

弹性壳的 线性理论

黄 义 黄会荣 何芳社/著



科学出版社

www.sciencep.com

0343/56

2007

弹性壳的线性理论

黄 义 黄会荣 何芳社 著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书给出了基于一阶剪切模式的非经典弹性板壳一般理论的系统论述,内容包括:曲面理论基本知识,应力理论,应变理论,连续性方程,本构关系,变分原理,边界条件和壳体求解途径及相应的可解方程,板壳状态空间方程,旋转壳、锥壳、柱壳、球壳、扁壳及平板的基本方程及求解方法。

本书可作为高等院校力学、土木、机械和化工专业的研究生教材,也可供相关科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

弹性壳的线性理论/黄义,黄会荣,何芳社著. —北京:科学出版社,2007
ISBN 978-7-03-019107-6

I. 弹… II. ①黄…②黄…③何… III. 弹性壳体—线性 IV. 0342

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 086149 号

责任编辑:童安齐 庞海龙 / 责任校对:刘彦妮

责任印制:吕春珉 / 封面设计:耕者设计工作室

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

新蕾印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2007 年 6 月第 一 版 开本: 787×1092 1/16

2007 年 6 月第一次印刷 印张: 13 1/2

印数: 1—2 500 字数: 310 000

定价: 35.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈新欣〉)

销售部电话 010-62136131 编辑部电话 010-62137026(BA08)

前 言

在机械、航空、造船、化工、建筑等工程领域,板壳形式的薄壁构件被广泛应用,特别是在近代结构中,在要求结构具有重量轻和高强度的条件下,壳体结构自然是无可替代的首选结构形式。

复合材料的层合结构与用传统材料制造的结构的区别在于层合结构的变形和强度具有各向异性,特别是低横向剪切刚度。在这种情况下,已知的经典薄壳理论和结构计算方法不总是适宜和有效的,需要对原始状态的数学模式进行修正和重新选择。新模式要充分反映与低横向剪切刚度相关的新材料的力学行为特点,也就是说必须要计入结构的横向剪切变形效应。首先,已有的建立在基尔霍夫-拉甫假定基础上的薄壳和薄板理论没有计入横向剪切变形效应,从而高估了结构的横向剪切刚度,用这种传统理论对复合材料板壳进行计算,其计算结果与实际有较大差别。再则,由于工程技术的需要,板壳结构的厚度(相对厚度)往往超出薄壳结构应用范围对厚度的限制,这种壳往往属于中厚度范围(考虑 $\frac{h}{R}$ 量级,略去与单位1相比的 $\frac{h^2}{R^2}$ 量级),从理论和计算精度要求考虑,需要考虑结构材料的横向剪切刚度的有限性,此时应计及横向剪切变形效应。因此,不论是对复合材料板壳结构的分析和计算,还是对中厚板壳结构的合理分析,在模式中考虑横向剪切变形效应是适宜的,也就是说建立在基尔霍夫-拉甫假定基础上的无限横向剪切刚度的理论,不总是有效的,需要建立另一种模式,这就是考虑横向剪切变形效应的计算模式(称为非经典模式)。

计及横向剪切效应的计算模式已经被提出,其中包括一阶(低阶)模式和高阶模式。一阶模式虽然不满足自由表面上切应力为零的边界条件,但根据这种模式导出的基本方程比较简单且各种分量具有一定的物理意义,而高阶模式虽然并未增加基本未知量,但导出的方程中有些物理量的物理意义不明显。本书将以一阶横向剪切模式作为讨论基础,系统建立相应的基本理论。

关于一阶剪切模式,国外已有论著介绍,在国内已经出版的与板壳理论相关的教科书中也有专章或专节介绍了板的一阶剪切模式,并同时导出了相关的基本方程。但就作者所知,国内出版的相关教科书中都缺乏对基于一阶剪切模式的板壳一般理论的系统论述,而只是针对某种特殊形式的壳体给出相关方程。基于上述的原因,我们深感有必要出版一本较系统论述基于一阶剪切模式的板壳理论方面的书。本书以中厚壳一般线性理论为主线,全面讨论了应力

理论、变形理论、本构关系、变分原理和广义变分原理以及由此导出的壳体状态空间理论,系统导出位移解法和混合解法(状态空间法)相应的基本微分方程组。由于位移法在壳体组合结构的分析与计算方面有明显的优点,故本书的重点在位移解法上。全书共九章,全面讨论了中厚板壳一般理论及相应的求解方法,在已得到中厚壳理论基本方程的基础上,当采用基尔霍夫-拉甫假定时就得到经典板壳理论的基本方程,因此本书也包括了经典板壳理论的内容。由于板壳理论的内容很广泛,本书不可能包括它的全部内容,而只涉及中厚板壳和薄壳的线弹性理论的动、静力问题,且它们在相关的实际工程结构分析与计算中有着广泛应用,而对壳的稳定性和非线性问题,本书并未涉及。作者多年从事板壳理论及应用的研究,书中相当一部分内容反映了作者的研究成果,我们希望通过本书的出版,使读者能比较全面地了解板壳非经典理论的知识,并能正确地在工程实际中应用。限于作者的水平有限,书中错漏在所难免,希望读者批评指正。

在本书编写期间,西安建筑科技大学科技处以及理学院的领导给予了大力的支持,在此向他们表示深切的感谢。研究生郭春霞、曹继明为本书做了部分数值计算,绘制了相关插图,在此一并表示感谢。

