二十一世纪普通高等院校实用规划教材

线性代数

XIANXING DAISHU

燕建梁 主 编
裴金仙 刘增锐 副主编

赠送电子课件

• 先进性与基础性相统一 •
• 教材建设与教学改革相统一 • 综合性与针对性相统一 •
• 案例导入教学 • 案例分析与阅读资料开阔视野 •

清华大学出版社

二十一世纪普通高等院校实用规划教材

线 性 代 数

燕建梁 主 编
裴金仙 刘增锐 副主编

清华大学出版社
北 京

内 容 简 介

本书是由清华大学出版社组织编写的二十一世纪普通高等院校实用规划教材，是编者根据多年的教学实践经验，结合经济类、管理类、理工科类线性代数课程的基本要求以及教育部最近颁布的研究生入学考试数学大纲编写而成的。

全书包括行列式、矩阵、n 维向量、线性方程组、特征值与特征向量、二次型与投入产出 7 章内容。每章开始有学习要求与目标，每章后有本章小结、自测题及阅读资料；每节开始有内容要点，每节配有大量的例题，节后有习题，便于学生自学与巩固。第 7 章为选学内容供经济类、管理类学生参考。

本书是应用型教材，着眼于介绍线性代数的基本概念、基本原理、基本方法，强调直观性、准确性、通俗性，内容由浅入深、由易到难，富有启发性。

本书结构严谨、语言流畅、逻辑清晰。可供高等学校经济类、管理类学生使用，也可供理工科类学生及有关专业技术人员选用或参考。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/燕建梁主编；裴金仙，刘增锐副主编．—北京：清华大学出版社，2007.8
(二十一世纪普通高等院校实用规划教材)
ISBN 978-7-302-15724-3

Ⅰ. 线…　Ⅱ. ①燕…　②裴…　③刘…　Ⅲ. 线性代数—高等学校—教材　Ⅳ. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 108175 号

责任编辑：彭　欣　骆洋喆
封面设计：山鹰工作室
版式设计：北京东方人华科技有限公司
责任校对：周剑云　李玉萍
责任印制：孟凡玉
出版发行：清华大学出版社　　**地　　址**：北京清华大学学研大厦 A 座
http://www.tup.com.cn　　**邮　　编**：100084
c-service@tup.tsinghua.edu.cn
社 总 机：010-62770175　**邮购热线**：010-62786544
投稿咨询：010-62772015　**客户服务**：010-62776969
印 刷 者：北京密云胶印厂
装 订 者：北京市密云县京文制本装订厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185×230　**印　张**：19.5　**字　数**：371 千字
版　　次：2007 年 8 月第 1 版　　**印　　次**：2007 年 10 月第2 次印刷
印　　数：4001～6000
定　　价：27.00 元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话：(010)62770177 转 3103　　产品编号：023324-01

前　　言

“线性代数”属于近代数学范畴。“线性”一词源于平面解析几何，在平面解析几何中一次方程是直线方程，在这里指数学变量之间的关系是以一次形式来表达的。线性代数起源于处理线性关系问题，它是代数学的一个分支，虽形成于20世纪，但历史却非常悠久，部分内容在东汉初年成书的《九章算术》里已有雏形论述。在18~19世纪期间，随着研究线性方程组和变量线性变换问题的深入，先后产生了行列式和矩阵的概念，为处理线性问题提供了强有力的理论工具，并推动了线性代数的发展。

线性代数是讨论有限维空间的线性理论的课程，线性代数知识应用广泛，这就使得“线性代数”这门课程越来越受到重视，因此也成为考研的热门课程。

线性代数，是研究有限维向量空间和线性变换的重要数学分支，由于线性问题广泛存在于自然科学和技术科学的各个领域，且某些非线性问题在一定条件下也可转化为线性问题来处理，它的思想、方法和结论在科学技术、工程技术、管理科学等众多领域都有着广泛的应用。现代科学技术和管理科学，尤其是计算机技术和网络技术的飞速发展，都需要这个基础；而它的集成化思维方式，对训练和提高学生的计算能力、抽象思维、逻辑推理、数学表达等也都非常有益。随着世界进入信息和网络时代，线性代数的方法和思想日渐为人们所重视。

对一般的非数学专业，“线性代数”课程一般安排54学时甚至更少，我们只对基本概念、基本原理、基本方法加深印象，作一般了解，这里只对解题有帮助的定理才加以证明，为今后学习打一些必要的基础。要想实实在在地学好线性代数，还有赖于以后的进一步学习和应用。所以，本教材在尽可能简要介绍基本内容的基础上，为读者的深化和拓展留下了一定的余地。

