变分法基础

（第2版）

老大中 著

国防工业出版社
National Defense Industry Press

变分法基础(第 2 版)

Fundamentals of the Calculus of Variations

(Second Edition)

老大中 著

国防工业出版社

·北京·

内容简介

本书是变分法方面的专著，书中系统地介绍变分法的基本理论及其应用。

编写本书的目的是希望为高等院校的研究生和高年级大学生提供一本学习变分法课程的教材或教学参考书，使他们能够熟悉变分法的基本概念和计算方法。内容包括预备知识、固定边界的变分问题、可动边界的变分问题、泛函极值的充分条件、条件极值的变分问题、参数形式的变分问题、变分原理、变分问题的直接方法和力学中的变分原理及其应用。其中一部分内容是作者多年来的研究成果，特别是提出了完全泛函的极值函数定理，统一了变分法中的各种欧拉方程。本书也可供有关专业的教师和科技人员参考。

本书概念清楚，逻辑清晰，内容丰富，深入浅出，便于自学，既注重方法的介绍，又不失数学的系统性、科学性和严谨性。书中列有大量例题和习题，并附有中英文索引。为了帮助读者解决学习中遇到的困难，本书给出了各章共226道习题的全部解答，供读者参考。

图书在版编目(CIP)数据

变分法基础/老大中著.—2版.—北京:国防工业出版社,2007.7

ISBN 978-118-05078-3

Ⅰ.变… Ⅱ.老… Ⅲ.变分法 Ⅳ.0176

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第035025号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号 邮政编码100044)

北京奥鑫印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 印张 30½ 字数 774千字

2007年7月第2版第1次印刷 印数1—4000册 定价49.00元

国防书店:(010)68428422 发行邮购:(010)68414474

发行传真:(010)68411535 发行业务:(010)68472764

第 1 版前言

变分法是17世纪末发展起来的一门数学分支。本书主要介绍古典变分法,它理论完整,在力学、物理学、光学、摩擦学、经济学、宇航理论、信息论和自动控制论等诸多方面有广泛的应用。20世纪中叶发展起来的有限元法,其数学基础之一就是变分法。如今,变分法已成为大学生、研究生、工程技术人员和科学工作者必备的数学基础。

编写本书的目的是为高等院校的研究生和高年级本科生提供一本学习变分法的教材或参考书,使他们能够熟悉变分法的基本概念和计算方法,其中包括预备知识、固定边界的变分问题、泛函极值的充分条件、可动边界的变分问题、条件极值的变分问题、参数形式的变分问题、变分原理和变分问题的直接方法。书中的一部分内容是作者的研究成果。本书也可作为有关专业的教师、科学研究人员和工程技术人员的参考书。

具有高等数学知识的读者就可阅读本书,当然,如果读者具有线性代数、物理和力学等基础知识,阅读本书就会更容易。

在作者看来,衡量对于一门数学学科知识的掌握程度,有两个基本的检验手段:一是看是否清楚基本概念,因为概念是构建科学大厦的基石;二是看是否会作习题,因为作习题的过程就是消化知识的过程,同时也是加深理解概念的过程,只有会作习题,才能达到会应用的目的。对于变分法这门数学分支来说,如果只会机械地背诵书上的概念和定理,而不动手演算习题,恐怕掌握不好这门知识。书中例题和习题比较丰富。各章均配有适量的习题,大多数习题选自本书所附的参考文献,在此谨向这些参考文献的作者表示感谢。为了帮助读者加深对基本概念的理解和解决学习中遇到的困难,本书提供了各章共145道习题(没计入子习题)的全部解答或证明,其中包括参考文献2(注:即第2版参考文献3)中几乎全部习题的解答,供读者参考,同时这些习题解答也可看作是书中例题的补充。

变分法是一门饶有趣味的数学学科,作者本人就曾在变分法的学习和教学过程中体验到这种趣味。但作者认为学以致用才是更重要的目的。希望读者以愉悦的心情阅读本书,能从本书中学到所需要的知识,并能把这些知识应用到实践中去。在计算机高速发展的时代,为了提高计算精度和应用的普遍性,特别是在第8章中,一些例题和习题的解尽量给出分数和代数的形式,这很容易变成小数形式和具体形式。

为使读者了解变分法的发展历史，本书还对其中所涉及的37位科学家进行了最多200多字的简要介绍，其中的译名以1993年全国自然科学名词审定委员会公布的《数学名词》为准。

本书初稿曾经用作三届北京理工大学工科硕士研究生的讲座材料，并给博士研究生和大学四年级学生讲授过部分内容。

作者在本书编写过程中曾得到北京理工大学前党委书记谈天民教授的指导与帮助。国防工业出版社张文峰处长对本书出版给予了大力支持。研究生李雪芳、李秀明帮助作者校验了部分习题。在此谨表示衷心感谢。