目 录

前言

第一章 壳体中面的几何关系	1
1.1 曲面的曲线坐标	1
1.2 曲面上的有关曲线	7
1.3 等距曲面(平行曲面)壳体几何关系.....	10
第二章 壳体的变形理论	12
2.1 正交曲线坐标下三维弹性力学的基本方程.....	12
2.1.1 正交曲线坐标系及拉梅系数的微分关系	12
2.1.2 三维弹性体应变与位移的关系	13
2.1.3 平衡方程及边界条件	14
2.1.4 本构关系——胡克定律	14
2.2 壳体的位移和应变.....	14
2.3 变形连续性方程.....	20
2.4 壳体边界元素的变形.....	26
第三章 壳体的应力理论	29
3.1 壳体的内力和内矩.....	29
3.2 壳体的动力方程.....	31
3.3 壳斜截面上的力和力矩.....	36
3.4 应力函数.....	37
3.5 静力-几何比拟	39
第四章 壳体的弹性关系和基本定理	41
4.1 壳体的变形能.....	41
4.2 横观各向同性壳体的弹性关系.....	44
4.3 作用于壳体上力和力矩的功·功的互等定理.....	47
4.4 边界条件、解的唯一性	50
4.4.1 边界条件.....	50
4.4.2 解的唯一性	54
4.4.3 薄壳的边界条件	55
第五章 壳体变分原理	58
5.1 壳体动力学和静力学的能量原理.....	58
5.2 广义哈密顿原理和广义势能原理.....	66
5.2.1 广义哈密顿原理	66
5.2.2 广义势能原理	71
5.3 莱斯纳变分原理.....	74

5.4	边界能驻值原理	78
5.5	拉格朗日变分方程	79
5.6	壳体变分问题的直接解法	79
第六章	壳体基本方程及求解途径	82
6.1	壳体理论基本方程汇总	82
6.1.1	运动方程	82
6.1.2	几何方程	83
6.1.3	变形连续性方程	84
6.1.4	内力分量通过应力函数的表示式	86
6.1.5	本构关系	87
6.2	壳体理论基本方程求解途径	88
6.3	壳体的位移型基本方程	89
6.3.1	考虑横向剪切变形的位移型基本方程	89
6.3.2	忽略横向剪切变形——经典薄壳理论的位移方程	100
6.4	壳体状态空间法的基本方程——混合解法	109
6.4.1	考虑横向剪切变形的状态空间法基本方程	109
6.4.2	考虑横向剪切变形的旋转对称壳的状态空间法的基本方程	113
6.4.3	基于基尔霍夫-拉甫假设的薄壳状态空间法基本方程	115
6.4.4	基于基尔霍夫-拉甫假设的旋转薄壳的状态空间法的基本方程	122
第七章	平板	126
7.1	平板横向弯曲变形的的基本方程	126
7.1.1	中厚板的基本方程	126
7.1.2	薄板的基本方程	128
7.2	板的边界条件	130
7.3	中厚度板的弯曲	131
7.3.1	四边简支矩形板受横向荷载作用	131
7.3.2	圆板的轴对称弯曲	133
第八章	旋转壳理论	135
8.1	旋转壳的基本微分方程	135
8.1.1	中厚旋转壳的基本关系	135
8.1.2	中厚旋转壳的基本方程	137
8.1.3	旋转薄壳的基本方程	140
8.2	圆柱壳的基本微分方程	142
8.2.1	中厚圆柱壳的基本关系	142
8.2.2	中厚圆柱壳的基本方程	145
8.2.3	薄圆柱壳的基本方程	145
8.2.4	薄圆柱壳的求解	146
8.3	圆锥壳的基本微分方程	148
8.3.1	中厚圆锥壳的基本关系	148

8.3.2	中厚圆锥壳的基本方程	151
8.3.3	薄圆锥壳的基本方程	153
8.4	球壳振动的基本微分方程	154
8.4.1	中厚球壳的基本关系	154
8.4.2	中厚球壳的基本方程	156
8.4.3	薄球壳的基本方程	157
8.5	旋转壳的状态空间方程的求解	158
第九章	扁壳理论	163
9.1	扁壳的假定及基本关系的简化	163
9.1.1	扁壳原始假定	163
9.1.2	基本关系的简化	163
9.2	扁壳的混合型方程	166
9.3	圆柱形扁壳的基本微分方程	168
9.3.1	圆柱形中厚扁壳的基本关系	168
9.3.2	中厚圆柱扁壳的位移型方程	169
9.3.3	中厚圆柱扁壳的混合型方程	170
9.3.4	中厚圆柱扁壳位移方程的求解	171
9.3.5	中厚圆柱扁壳的动力分析	172
9.4	圆锥形扁壳的基本微分方程	178
9.4.1	圆锥形中厚扁壳的基本关系	178
9.4.2	中厚圆锥扁壳的位移型方程	180
9.4.3	中厚圆锥扁壳的混合型方程	181
9.4.4	中厚圆锥扁壳位移方程的求解	182
9.4.5	圆锥形薄扁壳的位移型方程	184
9.5	扁球壳的基本微分方程	190
9.5.1	中厚扁球壳的基本关系	190
9.5.2	中厚扁球壳的位移型方程	191
9.5.3	中厚扁球壳的混合型方程	192
9.5.4	圆底中厚扁球壳的混合解	193
9.6	矩形底中厚扁球壳位移型方程的变换及一般解	195
9.7	圆底中厚球面扁壳的极坐标方程及一般解	199
	主要参考文献	206

