一个不存在时，则称 x_0 为 $f(x)$ 的第二类间断点. 其中，根据极限不存在的情况，又分为无穷间断点和振荡间断点.

11. 闭区间上连续函数的性质见第三章内容提要 1.

二、知识点关联网络

知识点关联网络如图 1-1 所示.

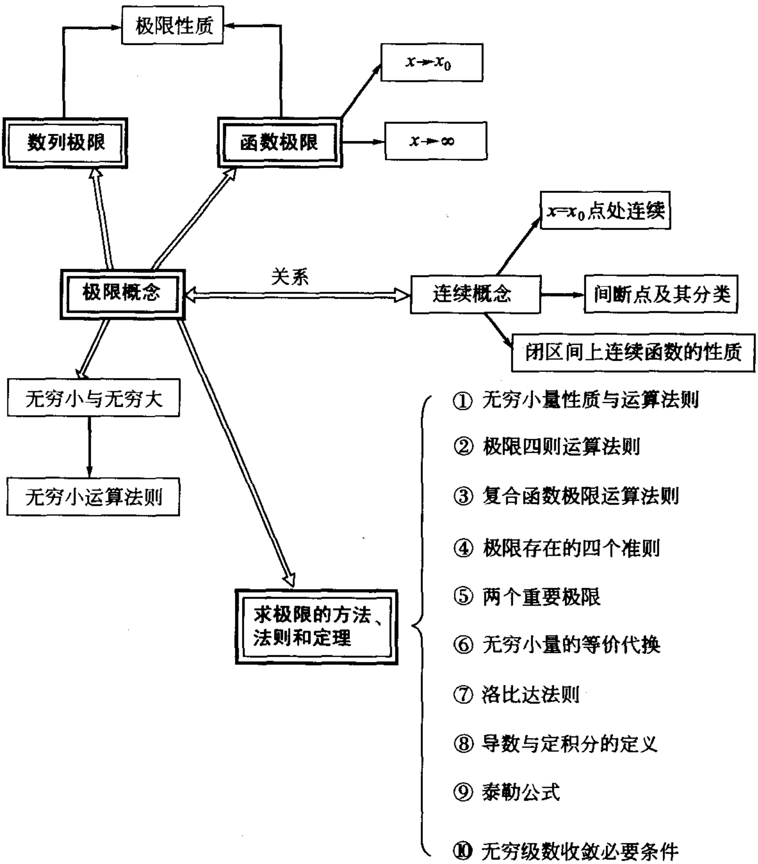


图 1-1

三、例题分析

（一）复合函数、分段函数和反函数

复合函数是微积分理论所研究的一类重要函数关系．对于给定的复合函数，必须能够从外到内逐层剥离复合关系，这是掌握复合函数的第一步，也是最重要的一步．在实际应用中，常常需要构造

复合函数，确定它的表达式和定义域.

分段函数是微积分理论中最常见的一类非初等函数，它不仅在理论研究中具有重要的价值，而且在数学建模中，更是不可或缺的数学工具.

【例 1】 设 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$ 的表达式及其定义域.

解 由已知条件：$f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$ 可得

$$f[\varphi(x)]=e^{\varphi^2(x)}=1-x,\quad \varphi^2(x)=\ln(1-x).$$

由于 $\varphi(x)\geqslant 0$，所以，$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$，这是函数 $\varphi(x)$ 的表达式. 下面考虑 $\varphi(x)$ 的定义域

$$\begin{cases}1-x>0,\\ \ln(1-x)\geqslant 0,\end{cases}\quad \text{由此解出 } x\leqslant 0,$$

所以　$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$，　$x\leqslant 0$.

【例 2】 收音机每台售价为 90 元，成本为 60 元，厂方为鼓励销售商大量采购，决定凡是订购量超过 100 台以上的，每多订购 1 台，售价就降低 0.1 元，但最低价为每台 75 元.

(1) 将每台的实际售价 p 表示为订购量 x 的函数；

(2) 将厂方所获的利润 P 表示成订购量 x 的函数；

(3) 某一商行订购了 200 台，厂方可获利润多少?

