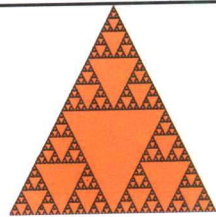


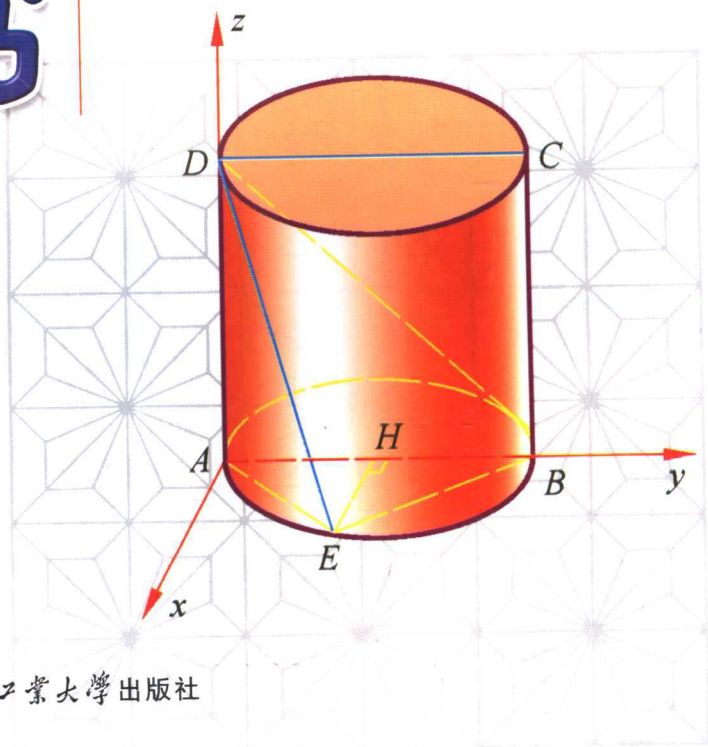
高中版下卷(一)



新编中学数学

解题方法全书

刘培杰 主编

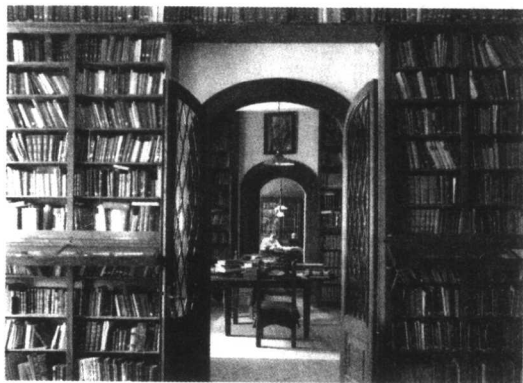


哈尔滨工业大学出版社



新编中学数学 解题方法全书

刘培杰 主编



数学之失传久矣，汉晋以来，所存几如一线，其后祖冲之、郭守敬辈，殚心象数，立密率消长之法以为习算入门之规。然其法以有尽度无尽，止言天行，未及地体，是以测之有变更，度之多盈缩，盖有未尽之余蕴也。

——《周髀经解》

哈尔滨工业大学出版社

内 容 提 要

本书共包括两部分:第六编数列、排列、组合、概率,第七编向量、极限、导数。本书以专题的形式对中学数学中的重点、难点进行了归纳、总结,涵盖面广,可使学生深入理解数学概念,灵活使用解题方法,可较大程度地提高学生在各类考试中的应试能力,适合高中师生阅读。

图书在版编目(CIP)数据

新编中学数学解题方法全书:高中版.下卷.1/刘培杰主编.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2007.5

ISBN 978-7-5603-2492-0

I.新… II.刘… III.数学课-高中-解题
IV.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 037534 号

策划编辑 刘培杰

责任编辑 李广鑫 唐 蕾

封面设计 卞秉利

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451-86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 黑龙江省教育厅印刷厂

开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 30.25 字数 684 千字

版 次 2007 年 5 月第 1 版 2007 年 5 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5603-2492-0

印 数 1~6 000 册

定 价 42.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)



下 卷 (一)