第一章 壳体中面的几何关系

从几何学的角度来看,壳体是由两个曲面包围而成的物体,这两个曲面间的距离与物体的其他尺寸相比很小。这两个曲面称为壳体的表面,在壳体中与两个表面等距离的点构成的曲面称为壳体的中面。自中面上任一点作中面的法线,被壳体两个表面所截得的线段长度,称壳体的厚度,通常用 h 表示。这样,壳体的几何形状只需以壳体中面和其厚度来描述。一般来说, h 是一变数。在建立壳的一般理论时,我们只限于研究等厚度的壳体。如果壳体的中面是封闭曲面,则称壳体是封闭的。在许多实际情况下,需要研究从封闭壳体中切割出来的一部分不封闭的壳体,此时壳体将由上、下表面和侧面所限制。我们将假定壳的侧表面是由垂直于中面的法线沿着中面的轮廓线移动而形成的。

这样,壳体的几何特征完全由给定的中面、周边和壳体的厚度所决定。与所用的描述壳体几何方法相应,我们将在中面上的正交坐标系中来考虑壳体,为此我们将着手考虑壳中面的几何关系。

1.1 曲面的曲线坐标

在笛卡儿坐标系 $O-xyz$ 中,一个光滑曲面由以下三个方程给定,即

$$x = x(\alpha, \beta), \quad y = y(\alpha, \beta), \quad z = z(\alpha, \beta) \quad (1.1.1)$$

式中,函数 $x=x(\alpha, \beta)$ 、 $y=y(\alpha, \beta)$ 、 $z=z(\alpha, \beta)$ 是关于参数 α, β 的可导函数。可以这样来限制参数 α, β 的变化范围,即表面上的每一个点能完全由一对数值 (α, β) 所决定。这样, α, β 称为被考虑的曲面上的曲线坐标。

在式(1.1.1)中给 β 以一系列的常数值,同时让 α 变化,就得到一族 α 的曲线族,称为 α 坐标线;类似地可以得到 β 坐标线。

式(1.1.1)的三个标量方程可以合并成一个向量式

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\alpha, \beta) \quad (1.1.2)$$

式中, $\mathbf{r}$ 为曲面上任一点的向径。向量 $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha}$ 、 $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta}$ 相应地指向 α 线和 β 线,如图 1.1 所示。引入记号

$$\left. \begin{aligned} \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} \right| &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha} \right)^2} = A \\ \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} \right| &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \beta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \beta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \beta} \right)^2} = B \end{aligned} \right\} \quad (1.1.3)$$

于是,与坐标线相切的单位向量为

$$\mathbf{e}_\alpha = \frac{1}{A} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha}, \quad \mathbf{e}_\beta = \frac{1}{B} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} \quad (1.1.4)$$

作为第三个单位向量 $\mathbf{e}_n$,选取其沿壳体中面的法线方向,它与 $\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta$ 相垂直,如图 1.1 所示。

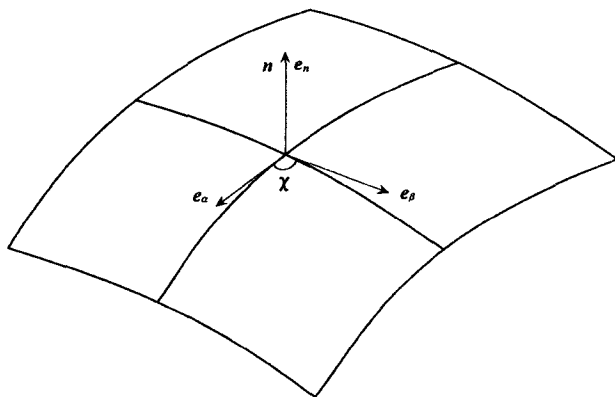


图 1.1

对于曲面上两个相邻点 (α, β) 、 $(\alpha+d\alpha, \beta+d\beta)$, 连接这两点的向量可以写成

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} d\beta \quad (1.1.5)$$

因为 $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} = AB(\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta) = AB\cos\chi$, 所以可以得到

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = A^2 d\alpha^2 + 2AB\cos\chi d\alpha d\beta + B^2 d\beta^2 \quad (1.1.6)$$

式中, χ 表示坐标线之间的夹角, 如图 1.1 所示。以后我们将考虑特殊的正交坐标系 $\left(\chi = \frac{\pi}{2}\right)$, 那么 $\cos\chi = 0$ 。

式(1.1.6)称为曲面的第一二次型。在微分几何中已证明: 当曲面被挠曲但无拉伸时, 第一二次型不变化。依次令 $d\beta=0$ 和 $d\alpha=0$ 得到

$$ds_\alpha = A d\alpha, \quad ds_\beta = B d\beta \quad (1.1.7)$$

式(1.1.7)确定了量 A 、 B 的几何意义, 通常它们被称为拉梅(Lamé)系数。拉梅系数是比例参数, 它表示坐标线的弧增量与相应曲线坐标增量之比。

对位于曲面上与任一曲线 Γ 相切的单位向量 $\mathbf{e}_t$, 如图 1.2 所示, 由式(1.1.5)得

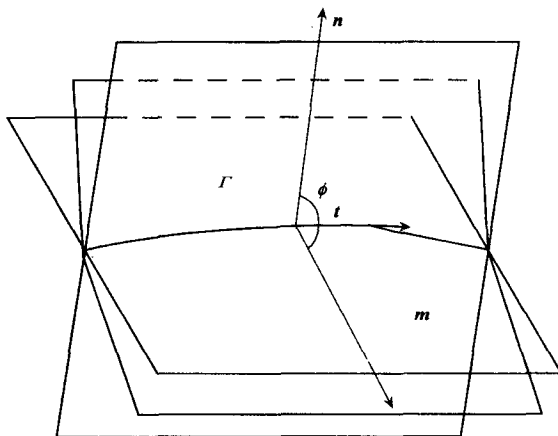


图 1.2

$$\mathbf{e}_t = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{ds} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} \frac{d\beta}{ds} \quad (1.1.8)$$

