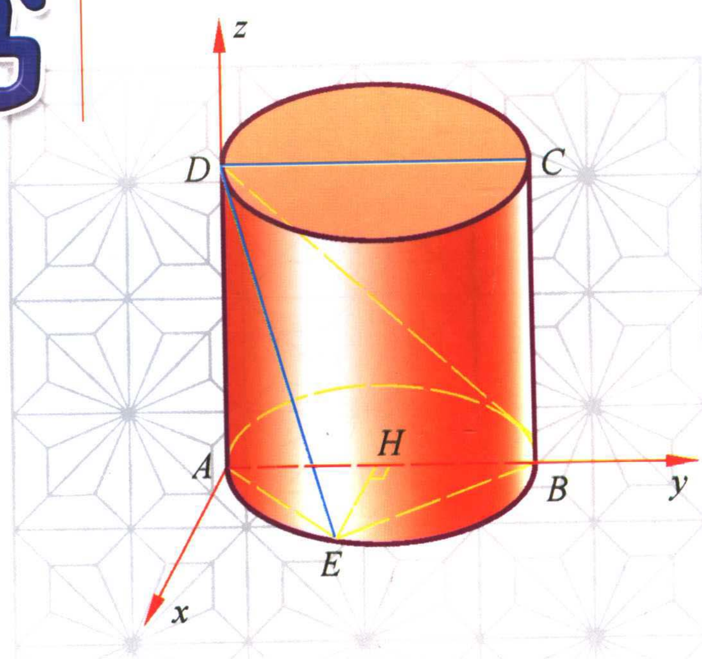
新编中学数学解题方法全书

高中版 下卷(一)

刘培杰 主编



哈爾濱工業大學出版社

高中版 下卷(一)

新编中学数学
解题方法全书

刘培杰　主编

数学之失传久矣，汉晋以来，所存几如一线，其后祖冲之、郭守敬辈，殚心象数，立密率消长之法以为习算入门之规。然其法以有尽度无尽，止言天行，未及地体，是以测之有变更，度之多盈缩，盖有未尽之余蕴也。

——《周髀经解》

哈爾濱工業大學出版社

内 容 提 要

本书共包括两部分:第六编数列、排列、组合、概率,第七编向量、极限、导数。本书以专题的形式对中学数学中的重点、难点进行了归纳、总结,涵盖面广,可使学生深入理解数学概念,灵活使用解题方法,可较大程度地提高学生在各类考试中的应试能力,适合高中师生阅读。

图书在版编目(CIP)数据

新编中学数学解题方法全书:高中版.下卷.1/刘培杰主编.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2007.5

ISBN 978-7-5603-2492-0

Ⅰ.新…　Ⅱ.刘…　Ⅲ.数学课-高中-解题　Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 037534 号

策划编辑　刘培杰
责任编辑　李广鑫　唐　蕾
封面设计　卞秉利
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　黑龙江省教育厅印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 30.25　字数 684 千字
版　　次　2007 年 5 月第 1 版　2007 年 5 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-2492-0
印　　数　1~6 000 册
定　　价　42.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

下　卷　（一）

第六编　数列　排列　组合　概率

目录
CONTENTS

目录 CONTENTS

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第七编　向量　极限　导数

目录
CONTENTS

目录 CONTENTS

目录
CONTENTS

第六编

数列 排列 组合 概率

在最广泛的意义上说，数学是一种精神，一种理性的精神。正是这种精神，使得人类的思维得以运用到最完善的程度，亦正是这种精神，试图决定性地影响人类的物质、道德和社会生活；试图回答有关人类自身存在提出的问题；努力去理解和控制自然；尽力去探求和确立已经获得知识的最深刻的和最完善的内涵。

——M.克莱因《数学与文化》

心得 体会 拓广 疑问

怎样利用等差、等比数列的性质解题

性质 1 若$\{a_n\}$为等差数列,则$\sum\limits_{i=1}^{2m-1} a_i=(2m-1)a_m$.