限于作者水平，书中若有不妥或错误之处，恳请读者批评指正。

作者的通讯地址：laodazhong@tsinghua.org.cn

老大中

2003年9月于北京

第2版前言

本书第1版出版后，收到了许多读者来信，对本书给予肯定，国家图书馆和国内许多大学的图书馆都收藏了本书，并被列为专著，这使作者深受感动与鼓舞，在此谨向收藏、使用和关心本书的单位和读者致以谢意。

本书第1版于2004—2006年曾用作三届北京理工大学硕士研究生的《变分法》选修课教材。在此期间，作者还多次给有关专业的本科生、硕士生和博士生讲授了本书的部分内容。

应国防工业出版社之约，决定本书出第2版。这次再版，修正了第1版中所发现的错误和不当之处，增加、改写了部分例题和习题。书中共有226道习题(未计入子习题)，全部给出解题过程及答案，供读者参考。

增加了部分内容，增设了第9章力学中的变分原理及其应用；把原书第5章第4节的哈密顿原理放到了第9章中；增加、改写了书中出现的科学家简介；等等。

不少初学者都认为变分法比较抽象难学，常为变分法中出现的各种概念所困惑，这说明他们还没有充分掌握变分法的基本观点和思想方法。不错，《简明不列颠百科全书》也认为变分法是最吸引人、最重要而又最难的数学分支之一。作为数学的一个分支，变分法确实有些抽象，这是正常的，因为数学的特点之一就是它的高度抽象性。比较难学也是事实，但难学也是可以学会的，学会了就不觉得难了。

子曰："吾道一以贯之。"这是《论语·里仁》里的一句话，意思是孔子说他是用一个基本观点把他的学说贯穿起来的。"一以贯之"这句话可以称得上是古代圣贤的"心学"。事实上，并不是任何事情都可以"一以贯之"的。那么，学习变分法是否可以"一以贯之"呢？回答应该是肯定的。泛函取极值的必要条件是一阶变分等于零，这就是变分法的"一以贯之"。掌握了这个主旨，变分法就不难学了。

根据"一以贯之"这个基本观点，本书作者论述了变分法中含有任意个自变量、任意个多元函数和任意阶多元函数偏导数的完全泛函的变分问题，提出并证明了完全泛函的变分问题的定理，采用偏微分算子，给出了完全欧拉方程组，该方程组包括了变分问题的各种欧拉方程。所提出的这个定理的作用还难以预料，相信读者一定能够运用这个定理解决更多的问题。本书作者认为，这是作者近年来对变分法这门学科做出的最重要的研究成果，也是对变分法这门学科的发展做出的最重要的贡献。

还是从"一以贯之"这个基本观点出发，本书作者还论述变分法中依赖于单自

变量的多个未知函数及其高阶导数且待定边界的泛函的变分问题，提出并论证了当泛函的一阶变分为零的情况下，可动端点的各变分项一般并非相互独立，而是至少要有一项为零或至少要给出一个已知条件的新见解，给出了此类泛函的变分问题的若干新的定理和推论。这是本书作者近年来对变分法这门学科的发展做出的另一个贡献。

变分法这门学科就像一座富矿，其中有许多宝藏尚待人们去探索、发现和开采。数学是历史发展进程的标志，是人类智慧的结晶，是人类永远的知识财富和精神财富，永远都不会过时，而变分法就是其中的重要组成部分。

虽经作者一再努力，力求使本书精益求精，但限于作者水平，书中可能还会有不当之处，希望读者批评指正。

作者 E-mail 地址：laodazhong@tsinghua.org.cn
laodazhong@bit.edu.cn

老大中
2006 年 12 月于北京

目　录

Contents

第 1 章　预备知识

工欲善其事，必先利其器。学习变分法需要一些必备的基础知识，如一元函数和多元函数的泰勒级数展开，含参变量的积分，向量分析与场论，坐标变换，变分法的基本引理，张量的基本概念等。本章简要介绍这些基础知识。

1.1　泰勒公式

1.1.1　一元函数的情形

定理 1.1.1　若函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个开区间 (a,b) 内具有 $n+1$ 阶连续导数，则当 x 在 (a,b) 内时，$f(x)$ 可表示为