根据弗莱纳(Frenet)定理, 表面上的曲线的主法线的单位向量 $\mathbf{e}_m$ (其空间曲率是 $\frac{1}{\rho}$) 与单位切线向量 $\mathbf{e}_t$ 由以下的微分关系联系起来, 即

$$\frac{\mathbf{e}_m}{\rho} = \frac{d\mathbf{e}_t}{ds} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \alpha^2} \left(\frac{d\alpha}{ds} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \alpha \partial \beta} \frac{d\alpha}{ds} \frac{d\beta}{ds} + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \beta^2} \left(\frac{d\beta}{ds} \right)^2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} \frac{d^2 \alpha}{ds^2} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} \frac{d^2 \beta}{ds^2} \quad (1.1.9)$$

式中, s 表示弧长。把上式左右两边与单位向量 $\mathbf{e}_n$ 作标量积, 并利用关系

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} \cdot \mathbf{e}_n = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} \cdot \mathbf{e}_n = 0, \quad \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_n = \cos \phi \quad (1.1.10)$$

我们就可得到

$$\frac{\cos \phi}{\rho} = \frac{b_{\alpha\alpha} d\alpha^2 + 2b_{\alpha\beta} d\alpha d\beta + b_{\beta\beta} d\beta^2}{ds^2} \quad (1.1.11)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} b_{\alpha\alpha} &= \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \alpha^2} \cdot \mathbf{e}_n = A^2 \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{A \partial \alpha A \partial \alpha} \cdot \mathbf{e}_n \\ b_{\beta\beta} &= \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \beta^2} \cdot \mathbf{e}_n = B^2 \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{B \partial \beta B \partial \beta} \cdot \mathbf{e}_n \\ b_{\alpha\beta} &= \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \alpha \partial \beta} \cdot \mathbf{e}_n = AB \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{A \partial \alpha B \partial \beta} \cdot \mathbf{e}_n \\ &= AB \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{B \partial \beta A \partial \alpha} \cdot \mathbf{e}_n = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \beta \partial \alpha} \cdot \mathbf{e}_n = b_{\beta\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (1.1.12)$$

再引入符号

$$\frac{\cos \phi}{\rho} = -\frac{1}{R} \quad (1.1.13)$$

则式(1.1.11)就能够写成

$$-\frac{1}{R} = \frac{b_{\alpha\alpha} d\alpha^2 + 2b_{\alpha\beta} d\alpha d\beta + b_{\beta\beta} d\beta^2}{ds^2} \quad (1.1.14)$$

$\frac{1}{R}$ 称为曲面在给定方向上由量 $(d\alpha, d\beta)$ 确定的法向曲率。由式(1.1.13)和图 1.2 可以看

出: 法向曲率 $\frac{1}{R}$ 是曲线的空间曲率 $\frac{\mathbf{e}_m}{\rho}$ 在表面上所考虑点处的法线负方向上的投影, 量 R 是平面曲线的曲率半径, 该平面曲线是曲面法线在给定方向上所引的平面与曲面的交线。式(1.1.14)右边部分的分子 $b_{\alpha\alpha} d\alpha^2 + 2b_{\alpha\beta} d\alpha d\beta + b_{\beta\beta} d\beta^2$ 称为曲面的第二二次型。与第一二次型不同, 第二二次型当曲面挠曲时, 它是会变化的。这样, 第一二次型、第二二次型确定了曲面上曲线的法向曲率。

限于考虑正交坐标系, 我们总能选取坐标的方向使单位坐标向量 $(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta, \mathbf{e}_n)$ 形成右手坐标系, 则以下的式子都是正确的, 即

$$\mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{e}_\beta = \mathbf{e}_n, \quad \mathbf{e}_\beta \times \mathbf{e}_n = \mathbf{e}_\alpha, \quad \mathbf{e}_n \times \mathbf{e}_\alpha = \mathbf{e}_\beta \quad (1.1.15)$$

我们用 γ' 表示方向向量 $\mathbf{e}_\alpha$ 与 $\mathbf{e}_t$ 之间的夹角, 其正向示于图 1.3 中。

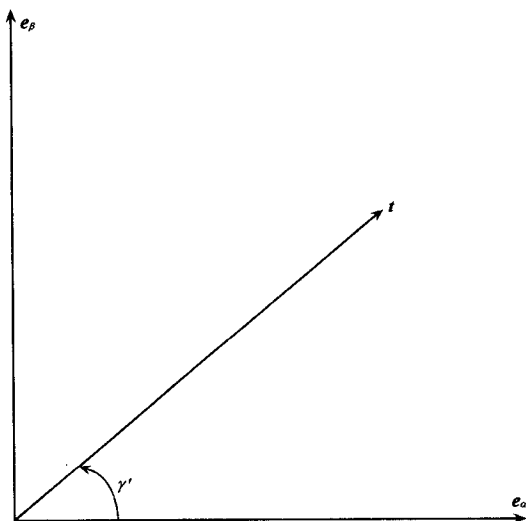


图 1.3

由图 1.3 可见

$$\frac{A d\alpha}{ds} = \frac{ds_\alpha}{ds} = \cos\gamma', \quad \frac{B d\beta}{ds} = \frac{ds_\beta}{ds} = \sin\gamma' \quad (1.1.16)$$