第六编 数列 排列 组合 概率

怎样利用等差、等比数列的性质解题	3
怎样活用等差、等比数列求和公式	5
怎样用等差、等比数列求和公式的推导方法解题	8
怎样用等差数列通项、求和公式的几个变式解题	12
怎样进行等差、等比数列问题的线性转化	14
怎样逆用等比数列求和公式解题	16
怎样在经济生活中应用等差、等比数列	18
怎样巧用等差、等比数列解证三角题	21
怎样用代换法求递推数列通项公式	23
怎样巧用 $a_{n+1} - a_n = d$ 求通项公式	25
怎样运用 $S_m + n$ 公式解高考题	27
怎样分类型解数列问题	29
怎样解高考中的数列综合题	34
怎样解高考中的复合数列问题	39
怎样在经济工作中应用数列	43
怎样用数列的单调性解决不等式问题	46
怎样学习正整数列	48
怎样解正整数群数列的问题	53
怎样求特殊数列部分和	55
怎样解解析几何中的点列问题	62
怎样解数列抽项问题	66
怎样探求高考题中数列通项公式	69
如何掌握排列组合问题的解题原则	72
怎样建立排列组合应用题的几种模式	74
怎样利用常用解法解排列组合问题	79
怎样进行排列组合解题方法的转化	82
怎样拟定解排列组合问题的策略	84
怎样对一道组合题进行多向思考	87

目 录

CONTENTS


 目 录
CONTENTS

怎样解高考题中的几类计数问题	89
怎样用构造子集法解一类组合计数问题	92
怎样利用排列组合知识巧解两类并、交集问题	94
怎样构造方程模型巧解排列问题	96
怎样应用隔板法	97
怎样解高考排列组合题的六种常见类型题	99
怎样避免解排列组合问题时的重与漏	102
怎样辨析排列组合中几个易混淆问题	104
怎样解答有关圆排列与重复组合问题	107
怎样利用“钥匙模型”解决物品抽取问题	109
怎样解排列中“连排”与“间隔排”的问题	111
怎样区别“无放回摸球”与“有放回摸球”	113
怎样分析排列组合应用题	115
怎样在解排列组合问题中应用数学思想方法	119
怎样发现排列组合中的排除现象	123
怎样使用组合恒等式论证的基本方法	127
怎样用构造法证明组合恒等式	129
怎样熟悉组合恒等式证明的几种途径	134
怎样用几何方法证明组合恒等式	137
怎样用母函数法求数列的和	138
怎样解高考题中有关二项式定理的三大题型	142
怎样应用一个组合公式求数列和	144
怎样求非负整数排列中的所有数的和	148
怎样用排列数的性质解题	150
怎样利用组合恒等式求某些数列的前 n 项和	152
怎样求二项展开式中系数绝对值最大的项	154
怎样在数列求和中应用二项式定理	156
怎样用概率法解组合问题	158
怎样使用古典概型中常用的解题技巧	159
怎样解一类独立试验问题	162
怎样赏析高考中的概率问题	164
怎样解交汇型概率试题	168
怎样解概率与统计高考题	179
怎样解概率与统计高考模拟题	182
怎样按概率统计考点配备相应习题	189
怎样解概率问题中的递推数列问题	193
怎样用图表化方法解概率问题	197
一类概率问题的求解方法	200
怎样走出求解概率题的常见误区	202
怎样避免概率计算中的常见错误	205
怎样进行一种赌博胜率的计算	208