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n \tag{1-1-1}$$

式中

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \tag{1-1-2}$$

这里 ξ 是介于 x_0 和 x 之间的某个值。

定理 1.1.1 称为一元函数的**泰勒中值定理或泰勒定理**。公式(1-1-1)称为 $f(x)$ 在点 x_0 按 $(x-x_0)$ 的幂展开到 n 阶的**泰勒公式**或称为**泰勒级数展开**。公式(1-1-2)称为**拉格朗日型余项**。当 $x \to x_0$ 时，R_n 是一个比 $|x-x_0|^n$ 更高阶的无穷小，或者说 R_n 是一个比 $|x-x_0|$ 高 $n-1$ 阶的无穷小。

定理 1.1.2　设可导函数 $f(x)$ 在点 x_0 有极值，则在该点必有 $f'(x_0)=0$。该定理称为**一元函数的极值定理**。

1.1.2　多元函数的情形

一元函数的泰勒中值定理可推广到多元函数的情形。下面先讨论二元函数余项为拉格朗日型的泰勒公式。

定理 1.1.3　若函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某个邻域内连续且有直到 $n+1$ 阶的连续偏导数，并设 $(x=x_0+\Delta x, y=y_0+\Delta y)$ 为该邻域内的任意一点，则总存在一个 $\theta(0<\theta<1)$，使下面的 n 阶泰勒公式成立

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0,y_0) + \left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0) + \frac{1}{2!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0) + \cdots +$$

$$\frac{1}{n!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n}f(x_0,y_0)+R_n \qquad (1-1-3)$$

式中

$$\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{k}f(x_0,y_0)=\sum_{r=0}^{k}C_k^r(\Delta x)^r(\Delta y)^{n-r}\frac{\partial^k f(x_0,y_0)}{\partial x^r\partial y^{k-r}} \qquad (1-1-4)$$

即按牛顿二项式定理将它展开成为 $k+1$ 项之和，C_k^r 为 k 个事物中取 r 个的组合数。

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1}f(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y) \qquad (1-1-5)$$

R_n 称为 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的 n **阶拉格朗日形式余项**。

定理 1.1.3 称为**二元函数的泰勒中值定理**。

令 $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$，$\Delta x=\rho\cos\alpha$，$\Delta y=\rho\sin\alpha$。由于 $f(x,y)$ 的各 $n+1$ 阶偏导数都连续，在点 (x_0,y_0) 的闭邻域内 $f(x,y)$ 的各 $n+1$ 阶偏导数的绝对值都不超过一个正数 M。因此对于该邻域上任意一点 $(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$，余项的绝对值为

$$|R_n|\leqslant\frac{M}{(n+1)!}(|\Delta x|+|\Delta y|)^{n+1}=\frac{M\rho^{n+1}}{(n+1)!}(|\cos\alpha|+|\sin\alpha|)^{n+1}\leqslant 2M\rho^{n+1}$$

这表明 R_n 是一个比 ρ 高 n 阶的无穷小。

定理 1.1.4 设可导函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 有极值，则在该点必有 $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$。该定理称为**二元函数的极值定理**。

上述定理可推广到 m 元函数的情形，并有下述定理。

定理 1.1.5 若函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 在点 $(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_m^0)$ 的某个邻域内连续且有直到 $n+1$ 阶的连续偏导数，并设 $(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 为该邻域内的任意一点，则总存在 $\theta(0<\theta<1)$，使下面的 n 阶泰勒公式成立

$$\begin{aligned}&f(x_1,x_2,\cdots,x_m)=f(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_m^0)+\\&\frac{1}{1!}\left(\Delta x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\Delta x_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+\Delta x_m\frac{\partial}{\partial x_m}\right)f(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_m^0)+\\&\frac{1}{2!}\left(\Delta x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\Delta x_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+\Delta x_m\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^2 f(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_m^0)+\cdots+\\&\frac{1}{n!}\left(\Delta x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\Delta x_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+\Delta x_m\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^n f(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_m^0)+R_n\end{aligned} \qquad (1-1-6)$$

式中

$$\Delta x_k=x_k-x_k^0 \qquad (k=1,2,\cdots,m)$$

$$\begin{aligned}R_n=&\frac{1}{(n+1)!}\left(\Delta x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\Delta x_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+\Delta x_m\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^{n+1}\times\\&f(x_1^0+\theta\Delta x_1,x_2^0+\theta\Delta x_2,\cdots,x_m^0+\theta\Delta x_m)\end{aligned} \qquad (1-1-7)$$

当 $\rho=\sqrt{\Delta x_1^2+\Delta x_2^2+\cdots+\Delta x_m^2}\to 0$ 时，R_n 是一个比 ρ 高 n 阶的无穷小。定理 1.1.5 称为**多元函数的泰勒中值定理**。

定理 1.1.6 设可导函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 在点 $(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_m^0)$ 有极值，则在该点必有 $f_{x_k}(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_m^0)=0$，其中 $k=1,2,\cdots,m$。该定理称为**多元函数的极值定理**。