式中, s_α 和 s_β 分别为沿 e_α 和 e_β 方向的弧长。再则, 利用恒等式

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} \cdot \mathbf{e}_n \right) = 0 = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \alpha^2} \cdot \mathbf{e}_n + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial \alpha} \quad (1.1.17)$$

则式(1.1.12)还可以写成

$$\left. \begin{aligned} b_{\alpha\alpha} &= -\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial \alpha} = -A \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial \alpha} \cdot \mathbf{e}_\alpha \\ b_{\beta\beta} &= -\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial \beta} = -B \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial \beta} \cdot \mathbf{e}_\beta \\ b_{\alpha\beta} &= b_{\beta\alpha} = -A \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial \beta} \cdot \mathbf{e}_\alpha = -B \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial \alpha} \cdot \mathbf{e}_\beta \end{aligned} \right\} \quad (1.1.18)$$

利用式(1.1.16), 则式(1.1.14)变为

$$-\frac{1}{R} = \frac{b_{\alpha\alpha}}{A^2} \cos^2\gamma' + \frac{b_{\alpha\beta}}{AB} 2\sin\gamma' \cos\gamma' + \frac{b_{\beta\beta}}{B^2} \sin^2\gamma' \quad (1.1.19)$$

依次令 $\gamma' = 0$ 和 $\gamma' = \frac{\pi}{2}$, 可以得到

$$b_{\alpha\alpha} = -\frac{A^2}{R_\alpha}, \quad b_{\beta\beta} = -\frac{B^2}{R_\beta} \quad (1.1.20a, b)$$

再引进一个记号 $R_{\alpha\beta}$, 并令

$$b_{\alpha\beta} = \frac{AB}{R_{\alpha\beta}} \quad (1.1.20c)$$

则式(1.1.19)可写成

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\gamma'}{R_\alpha} - \frac{2\sin\gamma' \cos\gamma'}{R_{\alpha\beta}} + \frac{\sin^2\gamma'}{R_\beta} \quad (1.1.21)$$

由此可见,量 $\frac{1}{R_\alpha}$ 、 $\frac{1}{R_\beta}$ 分别是曲面沿着坐标线方向的法向曲率, $\frac{1}{R_{\alpha\beta}}$ 为扭曲率, $R_{\alpha\beta}$ 为扭曲率半径。现在借助式(1.1.18)和式(1.1.20)可以得到

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R_\alpha} &= -\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{A \partial \alpha A \partial \alpha} \cdot \mathbf{e}_n = \frac{1}{A} \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial \alpha} \cdot \mathbf{e}_\alpha \\ \frac{1}{R_\beta} &= -\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{B \partial \beta B \partial \beta} \cdot \mathbf{e}_n = \frac{1}{B} \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial \beta} \cdot \mathbf{e}_\beta \\ \frac{1}{R_{\alpha\beta}} &= \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{A \partial \alpha B \partial \beta} \cdot \mathbf{e}_n = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{B \partial \beta A \partial \alpha} \cdot \mathbf{e}_n \\ &= -\frac{1}{B} \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial \beta} \cdot \mathbf{e}_\alpha = -\frac{1}{A} \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial \alpha} \cdot \mathbf{e}_\beta \end{aligned} \right\} \quad (1.1.22)$$

式(1.1.22)确定了过曲面上的点而引的曲线的法向曲率。为求法向曲率具有极值的方向,必须求函数

$$f(\gamma') = \frac{\cos^2 \gamma'}{R_\alpha} - \frac{2 \sin \gamma' \cos \gamma'}{R_{\alpha\beta}} + \frac{\sin^2 \gamma'}{R_\beta} \quad (1.1.23)$$

的极值。令其对 γ' 的一阶导数为零,有

$$\frac{df(\gamma')}{d\gamma'} = -2 \sin \gamma' \cos \gamma' \left(\frac{1}{R_\alpha} - \frac{1}{R_\beta} \right) - 2(\cos^2 \gamma' - \sin^2 \gamma') \frac{1}{R_{\alpha\beta}} = 0 \quad (1.1.24)$$

由此可得

$$\tan 2\gamma' = \frac{-\frac{2}{R_{\alpha\beta}}}{\frac{1}{R_\alpha} - \frac{1}{R_\beta}} \quad (1.1.25)$$

式(1.1.25)确定了两个相互正交的方向($d\alpha_1, d\alpha_2$)。

可以证明,对于极值方向(即曲率具有极值的方向), $\frac{1}{R_{\alpha_1 \alpha_2}} = 0$ 。其实,把 α, β 依次用 α_1, α_2 代替,则 $\gamma' = 0$,于是由式(1.1.25)得

$$\frac{1}{R_{\alpha_1 \alpha_2}} = 0 \quad (1.1.26)$$

这就证明了,对于极值方向, $\frac{1}{R_{\alpha_1 \alpha_2}}$ 等于零。被找到的这两个方向称为主方向,而 $R_1 = R_{\alpha_1}, R_2 = R_{\alpha_2}$ 相应地称为主曲率半径。在曲面上的曲线,当其上的每点的切线都与主方向重合,该曲线就称为主曲率线,简称曲率线。

在以后的章节中,我们所考虑的曲线坐标线网都是曲率线网。同时,当由任意正交坐标过渡到曲率线坐标系时,我们用 α_1, α_2 代替 α, β ,用 A_1, A_2 代替 A, B 。