解 (1) 当 $x\leqslant 100$ 台时每台售价为 90 元，现计算订购量 x 为多少台时售价降为 75 元/台

$$90-75=15,\quad 15\div 0.1=150.$$

所以，当订购量超过 $150+100=250$ 台时，每台售价为 75 元，当订购量在 100～250 台时，每台售价为 $90-(x-100)\times 0.1=100-0.1x$，因而实际售价 p 与订购量 x 之间的函数关系为

$$p=\begin{cases}90, & x\leqslant 100,\\ 100-0.1x, & 100<x<250,\\ 75, & x\geqslant 250.\end{cases}$$

(2) 每台利润是实际价格 p 与成本之差：$p-60$，所以总利润 P 为

$$P=(p-60)x.$$

(3)由(1)先计算出 $p=100-0.1\times 200=80$,再由(2)知

$$P=(80-60)\times 200=4000(\text{元}).$$

【例 3】 设 $f(x)=\begin{cases}1-2x^2, & x<-1,\\ x^3, & -1\leqslant x\leqslant 2,\\ 12x-16, & x>2,\end{cases}$ 求 $f(x)$ 的反函数 $g(x)$ 的表达式.

分析 由分段函数求反函数,需要逐段讨论函数的单调性和取值范围.

解 当 $x<-1$ 时,$f(x)=1-2x^2$,显然 $f(x)$ 在 $x<-1$ 的范围内是单调增加的,而且有 $f(x)<-1$.

设 $y=1-2x^2$,可得 $x=-\sqrt{(1-y)/2}$,

即
$$g(x)=-\sqrt{\frac{1-x}{2}},\quad x<-1.$$

当 $-1\leqslant x\leqslant 2$ 时,$f(x)=x^3$,显然 $f(x)$ 在区间 $[-1,2]$ 上是单调增加的,且 $-1\leqslant f(x)\leqslant 8$.

设 $y=x^3$,由此解出 $x=\sqrt[3]{y}$,

即
$$g(x)=\sqrt[3]{x},\quad -1\leqslant x\leqslant 8.$$

当 $x>2$ 时,$f(x)=12x-16$,显然 $f(x)$ 在 $x>2$ 的范围内是单调增加的,而且 $f(x)>8$.

设 $y=12x-16$,解出 $x=(y+16)/12$,

即
$$g(x)=\frac{x+16}{12},\quad x>8.$$

综上所述
$$g(x)=\begin{cases}-\sqrt{\dfrac{1-x}{2}}, & x<-1,\\ \sqrt[3]{x}, & -1\leqslant x\leqslant 8,\\ \dfrac{x+16}{12}, & x>8.\end{cases}$$

(二) 数列与函数的极限

极限是研究变量变化趋势的理论,它将初等数学中的有限次运算发展到了高等数学中的无穷次运算,微积分理论中的许多基本概念都是用极限来定义的. 所以,极限理论是微积分作为一种数学方

法，发展成为一套完整的微积分理论的基础. 极限理论主要包括两部分内容，即收敛性证明与极限的计算方法. 本章仅讨论数列与函数极限的各种计算方法.

1. 利用无穷小等价代换和无穷小的性质求极限

本章第一部分内容提要中，介绍了无穷小的八个等价代换关系. 在计算函数或数列极限时，利用无穷小等价代换，可以简化函数或数列的表达式.

【例 4】 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin^2 x+\mathrm{e}^x)-x}{\ln(x^2+\mathrm{e}^{2x})-2x}$.

分析 函数中含有对数函数，可考虑使用 $\ln(1+x)\sim x(x\to 0)$ 的无穷小等价关系. 为此，需要将分子，分母利用对数性质作适当变形.

解 分子 $\ln(\sin^2 x+\mathrm{e}^x)-x=\ln\mathrm{e}^x+\ln\left(1+\dfrac{\sin^2 x}{\mathrm{e}^x}\right)-x$

$$=\ln\left(1+\frac{\sin^2 x}{\mathrm{e}^x}\right)\sim\frac{\sin^2 x}{\mathrm{e}^x}(x\to 0).$$

同理，分母$\sim\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{2x}}$ $(x\to 0)$.

所以　原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin^2 x}{\mathrm{e}^x}}{\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{2x}}}$

因为　当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$.

所以　原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{2x}\cdot x^2}{\mathrm{e}^x\cdot x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^x=1$.

△**【例 5】** 当 $x\to 0^+$ 时，与$\sqrt{x}$等价的无穷小量是（　　）.