怎样解全概率类型题	210
怎样解一类有电路图的概率问题	212
怎样解决复杂概率问题	213

第七编 向量 极限 导数

怎样用平面向量解题(I)	221
怎样用平面向量解题(II)	223
怎样巧用平面向量的举隅	227
怎样巧用向量解题	229
怎样掌握平面的法向量	232
怎样破解平面向量题的几种代数变形	234
怎样在立体几何中应用共面向量定理及其推理	236
怎样使用向量解题的联想策略	240
怎样利用平面向量基本定理中的思想简化四类问题的求解	242
怎样用向量内积解题举隅	245
怎样在中学数学中应用向量	247
怎样对平面向量数量积“性质1”进行解读	251
怎样用平面向量数量积性质解题	254
怎样掌握平面向量的数量积	257
怎样应用向量数量积的几何意义	262
怎样理解向量数量积中值得重视的一个问题	264
怎样应用三角形面积公式的向量坐标表示解题	266
怎样认识向量的主线——共线	269
怎样用向量法解多线共点问题	272
怎样在向量问题中使用待定系数法	274
怎样从向量一例看数学的源与流	276
怎样利用向量的工具作用提高解题能力	279
怎样引入向量运算	284
怎样利用向量进行试题推广	287
怎样利用向量的合成与分解解题	289
怎样应用向量的“闭合回路”解题	292
怎样用零向量解题	295
怎样用同一向量的不同表示式解几何题	298
怎样确定 $ a+b = \lambda a-b $ 中 λ 的取值范围	302
怎样应用向量不等式 $- a b \leq a \cdot b \leq a b $	304
怎样利用向量解高考题	307
怎样解高考题中的平面向量问题(I)	309
怎样解高考题中的平面向量问题(II)	312
怎样借助平面法向量简解高考立几题	317
怎样用多种向量法解立体几何高考题	320
怎样解全国各地高考模拟试题中的平面向量问题	322
怎样看待高考对平面向量内容的考查	327

目录

CONTENTS

目 录
CONTENTS

怎样用向量法处理高考中与角有关的立几探索题	331
怎样解平面向量高考题	335
怎样按考点复习向量	344
怎样用向量巧解竞赛题(I)	346
怎样用向量巧解竞赛题(II)	347
怎样解平面向量中的“涉心”问题	349
怎样利用向量来研究三角形的“五心”	352
怎样用三角形“四心”的向量视角及其应用	355
怎样利用向量将一个三角形重心向量性质进行空间拓广	359
怎样用向量导出四面体内心与旁心的一个有趣性质	360
怎样利用向量证明一个涉及三角形内心的平凡定理	362
怎样用向量证明代数不等式	364
怎样利用向量越过斜率不存在的陷阱	367
怎样用向量法解解析几何题	370
怎样用向量内积解决解析几何中有关垂直的问题	372
怎样借助向量解立体几何题(I)	374
怎样借助向量解立体几何题(II)	377
怎样利用向量求距离	379
怎样应用空间距离的统一公式(I)	380
怎样应用空间距离的统一公式(II)	382
怎样用空间向量内积求异面直线所成的角	384
怎样用平面的法向量求二面角	386
怎样用向量法求空间角的大小	388
怎样利用空间向量证明线面平行	391
怎样理解空间向量、夹角与距离	393
怎样巧用平面的法向量解立体几何题	398
怎样应用空间向量基本定理	401
怎样利用向量处理立体几何问题	403
怎样用向量解立体几何中的“动态问题”	406
怎样用数量积公式解立体几何问题	408
怎样避免学向量容易出现的错误	410
怎样由一道向量习题的错解引发研究性学习	412
怎样避免犯解平面向量问题的典型错误	416
怎样避免平面向量的常见误区	418
怎样解以高等数学内容为背景的试题	420
怎样应用极限思想解题(I)	425
怎样应用极限思想解题(II)	427
怎样求解数列极限的问题	430
怎样用导数方法解不等式问题	434
怎样用导函数法求解与证明不等式	438
怎样在证明不等式中使用导数并采用构造函数的方法	440