证明 因为

$$2a_m=a_1+a_{2m-1}=a_2+a_{2m-2}=\cdots=a_{m-1}+a_{m+1}$$

所以$\sum\limits_{i=1}^{2m-1} a_i=(a_1+a_{2m-1})+(a_2+a_{2m-2})+\cdots+(a_{m-1}+a_{m+1})+a_m=$

$$2(m-1)a_m+a_m=(2m-1)a_m$$

性质 2 若$\{a_n\}$为等比数列,则$\prod\limits_{i=1}^{2m-1} a_i=a_m^{2m-1}$.

证明 因为

$$a_m^2=a_1\cdot a_{2m-1}=\cdots=a_{m-1}\cdot a_{m+1}$$

所以 $\prod\limits_{i=1}^{2m-1} a_i=(a_1\cdot a_{2m-1})\cdot(a_2\cdot a_{2m-2})\cdot\cdots\cdot(a_{m-1}\cdot a_{m+1})\cdot a_m=$

$$(a_m^2)^{m-1}\cdot a_m=a_m^{2m-1}$$

这两个性质很简单,用起来也非常方便,能收到事半功倍的效果.

例 1 在等差数列$\{a_n\}$中,已知$a_{89}=1\,989$,求$\sum\limits_{i=1}^{177} a_i$.

解 根据性质 1,即得$\sum\limits_{i=1}^{177} a_i=177\times 1\,989=352\,053$.

例 2 在等比数列$\{a_n\}$中,已知$a_{995}=1\,990$,求$\prod\limits_{i=1}^{1\,989} a_i$.

解 根据性质 2,即得$\prod\limits_{i=1}^{1\,989} a_i=(1\,990)^{1\,989}$.

例 3 在等差数列$\{a_n\}$中,已知$a_6+a_{14}=20$,求S_{19}.

解 因为

$$a_{10}=\frac{1}{2}(a_6+a_{14})=10$$

所以

$$S_{19}=19\times 10=190$$

例 4 在等差数列$\{a_n\}$中,已知$a_9=23$,$a_{18}=54$,求S_{18}.

解 $S_{18}=S_{17}+a_{18}=17\times 23+54=445$.

例 5 设等比数列$a_1,a_2,\cdots,a_n$的公比是q,求证:$a_1a_2\cdots a_n=a_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}$($n$为奇数).

证明 根据性质 2,令$2m-1=n$,则

$$m=\frac{n+1}{2}$$

因此

$$a_m=a_{\frac{n+1}{2}}=a_1q^{\frac{n-1}{2}}$$

所以

$$a_1a_2\cdots a_n=(a_1q^{\frac{n-1}{2}})^n=a_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

说明 事实上,$a,a+d,a+2d,\cdots,a+(n-1)d,\cdots$是等差数列(公差为

试读结束:需要全本请在线购买: www.ertongbook.com

心得 体会 拓广 疑问

d),则 $a,a+\frac{1}{2}d,a+d,a+\frac{3}{2}d,\cdots,a+\frac{n-1}{2}d,\cdots,a+(n-1)d,\cdots$ 也是等差数列(公差为$\frac{d}{2}$).同理 $a,aq,aq^2,\cdots,aq^{n-1},\cdots$ 是等比数列(公比为 q),则 $a,aq^{\frac{1}{2}},aq,aq^{\frac{3}{2}},\cdots,aq^{\frac{n-1}{2}},\cdots,aq^{n-1},\cdots$ 也是等比数列(公比为 $q^{\frac{1}{2}}$),例 5 就是依据这个道理.

例 6 设 $a>0,b>0$,且 $a\neq b$,在 a,b 之间插入 n 个数 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n$,使 $a,x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,b$ 成等比数列.求证:$\sqrt[n]{x_1x_2x_3\cdots x_n}<\frac{a+b}{2}$($n$ 为奇数).