线性代数的主要内容有：行列式、矩阵、n维向量、线性方程组、标准型与二次型，其中行列式与矩阵是其基本理论。线性代数以矩阵、n维向量和线性方程组为其三条知识主线，虽然它们抽象源自不同的对象，但对同一事物经常可以用这三个方面的知识从不同的角度给予诠释。三条知识主线关系密切，交错前行，相互解释与解决问题，让初学者有错综复杂的感受，初学时常感到混乱而且困惑。本书打乱常规的编排方式，将向量、线性方程组分开，将线性空间降低难度，作为向量中的一节，以“使用为主，够用为度”的原则使读

者感觉线条清晰简单，易懂好学。

本书由山西大学商务学院副教授燕建梁老师任主编，负责执笔第 3、4、6 章的编写；裴金仙、刘增锐老师任副主编，裴金仙负责执笔第 1、2、5 章的编写，刘增锐负责执笔第 7 章及附录答案内容的核查。全书由燕建梁老师负责统稿，郭耀鹏、史及民两位教授审阅了全书。

本书在编写过程中，参考了众多的相关教材和参考书；山西大学商务学院的院领导、教务处、基础部对本书的出版给予了大力的支持和帮助，在此一并致谢！

由于编者水平有限，加之时间仓促，书中不妥甚至错误之处在所难免，希望各位专家、同行、读者给予批评指正。

编　者

目　　录

第 1 章 行 列 式

【学习要求及目标】

通过本章的学习使学生:

了解 n 阶行列式的概念，掌握行列式的性质，理解余子式与代数余子式的概念. 会应用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理化简，降阶计算行列式. 理解且掌握应用克拉默(Cramer)法则求解线性方程组. 历史上，行列式的概念是在研究线性方程组的解的过程中产生的. 如今，它在数学的许多分支中有着非常广泛的应用，是常用的一种计算工具. 特别是在本门课程中，它是学习矩阵、线性方程组、向量组的线性相关性的一种重要工具.

1.1 行 列 式

内容要点

- 二阶行列式;
- 二元线性方程组;
- 三阶行列式;
- 三元线性方程组.

二阶、三阶行列式是 n 阶行列式的基础，我们先来介绍二阶、三阶行列式.

1.1.1 二阶行列式

定义 1.1.1 我们称 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 为**二阶行列式**，其中数 a_{11}、a_{12}、a_{21}、a_{22} 叫做行列式的**元素**，横排叫做**行**，竖排叫做**列**. 元素的第一个下标 i 叫做**行标**，表明该元素位于第 i 行；第二个下标 j 叫做**列标**，表明该元素位于第 j 列. 由上述定义可知，二阶行列式是由 4 个数按一定的规律运算所得的代数和. 这种计算方法称为行列式的**"对角线法则"**.如下式所示，把 a_{11} 到 a_{22} 的实连线称为**主对角线**，把 a_{12} 到 a_{21} 的虚连线称为**次对角线**，于是，二阶行列式便等于主对角线上两元素之积减去次对角线上两元素之积.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

例 1.1.1 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 1\times4-2\times(-3)=10.$

例 1.1.2 $D=\begin{vmatrix} a^2 & 5 \\ a & 1 \end{vmatrix}=a^2-5a=a(a-5).$

当 $a=0$ 或 $a=5$ 时，$D=0$；

当 $a\neq0$ 或 $a\neq5$ 时，$D\neq0$.

1.1.2 二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 & (1.1.1) \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 & (1.1.2) \end{cases}$$

$(1.1.1)\times a_{22}-(1.1.2)\times a_{12}$ 得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12} \tag{1.1.3}$$

$(1.1.2)\times a_{11}-(1.1.1)\times a_{21}$ 得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=b_2a_{11}-b_1a_{21} \tag{1.1.4}$$

利用二阶行列式的定义，记

$$D=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$D_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad D_2=b_2a_{11}-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则由式(1.1.3)、式(1.1.4)可改写为

$$\begin{cases} Dx_1=D_1 \\ Dx_2=D_2 \end{cases}.$$

于是在行列式 $D\neq0$ 的条件下，式(1.1.1)、式(1.1.2)有唯一解.

$$x_1=\frac{D_1}{D}, \qquad x_2=\frac{D_2}{D}$$

其中分母 D 是由方程组(1.1.1)、(1.1.2) 系数所确定的二阶行列式，即**系数行列式**. x_1 的分子 D_1 是用常数项 b_1、b_2 替换 D 中 x_1 的系数 a_{11}、a_{21} 所得的二阶行列式，x_2 的分子 D_2 是用常数项 b_1、b_2 替换 D 中 x_2 的系数 a_{12}、a_{22} 所得的二阶行列式. 本节后面讨论的三元线性方程组有类似的规律性，请同学们学习时注意比较.