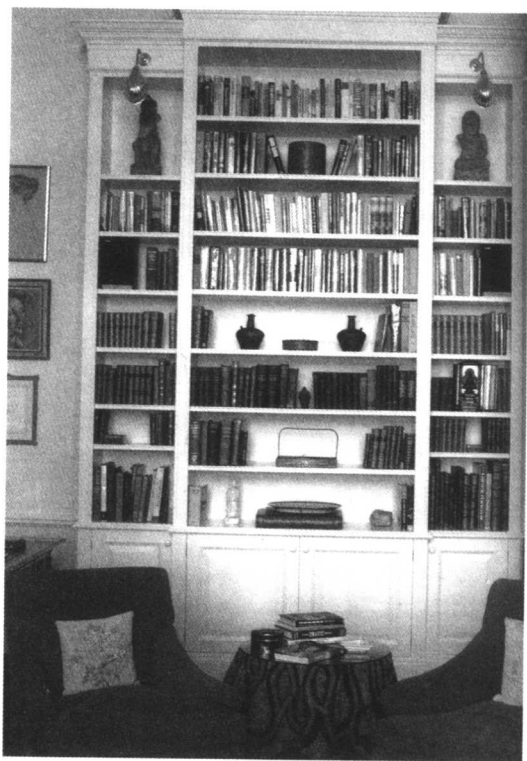
怎样理解导函数与原函数的联系	443
怎样应用导数中的一个重要定理	445
怎样在运用导数解题时注重全面	447
怎样用导数探讨函数图象的交点问题	450
怎样看待新课程高考导数试题的特点及启示	453
怎样解高考导数应用问题(I)	456
怎样解高考导数应用问题(II)	462
怎样掌握高考对导数问题考查的五大热点	467
怎样避免犯导数学习中的常见错误	471
怎样避免进入用导数的几何意义求切线方程的“误区”	474

目录

CONTENTS

第六编

数列 排列 组合 概率



在最广泛的意义上说，数学是一种精神，一种理性的精神。正是这种精神，使得人类的思维得以运用到最完善的程度，亦正是这种精神，试图决定性地影响人类的物质、道德和社会生活；试图回答有关人类自身存在提出的问题；努力去理解和控制自然；尽力去探求和确立已经获得知识的最深刻的和最完善的内涵。

——M. 克莱因 《数学与文化》

心得 体会 拓广 疑问

怎样利用等差、等比数列的性质解题

性质 1 若 $\{a_n\}$ 为等差数列, 则 $\sum_{i=1}^{2m-1} a_i = (2m-1)a_m$.

证明 因为

$$2a_m = a_1 + a_{2m-1} = a_2 + a_{2m-2} = \cdots = a_{m-1} + a_{m+1}$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \sum_{i=1}^{2m-1} a_i &= (a_1 + a_{2m-1}) + (a_2 + a_{2m-2}) + \cdots + (a_{m-1} + a_{m+1}) + a_m = \\ &2(m-1)a_m + a_m = (2m-1)a_m \end{aligned}$$

性质 2 若 $\{a_n\}$ 为等比数列, 则 $\prod_{i=1}^{2m-1} a_i = a_m^{2m-1}$.

证明 因为

$$a_m^2 = a_1 \cdot a_{2m-1} = \cdots = a_{m-1} \cdot a_{m+1}$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \prod_{i=1}^{2m-1} a_i &= (a_1 \cdot a_{2m-1}) \cdot (a_2 \cdot a_{2m-2}) \cdot \cdots \cdot (a_{m-1} \cdot a_{m+1}) \cdot a_m = \\ &(a_m^2)^{m-1} \cdot a_m = a_m^{2m-1} \end{aligned}$$

这两个性质很简单, 用起来也非常方便, 能收到事半功倍的效果.

例 1 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_{89} = 1989$, 求 $\sum_{i=1}^{177} a_i$.

解 根据性质 1, 即得 $\sum_{i=1}^{177} a_i = 177 \times 1989 = 352053$.

例 2 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_{995} = 1990$, 求 $\prod_{i=1}^{1989} a_i$.

解 根据性质 2, 即得 $\prod_{i=1}^{1989} a_i = (1990)^{1989}$.

例 3 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_6 + a_{14} = 20$, 求 S_{19} .

解 因为

$$a_{10} = \frac{1}{2}(a_6 + a_{14}) = 10$$

所以 $S_{19} = 19 \times 10 = 190$

例 4 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_9 = 23$, $a_{18} = 54$, 求 S_{18} .

解 $S_{18} = S_{17} + a_{18} = 17 \times 23 + 54 = 445$.

例 5 设等比数列 a_1, a_2, \cdots, a_n 的公比是 q , 求证: $a_1 a_2 \cdots a_n = a_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}$ (n 为奇数).