证明 根据性质 2,设 $2m-1=n$,则

$$m=\frac{n+1}{2}$$

因此

$$x_{\frac{n+1}{2}}=\pm\sqrt{ab}$$

所以

$$\sqrt[n]{x_1x_2x_3\cdots x_n}=\sqrt[n]{(\pm\sqrt{ab})^n}=\begin{cases}\sqrt{ab}(n\text{ 为偶数})<\frac{a+b}{2}\\ \pm\sqrt{ab}(n\text{ 为奇数})<\frac{a+b}{2}\end{cases}\quad\begin{pmatrix}a,b>0\\ a\neq b\end{pmatrix}$$

故

$$\sqrt[n]{x_1x_2x_3\cdots x_n}<\frac{a+b}{2}$$

小资料:中国古代数学家之周公

周公(约公元前 11 世纪) 中国周朝数学家,姓姬,名旦,亦称叔旦,西周初年人,相传他为周武王之弟,因采邑在周(现陕西岐山北),称为周公.他曾协助武王灭商.武王死后,成王年幼,由他摄政.其兄弟管叔、蔡叔、霍叔等人不服,并联合武庚和东方夷族反叛.他出师东征,平定反叛.嗣后,大规模分封诸侯,并营建洛邑(现河南洛阳)作为东都.相传他制礼作乐,建立典章制度,主张"明德慎罚".他与商高问答之辞见于《周髀算经》,还有"周公作九数"的记载,另有"周公作九章之法,以数天下"的传说,所以《九章算术》为周公遗书一说,流传开来.至于《九章算术》成书的情形,专家各有所云,古无定论,又因时隔久远,无从考证.

心得 体会 拓广 疑问

怎样活用等差、等比数列求和公式

设等差数列$\{a_n\}$的首项为a_1,公差为d,前n项和为S_n,则有

$$a_n=\frac{a_1+a_{2n-1}}{2}=\frac{(a_1+a_{2n-1})(2n-1)}{2(2n-1)}=\frac{S_{2n-1}}{2n-1}$$

这就是说数列$\{\frac{S_{2n-1}}{2n-1}\}$(即$\frac{S_1}{1},\frac{S_3}{3},\frac{S_5}{5},\cdots$)也是首项为$a_1$,公差为$d$的等差数列.数列$\{\frac{S_n}{n}\}$是等差数列吗?易证$\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=\frac{d}{2}$,故数列$\{\frac{S_n}{n}\}$是等差数列,其首项为$a_1$,公差为$\frac{d}{2}$.这里的$\frac{S_n}{n}$又是数列$\{a_n\}$中$a_1$与$a_n$的等差中项.这些必然的联系有着广泛的应用.

例1 等差数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的前n项和分别为S_n与T_n,若$\frac{S_n}{T_n}=\frac{2n}{3n+1}$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$等于(　　).

(A)1　　(B)$\frac{\sqrt{6}}{3}$　　(C)$\frac{2}{3}$　　(D)$\frac{4}{9}$

解 $\frac{a_n}{b_n}=\frac{S_{2n-1}}{2n-1}\div\frac{T_{2n-1}}{2n-1}=\frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}=\frac{2(2n-1)}{3(2n-1)+1}=\frac{2n-1}{3n-1}$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{2}{3}$,故选(C).

例2 设等差数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的前n项和分别为S_n和T_n,并且$\frac{S_n}{T_n}=\frac{n+2}{3n+4}$对一切$n$都成立,则$\frac{a_{12}}{b_{12}}=$______.

解 $$\frac{a_{12}}{b_{12}}=\frac{S_{23}}{T_{23}}=\frac{23+2}{3\times23+4}=\frac{25}{73}$$

例3 等差数列$\{a_n\}$的前m项和为30,前$2m$项和为100,则它的前$3m$项和为(　　).