(A) $1-\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$;　　(B) $\ln(1+\sqrt{x})$;

(C) $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$;　　(D) $1-\cos\sqrt{x}$.

分析 利用已知的无穷小等价关系，将四个选项转化为等价无穷小，从中确定正确答案.

解 当 $x\to 0^+$ 时，$1-\mathrm{e}^{\sqrt{x}}=-(\mathrm{e}^{\sqrt{x}}-1)\sim-\sqrt{x}$，$\ln(1+\sqrt{x})\sim\sqrt{x}$，$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1\sim\dfrac{1}{2}\sqrt{x}$，$1-\cos\sqrt{x}\sim\dfrac{1}{2}(\sqrt{x})^2=\dfrac{x}{2}$，应选 (B).

常用的无穷小等价代换求极限的方法，仅适用于乘积中的无穷小因子．对于和与差形式中的无穷小等价代换，还需要有其它条件．下面不加证明地给出和与差形式无穷小等价代换的充分条件．

定理 设α，$\bar{\alpha}$，β，$\bar{\beta}$均为无穷小，且$\alpha\sim\bar{\alpha}$，$\beta\sim\bar{\beta}$，若$\lim\frac{\alpha}{\beta}\neq-1$，则$\alpha+\beta\sim\bar{\alpha}+\bar{\beta}$.

推广 若无穷小$\alpha_1,\bar{\alpha}_1,\alpha_2,\bar{\alpha}_2,\cdots,\alpha_n$，$\bar{\alpha}_n$满足$\alpha_1\sim\bar{\alpha}_1$，$\alpha_2\sim\bar{\alpha}_2$，$\cdots$，$\alpha_n\sim\bar{\alpha}_n$，而且$\lim\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\neq-1$，$\lim\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_3}\neq-1$，$\lim\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{\alpha_4}\neq-1$，$\cdots$，$\lim\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1}}{\alpha_n}\neq-1$，则$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n\sim\bar{\alpha}_1+\bar{\alpha}_2+\cdots+\bar{\alpha}_n$（$n\geqslant2$）.

【例 6】 利用无穷小等价代换求极限

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x+\sqrt{3}\sin x}{e^x-1+\sin x}.$$

解 因为当$x\to0$时，$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$.

$$e^x-1\sim x,\ \sin x\sim x.$$

而且
$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sqrt{3}\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{2}}{\sqrt{3}x}=0\ (\neq-1),$$

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x}=1\ (\neq-1).$$

所以 $$原式=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{2}+\sqrt{3}x}{x+x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x}{2}+\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

【例 7】 利用无穷小等价代换求极限

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3x}.$$

分析 分子为和差形式，虽然有$\tan x\sim x$，$\sin x\sim x$（$x\to0$），但是$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x}{-\sin x}=-1$，所以，分子不满足和差形式无穷小等价代换的充分条件．为此，需要将分子变为乘积形式，再使用无穷小等价代换．

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\left(\dfrac{1}{\cos x}-1\right)}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2\cdot\cos x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^2}{2}}{x^2\cdot\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\cos x}=\frac{1}{2}.$$

△**【例 8】** 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}(\sin x+\cos x)$.

分析 当 $x\to+\infty$ 时，a^x $(a>0, a\neq 1)$，x^n $(n\geqslant 1)$，$\ln x$ 都是无穷大量，但是它们无穷大量的阶不同，从低到高的排列次序：$\ln x$，x^n，a^x，无穷大量的阶越高，趋于无穷大越快. 所以有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}=0$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}=0$，而 $\sin x+\cos x$ 有界，由无穷小量性质可知

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}(\sin x+\cos x)=0.$$

2. 利用有理化等初等变换和极限的四则运算法则求极限

计算无理函数的极限，一般有三种技巧：①分子、分母有理化；②无穷小等价代换；③洛必达法则. 这三种技巧常常相互结合使用. 本章仅介绍前两种技巧，关于洛必达法则的使用在第三章中介绍.

△**【例 9】** 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}$.

解法一 有理化分子

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2-4}{x^2(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{2(\sqrt{1-x^2}-1)}{x^2(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2(1-x^2-1)}{x^2(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)(\sqrt{1-x^2}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)(\sqrt{1-x^2}+1)}=-\frac{1}{4}.$$

解法二 分子有理化+无穷小量等价代换