证明 根据性质 2, 令 $2m-1 = n$, 则

$$m = \frac{n+1}{2}$$

因此 $a_m = a^{\frac{n+1}{2}} = a_1 q^{\frac{n-1}{2}}$

所以 $a_1 a_2 \cdots a_n = (a_1 q^{\frac{n-1}{2}})^n = a_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}$

说明 事实上, $a, a+d, a+2d, \cdots, a+(n-1)d, \cdots$ 是等差数列(公差为

d), 则 $a, a + \frac{1}{2}d, a + d, a + \frac{3}{2}d, \dots, a + \frac{n-1}{2}d, \dots, a + (n-1)d, \dots$ 也是等差数列(公差为 $\frac{d}{2}$). 同理 $a, aq, aq^2, \dots, aq^{n-1}, \dots$ 是等比数列(公比为 q), 则 $a, aq^{\frac{1}{2}}, aq, aq^{\frac{3}{2}}, \dots, aq^{\frac{n-1}{2}}, \dots, aq^{n-1}, \dots$ 也是等比数列(公比为 $q^{\frac{1}{2}}$), 例 5 就是依据这个道理.

例 6 设 $a > 0, b > 0$, 且 $a \neq b$, 在 a, b 之间插入 n 个数 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, 使 $a, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, b$ 成等比数列. 求证: $\sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \cdots x_n} < \frac{a+b}{2}$ (n 为奇数).

证明 根据性质 2, 设 $2m-1 = n$, 则

$$m = \frac{n+1}{2}$$

因此

$$x_{\frac{n+1}{2}} = \pm \sqrt{ab}$$

所以

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \cdots x_n} = \sqrt[n]{(\pm \sqrt{ab})^n} = \begin{cases} \sqrt{ab} (n \text{ 为偶数}) < \frac{a+b}{2} \\ \pm \sqrt{ab} (n \text{ 为奇数}) < \frac{a+b}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} a, b > 0 \\ a \neq b \end{cases}$$

故

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \cdots x_n} < \frac{a+b}{2}$$

心得体会 拓广疑问

小资料: 中国古代数学家之周公

周公(约公元前 11 世纪) 中国周朝数学家, 姓姬, 名旦, 亦称叔旦, 西周初年人, 相传他为周武王之弟, 因采邑在周(现陕西岐山北), 称为周公. 他曾协助武王灭商. 武王死后, 成王年幼, 由他摄政. 其兄弟管叔、蔡叔、霍叔等人不服, 并联合武庚和东方夷族反叛. 他出师东征, 平定反叛. 嗣后, 大规模分封诸侯, 并营建洛邑(现河南洛阳) 作为东都. 相传他制礼作乐, 建立典章制度, 主张“明德慎罚”. 他与商高问答之辞见于《周髀算经》, 还有“周公作九数”的记载, 另有“周公作九章之法, 以数天下”的传说, 所以《九章算术》为周公遗书一说, 流传开来. 至于《九章算术》成书的情形, 专家各有所云, 古无定论, 又因时隔久远, 无从考证.

怎样活用等差、等比数列求和公式

设等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 ,公差为 d ,前 n 项和为 S_n ,则有

$$a_n = \frac{a_1 + a_{2n-1}}{2} = \frac{(a_1 + a_{2n-1})(2n-1)}{2(2n-1)} = \frac{S_{2n-1}}{2n-1}$$

这就是说数列 $\{\frac{S_{2n-1}}{2n-1}\}$ (即 $\frac{S_1}{1}, \frac{S_3}{3}, \frac{S_5}{5}, \dots$)也是首项为 a_1 ,公差为 d 的等差数列. 数列 $\{\frac{S_n}{n}\}$ 是等差数列吗? 易证 $\frac{S_{n+1}}{n+1} - \frac{S_n}{n} = \frac{d}{2}$,故数列 $\{\frac{S_n}{n}\}$ 是等差数列,其首项为 a_1 ,公差为 $\frac{d}{2}$. 这里的 $\frac{S_n}{n}$ 又是数列 $\{a_n\}$ 中 a_1 与 a_n 的等差中项. 这些必然的联系有着广泛的应用.

例1 等差数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n 与 T_n ,若 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{2n}{3n+1}$,则

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ 等于().