在曲率线关系式(1.1.21)中,此时就可以采用更简单的形式

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2 \gamma'}{R_1} + \frac{\sin^2 \gamma'}{R_2} \quad (1.1.27)$$

在曲线坐标系中,坐标单位矢($\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta$)就不能再认为是常量(它们的方向在不断变化)。为了得到各种微分关系,必须建立单位向量的微分法则。

由于正交性及矢量是单位矢量,那么首先就有

$$\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_n = \mathbf{e}_\beta \cdot \mathbf{e}_n = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial \alpha} \cdot \mathbf{e}_\alpha = \frac{1}{2} \frac{\partial(\mathbf{e}_\alpha^2)}{\partial \alpha} = \frac{1}{2} \frac{\partial(1)}{\partial \alpha} = 0 \quad (1.1.28)$$

类似地也就有

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial \beta} \cdot \mathbf{e}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial \alpha} \cdot \mathbf{e}_\beta = \frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial \beta} \cdot \mathbf{e}_\beta = \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial \alpha} \cdot \mathbf{e}_n = \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial \beta} \cdot \mathbf{e}_n = 0 \quad (1.1.29)$$

再则,以下的恒等式是显然的,即

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \beta \partial \alpha} \quad (1.1.30)$$

借助于式(1.1.4),则

$$\frac{\partial A \mathbf{e}_\alpha}{\partial \beta} = \frac{\partial B \mathbf{e}_\beta}{\partial \alpha} \quad (1.1.31)$$

展开以后,我们就可以得到

$$A \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta} \mathbf{e}_\alpha = B \frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial \alpha} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} \mathbf{e}_\beta \quad (1.1.32)$$

将上式两边分别与 $\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta$ 作标量积,我们就引出关系式

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial \alpha} \cdot \mathbf{e}_\alpha = \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial \beta} \cdot \mathbf{e}_\beta = \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \quad (1.1.33)$$

由此可以得到

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial \alpha} \cdot \mathbf{e}_\beta = \frac{\partial(\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta)}{\partial \alpha} - \frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial \alpha} \cdot \mathbf{e}_\alpha = - \frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial \alpha} \cdot \mathbf{e}_\alpha = - \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \quad (1.1.34a)$$

与此类似

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial \beta} \cdot \mathbf{e}_\alpha = - \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \quad (1.1.34b)$$

由式(1.1.22)还可以引导出等式

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial \alpha} \cdot \mathbf{e}_\alpha &= \frac{A}{R_\alpha}, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial \alpha} \cdot \mathbf{e}_\beta = - \frac{A}{R_{\alpha\beta}} \\ \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial \beta} \cdot \mathbf{e}_\alpha &= - \frac{B}{R_{\alpha\beta}}, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial \beta} \cdot \mathbf{e}_\beta = \frac{B}{R_\beta} \end{aligned} \right\} \quad (1.1.35)$$

这样,就可以得到单位矢量对于坐标的导数的投影。以上各式对求向量的微分是必需的。这里我们把这些表达式写成向量形式

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{A} \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial \alpha} &= - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \mathbf{e}_\beta - \frac{1}{R_\alpha} \mathbf{e}_n \\ \frac{1}{B} \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial \beta} &= \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \mathbf{e}_\beta + \frac{1}{R_{\alpha\beta}} \mathbf{e}_n \\ \frac{1}{A} \frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial \alpha} &= \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \mathbf{e}_\alpha + \frac{1}{R_{\alpha\beta}} \mathbf{e}_n \\ \frac{1}{B} \frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial \beta} &= - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \mathbf{e}_\alpha - \frac{1}{R_\beta} \mathbf{e}_n \\ \frac{1}{A} \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial \alpha} &= \frac{1}{R_\alpha} \mathbf{e}_\alpha - \frac{1}{R_{\alpha\beta}} \mathbf{e}_\beta \\ \frac{1}{B} \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial \beta} &= - \frac{1}{R_{\alpha\beta}} \mathbf{e}_\alpha + \frac{1}{R_\beta} \mathbf{e}_\beta \end{aligned} \right\} \quad (1.1.36)$$

在以曲率线作为坐标线的情况下,以上的微分规则还可以写成($e_{\alpha_1}=e_1, e_{\alpha_2}=e_2$)

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{A_1} \frac{\partial e_1}{\partial \alpha_1} &= -\frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} e_2 - \frac{1}{R_1} e_n \\ \frac{1}{A_2} \frac{\partial e_1}{\partial \alpha_2} &= \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} e_2 \\ \frac{1}{A_1} \frac{\partial e_2}{\partial \alpha_1} &= \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} e_1 \\ \frac{1}{A_2} \frac{\partial e_2}{\partial \alpha_2} &= -\frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} e_1 - \frac{1}{R_2} e_n \\ \frac{1}{A_1} \frac{\partial e_n}{\partial \alpha_1} &= \frac{1}{R_1} e_1 \\ \frac{1}{A_2} \frac{\partial e_n}{\partial \alpha_2} &= \frac{1}{R_2} e_2 \end{aligned} \right\} \quad (1.1.37)$$

比较式(1.1.36)和式(1.1.37)中的第五个、第六个关系式,就可以得到很有趣的性质:曲面法线单位向量沿曲率线弧长的导数方向与切线方向相重合。这个性质在曲面理论中称为罗德里格(Rodrigues)定理,并由此得出了一种在曲面上寻找曲率线的几何方法。