(A)130　　(B)170　　(C)210　　(D)260

解 由于$\{\frac{S_n}{n}\}$是等差数列,所以$\frac{S_m}{m},\frac{S_{2m}}{2m},\frac{S_{3m}}{3m}$成等差数列,即

$$\frac{S_m}{m}+\frac{S_{3m}}{3m}=2\times\frac{S_{2m}}{2m}$$

所以$S_{3m}=3(S_{2m}-S_m)=3(100-30)=210$,故选(C).

例4 S_n是等差数列$\{a_n\}$前n项的和,已知$\frac{1}{3}S_3$和$\frac{1}{4}S_4$的等比中项为$\frac{1}{5}S_5$,$\frac{1}{3}S_3$和$\frac{1}{4}S_4$的等差中项为1,求a_n.

解 由题设得$\frac{1}{3}S_3,\frac{1}{4}S_4,\frac{1}{5}S_5$成等差数列,公差为$\frac{d}{2}$($d$为数列$\{a_n\}$的公差).这三项即$a_2,\frac{1}{4}S_4,a_3$,亦即$a_1+d,a_1+\frac{3}{2}d,a_1+2d$,所以

心得 体会 拓广 疑问

$$\begin{cases}(a_1+d)+(a_1+\frac{3}{2}d)=2\\(a_1+d)(a_1+\frac{3}{2}d)=(a_1+2d)^2\end{cases}$$

解得
$$\begin{cases}d=0\\a_1=1\end{cases} \text{或} \begin{cases}d=-\frac{12}{5}\\a_1=4\end{cases}$$

经检验,这两组解均适合题意,所以 $a_n=1$ 或 $a_n=\frac{32}{5}-\frac{12}{5}n$.

例5　等差数列$\{a_n\}$中,$S_m=p,S_p=m$,求 S_{m+p}.

解　不妨设 $m<p$,数列$\{a_n\}$,即

$$a_1,a_2,\cdots,a_m,a_{m+1},\cdots,a_p,a_{p+1},\cdots,a_{p+m},\cdots.$$

因为
$$\frac{S_n}{n}=\frac{a_1+a_n}{2}$$

所以
$$\frac{S_{p+m}}{p+m}=\frac{a_1+a_{p+m}}{2}$$

$$\frac{S_p-S_m}{p-m}=\frac{a_{m+1}+\cdots+a_p}{p-m}=\frac{a_p+a_{m+1}}{2}=\frac{a_1+a_{p+m}}{2}$$

所以
$$S_{p+m}=(p+m)\cdot\frac{m-p}{p-m}=-(p+m)$$

对于等比数列前 n 项和公式 $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ 或 $S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}$,运用时应先分类讨论,公式仅当 $q\neq1$ 情况适用.本节将介绍等比数列另一求和公式,可避免讨论、简化过程,达到优化解题的目的.

定理　设公比为 q 的等比数列$\{a_n\}$前 n 项和为 S_n,则 $S_{m+n}=S_m+q^mS_n$.特别地,当 $m=1$ 时,有 $S_{n+1}=a_1+qS_n$.

例6　已知等比数列的公比为2,且前4项之和为1,那么前8项之和等于(　　).

(A)15　　(B)17　　(C)19　　(D)21

解　因为 $S_8=S_4+q^4S_4$,所以 $S_8=1+2^4\cdot1=17$,所以选(B).

例7　已知等比数列$\{a_n\}$中,$S_n=48,S_{2n}=60$,求 S_{3n}.

解　因为 $S_{2n}=S_n+q^nS_n$,即 $60=48+48q^n$,所以

$$q^n=\frac{1}{4}$$

所以
$$S_{3n}=S_n+q^nS_{2n}=48+\frac{1}{4}\times60=63$$

例8　设$\{a_n\}$是由正数组成的等比数列,S_n 是其前 n 项和,证明:$\frac{\log_{0.5}S_n+\log_{0.5}S_{n+2}}{2}>\log_{0.5}S_{n+1}$.