- (A) 1 (B) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{4}{9}$

解 $\frac{a_n}{b_n} = \frac{S_{2n-1}}{2n-1} \div \frac{T_{2n-1}}{2n-1} = \frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}} = \frac{2(2n-1)}{3(2n-1)+1} = \frac{2n-1}{3n-1}$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{2}{3}$, 故选(C).

例2 设等差数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n 和 T_n ,并且 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{n+2}{3n+4}$

对一切 n 都成立,则 $\frac{a_{12}}{b_{12}} =$ _____.

解 $\frac{a_{12}}{b_{12}} = \frac{S_{23}}{T_{23}} = \frac{23+2}{3 \times 23+4} = \frac{25}{73}$

例3 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 m 项和为30,前 $2m$ 项和为100,则它的前 $3m$ 项和为().

- (A) 130 (B) 170 (C) 210 (D) 260

解 由于 $\{\frac{S_n}{n}\}$ 是等差数列,所以 $\frac{S_m}{m}, \frac{S_{2m}}{2m}, \frac{S_{3m}}{3m}$ 成等差数列,即

$$\frac{S_m}{m} + \frac{S_{3m}}{3m} = 2 \times \frac{S_{2m}}{2m}$$

所以 $S_{3m} = 3(S_{2m} - S_m) = 3(100 - 30) = 210$, 故选(C).

例4 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 前 n 项的和,已知 $\frac{1}{3}S_3$ 和 $\frac{1}{4}S_4$ 的等比中项为 $\frac{1}{5}S_5$, $\frac{1}{3}S_3$ 和 $\frac{1}{4}S_4$ 的等差中项为1,求 a_n .

解 由题设得 $\frac{1}{3}S_3, \frac{1}{4}S_4, \frac{1}{5}S_5$ 成等差数列,公差为 $\frac{d}{2}$ (d 为数列 $\{a_n\}$ 的公差). 这三项即 $a_2, \frac{1}{4}S_4, a_3$,亦即 $a_1 + d, a_1 + \frac{3}{2}d, a_1 + 2d$,所以

$$\begin{cases} (a_1 + d) + (a_1 + \frac{3}{2}d) = 2 \\ (a_1 + d)(a_1 + \frac{3}{2}d) = (a_1 + 2d)^2 \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} d = 0 \\ a_1 = 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} d = -\frac{12}{5} \\ a_1 = 4 \end{cases}$

经检验,这两组解均适合题意,所以 $a_n = 1$ 或 $a_n = \frac{32}{5} - \frac{12}{5}n$.

例 5 等差数列 $\{a_n\}$ 中, $S_m = p, S_p = m$, 求 S_{m+p} .

解 不妨设 $m < p$, 数列 $\{a_n\}$, 即

$$a_1, a_2, \dots, a_m, a_{m+1}, \dots, a_p, a_{p+1}, \dots, a_{p+m}, \dots$$

因为 $\frac{S_n}{n} = \frac{a_1 + a_n}{2}$

所以 $\frac{S_{p+m}}{p+m} = \frac{a_1 + a_{p+m}}{2}$

$$\frac{S_p - S_m}{p-m} = \frac{a_{m+1} + \dots + a_p}{p-m} = \frac{a_p + a_{m+1}}{2} = \frac{a_1 + a_{p+m}}{2}$$

所以 $S_{p+m} = (p+m) \cdot \frac{m-p}{p-m} = -(p+m)$

对于等比数列前 n 项和公式 $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ 或 $S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1-q}$, 运用时应先分类讨论, 公式仅当 $q \neq 1$ 情况适用. 本节将介绍等比数列另一求和公式, 可避免讨论、简化过程, 达到优化解题的目的.

定理 设公比为 q 的等比数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n , 则 $S_{m+n} = S_m + q^m S_n$. 特别地, 当 $m = 1$ 时, 有 $S_{n+1} = a_1 + q S_n$.

例 6 已知等比数列的公比为 2, 且前 4 项之和为 1, 那么前 8 项之和等于 ().

(A)15 (B)17 (C)19 (D)21

解 因为 $S_8 = S_4 + q^4 S_4$, 所以 $S_8 = 1 + 2^4 \cdot 1 = 17$, 所以选(B).