例 1.1.3 解方程组 $\begin{cases} x_1+3x_2=4 \\ 2x_1+x_2=-2 \end{cases}$.

解 $D=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1\times1-2\times3=-5$,

$$D_1=\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=4\times1-(-2)\times3=10,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}=1\times(-2)-2\times4=-10,$$ 因 $D\neq0$，故题设方程组有唯一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{10}{-5}=-2, \qquad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-10}{-5}=2.$$

1.1.3 三阶行列式

定义 1.1.2 我们称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$ 为三阶行列式.

由上述定义可见，三阶行列式是由三行、三列 9 个元素组成的一个符号，展开式是 6 项的代数和，每项是由不同行、不同列的 3 个元素相乘而成，3 项正、3 项负，其中正项是各实线上 3 个元素乘积；负项是各虚线上的 3 个元素的乘积. 如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

这种展开法称为行列式的**对角线法则**.

例 1.1.4 计算行列式$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 1 & 2\\2 & 3 & 1\end{vmatrix}$.

解 $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 1 & 2\\2 & 3 & 1\end{vmatrix}=1\times1\times1+3\times3\times3+2\times2\times2-3\times1\times2-2\times3\times1-1\times2\times3=18.$

例 1.1.5 求解方程$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\2 & 3 & x\\4 & 9 & x^2\end{vmatrix}=0.$

解 $D=3x^2+4x+18-12-9x-2x^2=x^2-5x+6$.

由$D=0$解得$x=2$或$x=3$.

1.1.4 三元线性方程组

类似于二元线性方程组的讨论，下面对三元线性方程组进行讨论.

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases}$$

记

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix}b_1 & a_{12} & a_{13}\\b_2 & a_{22} & a_{23}\\b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix}a_{11} & b_1 & a_{13}\\a_{21} & b_2 & a_{23}\\a_{31} & b_3 & a_{33}\end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & b_1\\a_{21} & a_{22} & b_2\\a_{31} & a_{32} & b_3\end{vmatrix},$$

若系数行列式$D\neq0$，那该方程组有唯一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}.$$

例 1.1.6　解三元线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=-2 \\ 2x_1-x_2+3x_3=3 \\ x_1+x_2-x_3=-1 \end{cases}$.

解　$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=1\times(-1)\times(-1)+2\times1\times(-1)+1\times3\times2-1\times(-1)\times(-1)-1\times3\times1-(-1)\times2\times2=5\neq0.$

$$D_1=\begin{vmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=2,\quad D_2=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=-5,\quad D_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=2.$$

故所求方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{2}{5},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=-1,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{2}{5}.$$

习题 1.1

1. 计算下列行列式.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}$　(3) $\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 8 & 9 & 5 \end{vmatrix}$　(5) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$　(6) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$.

2. 证明等式.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

3. 解下列方程组.

(1) $\begin{cases} 2x_1+3x_2=5 \\ x_1-4x_2=-3 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=0 \\ 3x_1+2x_2-5x_3=1 \\ x_1+3x_2-2x_3=4 \end{cases}$　(3) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=-2 \\ 2x_1+x_2-3x_3=1 \\ -x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$.

1.2 n阶行列的定义

内容要点

- 排列与逆序；
- 对换；
- n阶行列式的定义.

1.2.1 排列与逆序

定义 1.2.1 由正整数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个没有重复数字的 n 元有序数组，称为一个 n **级排列**，简称**排列**，记为$(i_1i_2\cdots i_n)$.

注意： n 级排列必须取 $1,2,\cdots,n$ 中每一个数.

n 级排列共有 $n!$ 个.

例如 1234 是一个 4 级排列，25431 是一个 5 级排列，2746 不是一个排列.

定义 1.2.2 在一个 n 级排列$(i_1i_2\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n)$中，若数 $i_s>i_t$，则称数 i_s 与 i_t 构成一个**逆序**.一个 n 级排列中逆序的总数称为该排列的**逆序数**，记为 $N(i_1i_2\cdots i_n)$.

根据上述定义，可按如下方法计算排列的逆序数.

设在一个 n 级排列$(i_1i_2\cdots i_n)$中比 $i_s(s=1,2,\cdots,n)$大的且排在 i_s 前面的数共有 s_i 个，则 i_s 的逆序的个数为 s_i，而该排列中所有自然数的逆序的个数之和就是这个排列的逆序数.即

$$N(i_1i_2\cdots i_n)=s_1+s_2+\cdots+s_n=\sum_{i=1}^{n}s_i$$

例 1.2.1 计算排列 32514 的逆序数.