量 A_1, A_2, R_1, R_2 不能被任意给定,它们必须满足高斯-科达齐(Gauss-Codazzi)条件。利用恒等式

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 e_\alpha}{\partial \alpha \partial \beta} &= \frac{\partial^2 e_\alpha}{\partial \beta \partial \alpha} \\ \frac{\partial^2 e_\beta}{\partial \alpha \partial \beta} &= \frac{\partial^2 e_\beta}{\partial \beta \partial \alpha} \\ \frac{\partial^2 e_n}{\partial \alpha \partial \beta} &= \frac{\partial^2 e_n}{\partial \beta \partial \alpha} \end{aligned} \right\} \quad (1.1.38)$$

我们就可以导出以上的高斯-科达齐条件。其实只需利用单位向量的微分法则式(1.1.37)并且消去单位向量的导数,就得到一个高斯关系

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right) = -\frac{A_1 A_2}{R_1 R_2} \quad (1.1.39a)$$

和两个科达齐关系

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{A_2}{R_2} \right) = \frac{1}{R_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}, \quad \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{A_1}{R_1} \right) = \frac{1}{R_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \quad (1.1.39b, c)$$

根据曲面理论,只要给出满足高斯-科达齐条件的4个量 A_1, A_2, R_1, R_2 ,就可以完全确定这个曲面。

1.2 曲面上的有关曲线

为了表示曲线边界的边界条件和边界变形,考虑与曲面坐标线相关的另一族正交曲线,设在曲面上有另一组正交曲线。现在考虑曲面上的这组曲线族中的某条曲线 Γ ,如图1.4所示。与曲线族相关联的单位向量是(e_ν, e_t, e_n) (图1.4),由于它们的长度是1且是正交的,则

$$e_\nu^2 = e_t^2 = e_n^2 = 1, \quad e_t \cdot e_n = e_t \cdot e_\nu = e_\nu \cdot e_n = 0 \quad (1.2.1)$$

$$e_\nu \times e_t = e_n, \quad e_t \times e_n = e_\nu, \quad e_n \times e_\nu = e_t \quad (1.2.2)$$

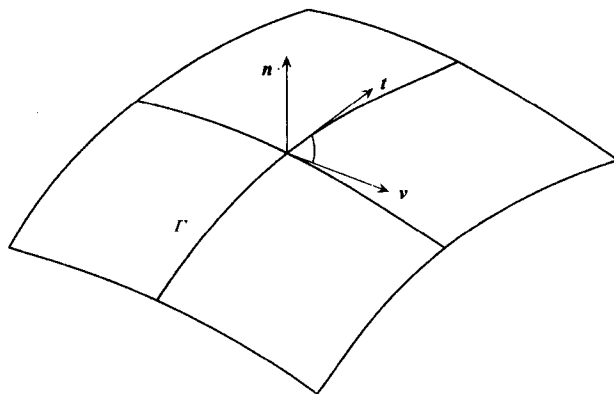


图 1.4

我们把单位向量沿 Γ 的导数表示成单位向量的展开形式, 即

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{e}_t}{ds_t} &= \alpha_{11}\mathbf{e}_t + \alpha_{12}\mathbf{e}_v + \alpha_{13}\mathbf{e}_n \\ \frac{d\mathbf{e}_v}{ds_t} &= \alpha_{21}\mathbf{e}_t + \alpha_{22}\mathbf{e}_v + \alpha_{23}\mathbf{e}_n \\ \frac{d\mathbf{e}_n}{ds_t} &= \alpha_{31}\mathbf{e}_t + \alpha_{32}\mathbf{e}_v + \alpha_{33}\mathbf{e}_n \end{aligned} \right\} \quad (1.2.3)$$

式(1.2.3)中的 s_t 和式(1.2.6)中的 s_v 分别为沿 $\mathbf{e}_t$ 和 $\mathbf{e}_v$ 方向的弧长。

由于

$$\alpha_{11} = \mathbf{e}_t \cdot \frac{d\mathbf{e}_t}{ds_t} = \frac{1}{2} \frac{d(\mathbf{e}_t^2)}{ds_t} = \frac{1}{2} \frac{d(1)}{ds_t} = 0 \quad (1.2.4a)$$

再则

$$\alpha_{12} = \mathbf{e}_v \cdot \frac{d\mathbf{e}_t}{ds_t} = \frac{d(\mathbf{e}_t \cdot \mathbf{e}_v)}{ds_t} - \frac{d\mathbf{e}_v}{ds_t} \cdot \mathbf{e}_t = - \frac{d\mathbf{e}_v}{ds_t} \cdot \mathbf{e}_t = -\alpha_{21} \quad (1.2.4b)$$

同理有

$$\alpha_{22} = \alpha_{33} = 0, \quad \alpha_{13} = -\alpha_{31}, \quad \alpha_{23} = -\alpha_{32} \quad (1.2.4c, d, e)$$