例 7 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中, $S_n = 48, S_{2n} = 60$, 求 S_{3n} .

解 因为 $S_{2n} = S_n + q^n S_n$, 即 $60 = 48 + 48q^n$, 所以

$$q^n = \frac{1}{4}$$

所以 $S_{3n} = S_n + q^n S_{2n} = 48 + \frac{1}{4} \times 60 = 63$

例 8 设 $\{a_n\}$ 是由正数组成的等比数列, S_n 是其前 n 项和, 证明: $\frac{\log_{0.5} S_n + \log_{0.5} S_{n+2}}{2} > \log_{0.5} S_{n+1}$.

证明 设 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 由题设知 $a_1 > 0, q > 0$. 因为

$$S_{n+1} = a_1 + q S_n, S_{n+2} = a_1 + q S_{n+1}$$

所以 $S_n \cdot S_{n+2} - S_{n+1}^2 = S_n(a_1 + q S_{n+1}) - (a_1 + q S_n) S_{n+1} =$

$$a_1(S_n - S_{n+1}) = -a_1 \cdot a_{n+1} < 0$$

即 $S_n \cdot S_{n+2} < S_{n+1}^2$

由对数函数单调性知

$$\log_{0.5} S_n S_{n+2} > \log_{0.5} S_{n+1}^2$$

心得体会 拓广疑问

即 $\frac{\log_{0.5} S_n + \log_{0.5} S_{n+2}}{2} > \log_{0.5} S_{n+1}$

例9 等比数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = -1$, 前 n 项和为 S_n , 若 $\frac{S_{10}}{S_5} = \frac{31}{32}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 等于().

- (A) $\frac{2}{3}$ (B) $-\frac{2}{3}$ (C) 2 (D) -2

解 因为

$$S_{10} = S_5 + q^5 S_5$$

所以 $\frac{S_{10}}{S_5} = \frac{S_5 + q^5 S_5}{S_5} = 1 + q^5 = \frac{31}{32}$

所以 $q = -\frac{1}{2}$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{-1}{1 + \frac{1}{2}} = -\frac{2}{3}$, 故选(B).

心得体会 拓广疑问

小资料: 中国古代数学家之商高

商高(约公元前11世纪) 中国周朝数学家。西周初年人。据《周髀算经》中周公与商高的问答所载, 他懂得数学、天文、历法及天文测量等。他曾说:“数之法, 出于圆方; 圆出于方, 方出于矩, 矩出于九九八十一。故折矩, 以为勾广三, 股修四, 径隅五。既方之外, 半之一矩, 环而共盘, 得成三、四、五。”(见《周髀算经》)由此可见, 他对数与形有较深的认识, 并懂得3:4:5的三边构成直角三角形, 且还能加以应用。

怎样用等差、等比数列求和公式的推导方法解题

等差、等比数列求和公式的推导,实质上是应用了倒序求和、错位相(加)减两种方法.

1. 等差数列求和公式的推导,先是利用倒序求和求出 $2S_n$,然后再求出 S_n ,利用这种思考方法可以证明一个形式简单、结构优美的定理.

定理 有两个有限数列

$$A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$$

$$B_0, B_1, B_2, \dots, B_n$$

其中第一个数列中同两端等距的两项是相等的(即 $A_0 = A_n, A_1 = A_{n-1}, \dots$),第二个数列中同两端等距的两项之和为常数 $2G$ (即 $B_0 + B_n = 2G, B_1 + B_{n-1} = 2G, \dots$).令 $S = A_0 + A_1 + \dots + A_n$,则

$$\sum_{k=0}^n A_k B_k = GS$$

证明
$$\sum_{k=0}^n A_k B_k = A_0 B_0 + A_1 B_1 + A_2 B_2 + \dots + A_n B_n =$$

$$A_n B_n + A_{n-1} B_{n-1} + A_{n-2} B_{n-2} + \dots + A_0 B_0$$

因此,利用 $A_{n-k} = A_k (k = 1, 2, \dots, n)$,得出

$$2 \sum_{k=0}^n A_k B_k = A_0(B_0 + B_n) + A_1(B_1 + B_{n-1}) + \dots + A_n(B_n + B_0) = 2G(A_0 + A_1 + \dots + A_n) = 2GS$$

故

$$\sum_{k=0}^n A_k B_k = GS$$

由定理我们很容易演绎出一系列恒等式,从而使恒等式得到一个统一证明,现举几例说明.