证明　设$\{a_n\}$的公比为 q,由题设知 $a_1>0,q>0$.因为

$$S_{n+1}=a_1+qS_n,S_{n+2}=a_1+qS_{n+1}$$

所以
$$S_n\cdot S_{n+2}-S_{n+1}^2=S_n(a_1+qS_{n+1})-(a_1+qS_n)S_{n+1}=$$
$$a_1(S_n-S_{n+1})=-a_1\cdot a_{n+1}<0$$

即
$$S_n\cdot S_{n+2}<S_{n+1}^2$$

由对数函数单调性知

$$\log_{0.5}S_nS_{n+2}>\log_{0.5}S_{n+1}^2$$

心得 体会 拓广 疑问

即
$$\frac{\log_{0.5}S_n+\log_{0.5}S_{n+2}}{2}>\log_{0.5}S_{n+1}$$

例 9 等比数列$\{a_n\}$的首项$a_1=-1$,前n项和为S_n,若$\frac{S_{10}}{S_5}=\frac{31}{32}$,则$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$等于(　　).

(A)$\frac{2}{3}$　　(B)$-\frac{2}{3}$　　(C)2　　(D)-2

解 因为
$$S_{10}=S_5+q^5S_5$$
所以
$$\frac{S_{10}}{S_5}=\frac{S_5+q^5S_5}{S_5}=1+q^5=\frac{31}{32}$$
所以
$$q=-\frac{1}{2}$$
所以$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{-1}{1+\frac{1}{2}}=-\frac{2}{3}$,故选(B).

小资料:中国古代数学家之商高

商高(约公元前11世纪)　中国周朝数学家.西周初年人.据《周髀算经》中周公与商高的问答所载,他懂得数学、天文、历法及天文测量等.他曾说:"数之法,出于圆方;圆出于方,方出于矩,矩出于九九八十一.故折矩,以为勾广三,股修四,径隅五.既方之外,半之一矩,环而共盘,得成三、四、五."(见《周髀算经》)由此可见,他对数与形有较深的认识,并懂得3∶4∶5的三边构成直角三角形,且还能加以应用.

心得 体会 拓广 疑问

怎样用等差、等比数列求和公式的推导方法解题

等差、等比数列求和公式的推导,实质上是应用了倒序求和、错位相(加)减两种方法.

1.等差数列求和公式的推导,先是利用倒序求和求出 $2S_n$,然后再求出 S_n,利用这种思考方法可以证明一个形式简单、结构优美的定理.

定理 有两个有限数列

$$A_0, A_1, A_2, \cdots, A_n$$

$$B_0, B_1, B_2, \cdots, B_n$$

其中第一个数列中同两端等距的两项是相等的(即 $A_0 = A_n, A_1 = A_{n-1}, \cdots$),第二个数列中同两端等距的两项之和为常数 $2G$(即 $B_0 + B_n = 2G, B_1 + B_{n-1} = 2G, \cdots$).令 $S = A_0 + A_1 + \cdots + A_n$,则

$$\sum_{k=0}^{n} A_k B_k = GS$$

证明

$$\sum_{k=0}^{n} A_k B_k = A_0 B_0 + A_1 B_1 + A_2 B_2 + \cdots + A_n B_n =$$
$$A_n B_n + A_{n-1} B_{n-1} + A_{n-2} B_{n-2} + \cdots + A_0 B_0$$

因此,利用 $A_{n-k} = A_k (k = 1, 2, \cdots, n)$,得出

$$2\sum_{k=0}^{n} A_k B_k = A_0(B_0 + B_n) + A_1(B_1 + B_{n-1}) + \cdots + A_n(B_n + B_0) =$$
$$2G(A_0 + A_1 + \cdots + A_n) = 2GS$$

故

$$\sum_{k=0}^{n} A_k B_k = GS$$

由定理我们很容易演绎出一系列恒等式,从而使恒等式得到一个统一证明,现举几例说明.