解 因为 3 排在首位，故其逆序的个数为 0；

在 2 的前面比 2 大的数有 1 个，故其逆序的个数为 1；

在 5 的前面比 5 大的数有 0 个，故其逆序的个数为 0；

在 1 的前面比 1 大的数有 3 个，故其逆序的个数为 3；

在 4 的前面比 4 大的数有 1 个，故其逆序的个数为 1.

易见所求排列的逆序数为

$$N(32514) = 0+1+0+3+1=5.$$

定义 1.2.3 逆序数为偶数的排列称为偶排列；逆序数为奇数的排列称为**奇排列**.

例如 2431 是偶排列；45321 是奇排列；自然排列 $12,\cdots n$ 的逆序数是零，所以是偶排列.

1.2.2 对换

定义 1.2.4 把一个排列 $(i_1 i_2 \cdots i_s \cdots i_t \cdots i_n)$ 中某两个数 i_s、i_t 的位置互换，而其余数不动，得到另一个排列 $(i_1 i_2 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_n)$，这样的变换称为一个**对换**，记为 (i_s, i_t).

将两个相邻元素对换，称为**相邻对换**.

例如 对排列 1234 施以对换(1，4)后得到排列 4231.

定理 1.2.1 任意一个排列经过一个对换后，其奇偶性改变.

这就是说，经过一次对换，奇排列变为偶排列，偶排列变为奇排列.

证明 第一种情形，先看相邻对换的情况.

设排列为 $a_1 \cdots a_l a b b_1 \cdots b_m$，对换 a 与 b，变为 $a_1 \cdots a_l b a b_1 \cdots b_m$，显然，$a_1 \cdots a_l$，$b_1 \cdots b_m$ 这些元素的逆序数经过对换并不改变，a、b 两元素的逆序数改变为：

当 $a > b$ 时，经对换后 a 的逆序数增加 1 而 b 的逆序数不变；

当 $a < b$ 时，经对换后 a 的逆序数不变而 b 的逆序数减少 1.

所以，排列 $a_1 \cdots a_l a b b_1 \cdots b_m$ 与排列 $a_1 \cdots a_l b a b_1 \cdots b_m$ 的奇偶性改变.

第二种情形，再看一般情况.

设排列为 $a_1 \cdots a_l a b_1 \cdots b_m b c_1 \cdots c_n$，对它做 m 次相邻对换，变成 $a_1 \cdots a_l a b b_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_n$；再做 $m+1$ 次相邻对换，变成 $a_1 \cdots a_l b b_1 \cdots b_m a c_1 \cdots c_n$. 总之，经 $2m+1$ 次相邻对换，排列 $a_1 \cdots a_l a b_1 \cdots b_m b c_1 \cdots c_n$ 变成排列 $a_1 \cdots a_l b b_1 \cdots b_m a c_1 \cdots c_n$，所以这两个排列的奇偶性改变.

定理 1.2.2 n 个自然数($n > 1$)共有 $n!$ 个 n 级排列，其中奇偶排列各占一半.

证明 n 级排列的总数为 $n!$ 个.

设其中奇排列为 p 个，偶排列为 q 个，若对每个奇排列都做同一对换，则由定理 1.2.1，p 个奇排列均变为偶排列，故 $p \leqslant q$. 同理，对每个偶排列都做同一对换，则 q 个偶排列均变为奇排列，故 $q \leqslant p$. 所以 $p=q$，从而 $p=q=\dfrac{n!}{2}$.

1.2.3 n 阶行列式的定义

观察三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$ 易见：

(1) 三阶行列式共有 6 项.

(2) 每项都是取自不同行、不同列的 3 个元素的乘积.

(3) 每项的符号是：当该项元素的行标按自然数顺序排列后，若对应的列标构成的排列是偶排列则取正号，奇排列则取负号.

所以，三阶行列式可定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3} (-1)^{N(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 为对所有 3 级排列 $j_1j_2j_3$ 求和.

定义 1.2.5 由 n 行 n 列、n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 构成的记号：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

称为 **n 阶行列式**，其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 求和.行列式有时也简记为 $\det(a_{ij})$或 $|a_{ij}|$，这里 a_{ij} 称为行列式的**元素**，称

$$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

为行列式的**一般项**.

注意： 行列式概念中包含以下内容.

① 行列式由 n 行 n 列、n^2 个元素组成.

② 行列式由 $n!$ 项求和而成，每项是取自不同行、不同列的 n 个元素乘积，