例 1 若 $A_k = C_n^k, B_k = a_k (k = 0, 1, 2, \dots, n), \{a_k\}$ 为等差数列,则 $S = 2^n, 2G = a_0 + a_n$,于是

$$\sum_{k=0}^n a_k C_n^k = (a_0 + a_n) 2^{n-1} \quad ①$$

特别地,当 $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 1$ 时

$$\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n \quad ②$$

① 可以看做是 ② 的推广.

例 2 若 $A_k = C_n^k, B_k = \cos \frac{k}{n} \pi (k = 0, 1, \dots, n)$,则

$$2G = \cos \frac{k}{n} \pi + \cos \frac{n-k}{n} \pi = 0$$

于是

$$\sum_{k=0}^n C_n^k \cos \frac{k}{n} \pi = 0 \quad ①$$

众所周知

心得体会 拓广 疑问

$$\sum_{k=0}^n \cos \frac{k}{n} \pi = 0 \quad (2)$$

因此,①可以看做是②的一个推广.

例3 若 $A_k = \sin \frac{k}{n} \pi, B_k = \cos \frac{k}{n} \pi (k = 0, 1, \dots, n)$, 则

$$\sum_{k=0}^n \sin \frac{k}{n} \pi \cos \frac{k}{n} \pi = 0$$

即

$$\sum_{k=0}^n \sin \frac{2k}{n} \pi = 0 \quad (1)$$

例4 $A_k = C_n^k, B_k = \sin kx \cos(n-k)x$, 则 $S = 2^n, 2G = \sin nx$, 于是

$$\sum_{k=0}^n C_n^k \sin kx \cos(n-k)x = 2^{n-1} \sin nx$$

特别地, 当 $x = \frac{\pi}{n}$ 时

$$\sum_{k=0}^n C_n^k \sin \frac{2k}{n} \pi = 0 \quad (1)$$

当 $x = \frac{\pi}{2n}$ 时

$$\sum_{k=0}^n C_n^k \sin^2 \frac{k}{2n} \pi = 2^{n-1} \quad (2)$$

①可以看做是例3中①的推广, 由②及 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$ 易得

$$\sum_{k=0}^n C_n^k \cos^2 \frac{k}{2n} \pi = 2^{n-1} \quad (3)$$

例5 若 $A_k = \sin \frac{k}{n} \pi, B_k = a_k, \{a_k\}$ 为等差数列.

因为

$$\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = (\sin \frac{n}{2} x \sin \frac{n+1}{2} x) / \sin \frac{x}{2}$$

所以 $S = \sum_{k=0}^n \sin \frac{k}{n} \pi = (\sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{n+1}{2n} \pi) / \sin \frac{\pi}{2n} = \cot \frac{\pi}{2n}$

而 $2G = a_0 + a_n$, 故

$$\sum_{k=0}^n a_k \sin \frac{k}{n} \pi = \frac{1}{2} (a_0 + a_n) \cot \frac{\pi}{2n} \quad (1)$$

特别地, 当 $a_k = k$ 时

$$\sum_{k=0}^n k \sin \frac{k}{n} \pi = \frac{1}{2} n \cot \frac{\pi}{2n} \quad (2)$$

①可以看做是②的推广.

例6 若 $A_k = \sin \frac{k}{n} \pi, B_k = \sin kx \cos(n+k)x$, 则 $S = \cot \frac{\pi}{2n}, 2G = \sin nx$,

于是

$$\sum_{k=0}^n \sin \frac{k}{n} \pi \sin kx \cos(n+k)x = \frac{1}{2} \cot \frac{\pi}{2n} \sin nx \quad (1)$$

特别地, 当 $x = \frac{\pi}{n}$ 时

$$\sum_{k=0}^n \sin \frac{k}{n} \pi \sin \frac{2k}{n} \pi = 0$$

或