例 1 若 $A_k = C_n^k, B_k = a_k (k = 0, 1, 2, \cdots, n)$,$\{a_k\}$ 为等差数列,则 $S = 2^n$,$2G = a_0 + a_n$,于是

$$\sum_{k=0}^{n} a_k C_n^k = (a_0 + a_n) 2^{n-1} \quad ①$$

特别地,当 $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 1$ 时

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n \quad ②$$

① 可以看做是 ② 的推广.

例 2 若 $A_k = C_n^k, B_k = \cos \frac{k}{n}\pi (k = 0, 1, \cdots, n)$,则

$$2G = \cos \frac{k}{n}\pi + \cos \frac{n-k}{n}\pi = 0$$

于是

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos \frac{k}{n}\pi = 0 \quad ①$$

众所周知

心得 体会 拓广 疑问

$$\sum_{k=0}^{n}\cos\frac{k}{n}\pi=0 \qquad ②$$

因此，① 可以看做是 ② 的一个推广.

例 3 若 $A_k=\sin\frac{k}{n}\pi, B_k=\cos\frac{k}{n}\pi(k=0,1,\cdots,n)$，则

$$\sum_{k=0}^{n}\sin\frac{k}{n}\pi\cos\frac{k}{n}\pi=0$$

即

$$\sum_{k=0}^{n}\sin\frac{2k}{n}\pi=0 \qquad ①$$

例 4 $A_k=C_n^k, B_k=\sin kx\cos(n-k)x$，则 $S=2^n, 2G=\sin nx$，于是

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k\sin kx\cos(n-k)x=2^{n-1}\sin nx$$

特别地，当 $x=\frac{\pi}{n}$ 时

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k\sin\frac{2k}{n}\pi=0 \qquad ①$$

当 $x=\frac{\pi}{2n}$ 时

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k\sin^2\frac{k}{2n}\pi=2^{n-1} \qquad ②$$

① 可以看做是例 3 中 ① 的推广，由 ② 及 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1, \sum_{k=0}^{n}C_n^k=2^n$ 易得

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cos^2\frac{k}{2n}\pi=2^{n-1} \qquad ③$$

例 5 若 $A_k=\sin\frac{k}{n}\pi, B_k=a_k, \{a_k\}$ 为等差数列.

因为

$$\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx=(\sin\frac{n}{2}x\sin\frac{n+1}{2}x)/\sin\frac{x}{2}$$

所以

$$S=\sum_{k=0}^{n}\sin\frac{k}{n}\pi=(\sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{n+1}{2n}\pi)/\sin\frac{\pi}{2n}=\cot\frac{\pi}{2n}$$

而 $2G=a_0+a_n$，故

$$\sum_{k=0}^{n}a_k\sin\frac{k}{n}\pi=\frac{1}{2}(a_0+a_n)\cot\frac{\pi}{2n} \qquad ①$$

特别地，当 $a_k=k$ 时

$$\sum_{k=0}^{n}k\sin\frac{k}{n}\pi=\frac{1}{2}n\cot\frac{\pi}{2n} \qquad ②$$

① 可以看做是 ② 的推广.

例6 若 $A_k=\sin\frac{k}{n}\pi, B_k=\sin kx\cos(n+k)x$，则 $S=\cot\frac{\pi}{2n}, 2G=\sin nx$，于是

$$\sum_{k=0}^{n}\sin\frac{k}{n}\pi\sin kx\cos(n-k)x=\frac{1}{2}\cot\frac{\pi}{2n}\sin nx \qquad ①$$

特别地，当 $x=\frac{\pi}{n}$ 时

$$\sum_{k=0}^{n}\sin\frac{k}{n}\pi\sin\frac{2k}{n}\pi=0$$

或

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com