考虑到以上所得到的关系式(1.2.4), 式(1.2.3)能写成

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{e}_t}{ds_t} &= \sigma_t \mathbf{e}_n - \kappa_t \mathbf{e}_v, & \sigma_t &= \mathbf{e}_n \cdot \frac{d\mathbf{e}_t}{ds_t} = -\mathbf{e}_t \cdot \frac{d\mathbf{e}_n}{ds_t} \\ \frac{d\mathbf{e}_v}{ds_t} &= \kappa_t \mathbf{e}_t - \tau_t \mathbf{e}_n, & \tau_t &= \mathbf{e}_v \cdot \frac{d\mathbf{e}_n}{ds_t} = -\mathbf{e}_n \cdot \frac{d\mathbf{e}_v}{ds_t} \\ \frac{d\mathbf{e}_n}{ds_t} &= \tau_t \mathbf{e}_v - \sigma_t \mathbf{e}_t, & \kappa_t &= \mathbf{e}_t \cdot \frac{d\mathbf{e}_v}{ds_t} = -\mathbf{e}_v \cdot \frac{d\mathbf{e}_t}{ds_t} \end{aligned} \right\} \quad (1.2.5)$$

同样, 按与 Γ 相正交的方向微分可以得到

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{e}_t}{ds_v} &= \kappa_v \mathbf{e}_v - \tau_v \mathbf{e}_n, & \sigma_v &= \mathbf{e}_n \cdot \frac{d\mathbf{e}_v}{ds_v} = -\mathbf{e}_v \cdot \frac{d\mathbf{e}_n}{ds_v} \\ \frac{d\mathbf{e}_v}{ds_v} &= \sigma_v \mathbf{e}_n - \kappa_v \mathbf{e}_t, & \tau_v &= \mathbf{e}_t \cdot \frac{d\mathbf{e}_n}{ds_v} = -\mathbf{e}_n \cdot \frac{d\mathbf{e}_t}{ds_v} \\ \frac{d\mathbf{e}_n}{ds_v} &= \tau_v \mathbf{e}_t - \sigma_v \mathbf{e}_v, & \kappa_v &= \mathbf{e}_v \cdot \frac{d\mathbf{e}_t}{ds_v} = -\mathbf{e}_t \cdot \frac{d\mathbf{e}_v}{ds_v} \end{aligned} \right\} \quad (1.2.6)$$

以上的 σ 称为法向曲率, κ 称为测地曲率, 而 τ 称为测地极曲率。

用 γ 角表示线 α 与曲线 Γ 的法线之间的夹角, 则由图 1.5 容易建立以下关系

$$\left. \begin{aligned} e_\nu &= \cos\gamma e_1 + \sin\gamma e_2 \\ e_t &= -\sin\gamma e_1 + \cos\gamma e_2 \end{aligned} \right\} \quad (1.2.7)$$

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= \cos\gamma e_\nu - \sin\gamma e_t \\ e_2 &= \sin\gamma e_\nu + \cos\gamma e_t \end{aligned} \right\} \quad (1.2.8)$$

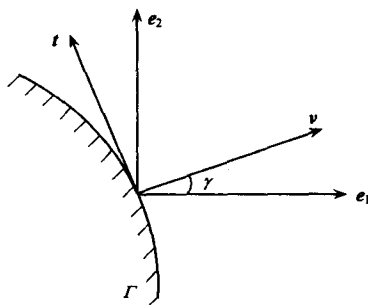


图 1.5

在式(1.2.5)和式(1.2.6)中, 把单位向量 e_t, e_ν 用式(1.2.7)代替, 然后进行微分, 得

$$\frac{d}{ds_t} = -\frac{\sin\gamma}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + \frac{\cos\gamma}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \quad (1.2.9)$$

$$\frac{d}{ds_\nu} = \frac{\cos\gamma}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + \frac{\sin\gamma}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \quad (1.2.10)$$

在式(1.2.9)和式(1.2.10)中, 把向量 e_1 和 e_2 用式(1.2.8)代替并比较式(1.2.5)和式(1.2.6)左右两边, 得

$$\left. \begin{aligned} -\sigma_t &= \left(\frac{\sin^2\gamma}{R_1} + \frac{\cos^2\gamma}{R_2} \right) = \frac{1}{R_t} \\ -\sigma_\nu &= \left(\frac{\cos^2\gamma}{R_1} + \frac{\sin^2\gamma}{R_2} \right) = \frac{1}{R_\nu} \\ \tau_t = \tau_\nu &= -\sin\gamma \cos\gamma \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = -\frac{1}{R_\pi} \\ \kappa_t &= \frac{d\gamma}{ds_t} + \frac{\cos\gamma}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\sin\gamma}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \\ \kappa_\nu &= -\frac{d\gamma}{ds_\nu} - \frac{\sin\gamma}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\cos\gamma}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \end{aligned} \right\} \quad (1.2.11)$$

可以看出, 式(1.1.27)中的量 $\frac{1}{R_t}$ 和 $\frac{1}{R_\nu}$ 是曲面相应地在曲线 Γ 的切向和法向的法曲率。若引用新的记号, 则式(1.2.5)和式(1.2.6)可写成

$$\left. \begin{aligned} \frac{de_t}{ds_t} &= -\kappa_t e_\nu - \frac{1}{R_t} e_n \\ \frac{de_\nu}{ds_t} &= \kappa_t e_t + \frac{1}{R_\pi} e_n \\ \frac{de_n}{ds_t} &= \frac{1}{R_t} e_t - \frac{1}{R_\pi} e_\nu \end{aligned} \right\} \quad (1.2.12)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{de_t}{ds_\nu} &= \frac{1}{R_t} e_t - \frac{1}{R_\pi} e_\nu \\ \frac{de_\nu}{ds_\nu} &= -\kappa_\nu e_t - \frac{1}{R_\nu} e_n \\ \frac{de_n}{ds_\nu} &= -\frac{1}{R_\pi} e_t + \frac{1}{R_\nu} e_\nu \end{aligned} \right\} \quad (1.2.13)$$