高中数学竞赛专题讲座

丛书策划 李胜宏

丛书主编 陶平生 苏建一

刘康宁 边红平

HANSHU YU HANSHU FANGCHENG

函数与函数方程

本书主编 黄军华

浙江大学出版社

高中数学竞赛专题讲座

函数与函数方程

本书主编　黄军华

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学竞赛专题讲座. 函数与函数方程 / 陶平生等主编. —杭州：浙江大学出版社，2007.4
ISBN 978-7-308-05236-8

Ⅰ.高… Ⅱ.陶… Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料
Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 039720 号

函数与函数方程

本书主编 黄军华

责任编辑 吴 慧 杨晓鸣

出版发行 浙江大学出版社

(杭州天目山路 148 号 邮政编码 310028)

(E-mail: zupress@mail.hz.zj.cn)

(网址: http://www.zjupress.com)

排　　版 浙江大学出版社电脑排版中心

印　　刷 杭州浙大同力教育彩印有限公司

开　　本 787mm×960mm 1/16

印　　张 9.75

印　　数 00001—10000

字　　数 186 千

版 印 次 2007 年 4 月第 1 版 2007 年 4 月第 1 次印刷

书　　号 ISBN 978-7-308-05236-8

定　　价 13.00 元

丛书编委会

编写说明

影响最大、级别最高的中学生"国际数学奥林匹克"(简称IMO)由来已久,自第1届IMO于1959年在罗马尼亚举行以来,有近60年的历史,其影响越来越广泛。在国际数学奥林匹克的推动下,世界各地的数学竞赛活动如火如荼。目前,我国数学竞赛逐步形成了从全国联合竞赛、全国中学生数学冬令营到国家集训队一个完整的竞赛选拔体系。

数学竞赛作为一项智力活动,吸引了无数数学爱好者积极参与,也为那些对数学有浓厚兴趣和有数学天赋的学生提供一个展示自我的平台,是发现和培养数学人才的一条有效渠道。我们欣喜地看到,通过这项活动,发现了一批数学苗子,培养了一批数学人才。许多参与竞赛的优秀选手后来都成了杰出的数学家。

总体看来,我国的数学竞赛体制日趋完善,它的一些功能和作用也日益凸显。随着高校招生制度的改革,各种学科竞赛,尤其是数学竞赛的选拔功能越来越被广大高校所认可。事实上,学科竞赛已经成为高校自主招生和选拔人才的重要途径之一。

我们本着为数学竞赛的普及、提高做点有益事情的愿望,在全国范围内组织一批长期从事数学竞赛且做出杰出成绩的一线专家编写了一套"高中数学竞赛专题讲座丛书"。丛书包括《初等数论》、《函数与函数方程》、《复数与多项式》、《不等式》、《组合问题》、《排列组合与概率》、《数列与归纳法》、《集合与简易逻辑》、《三角函数》、《立体几何》、《平面几何》、《解析几何》和《数学结构思想及解题方法》13种。

丛书的起点是高中阶段学生必须掌握的数学基本知识和全国数学竞赛大纲要求的一些基本数学思想、方法,凡是对数学爱好的高中学生都有能力阅读。丛书的特点是:

1. 充分吸收了世界各地的优秀数学竞赛试题，通过对典型例题的解剖，传授数学思想方法，侧重培养学生的逻辑思维能力，不唯解题而解题；

2. 本着少而精的原则选择材料，不搞题海战本，不追求大而全，而是以点带面，举一反三；

3. 以数学修养和能力培养为立意，通过深刻剖析问题的数学背景，挖掘数学内涵，培养学生的数学品格和解决实际问题的能力；

4. 在注重基础知识训练同时，有适当程度的拔高，对参加冬令营甚至是更高层次的竞赛都有一定的指导作用和参考价值。

丛书由浙江大学数学系教授、博士生导师、全国数学奥林匹克竞赛领队李胜宏策划；丛书由陶平生、苏建一、刘康宁、边红平主编；参加编写的成员是：陶平生、苏建一、刘康宁、边红平、黄军华、王建中、岑爱国、韦吉珠、张 雷、王俊明、李世杰、沈虎跃、斯理炯、虞金龙、马洪炎。

鉴于我们的本平有限，书中的不妥之处敬请读者批评指正。

目 录

第一讲 函数的基本概念

“函数”的概念最早是由德国数学家莱布尼茨在1692年的一篇论文中提出的，表示函数的记号 $f(x)$ 是瑞士数学家欧拉于1734年引进的．在中国，函数一词最早出现在1859年李善兰和伟烈亚力合译的《代微积拾级》一书中．

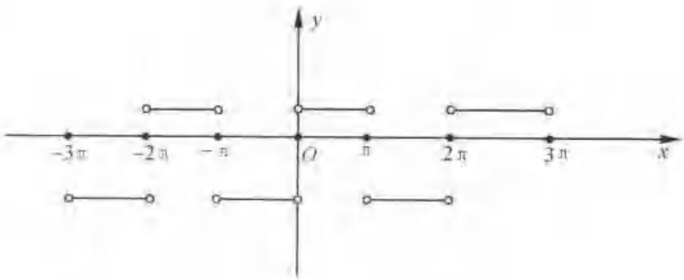
函数的定义伴随着数学的发展也在不断地变化与改进．欧拉曾经把函数定义为“在 xOy 平面上徒手画出来的曲线所表示的 y 与 x 的关系”．随后他又给出了另一定义：“如果某些量以如下方式依赖于另一些量，即当后者变化时，前者本身也发生变化，则称前一些量是后一些量的函数．”后来傅里叶、柯西、狄利克来和黎曼都给函数下过不同的定义．其中，傅里叶对函数的发展贡献最为突出．他曾指出：任何定义在区间 $(-\pi,\pi)$ 上的函数都能表示为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

的形式．这样，一个式子表示的函数可以是一个不连续的曲线，如

$$y=\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\cdots$$

其图象为



甚至狄利克来还给出了一个不能作出图形的函数,即狄利克来函数:

$$f(x)=\begin{cases}1, x \text{ 为有理数} \\ 0, x \text{ 为无理数}\end{cases}$$

傅里叶的工作把函数的研究范围扩展了.这些扩展带来了更广泛意义下的函数的连续性、可微性、可积性的讨论,同时也启发柯西在1821年的《分析教程》中给出了与我们现在中学课本中的函数定义非常相近的一个定义:"在某些变数间存在一定的关系,当一经给定其中某一变数之值,其他变数之值亦可随之而确定时,则将最初的变数称之为'自变数',其他各变数则称之为函数."

19世纪末,随着集合论的建立,函数概念中关于变量的条件进一步放宽.这时,变量的概念完全被集合的元素所取代.

知识点金

函数的定义:设 A、B 是两个非空的数集,如果存在对应法则 f 满足:对于 A 中的任何一个元素,在 B 中都有唯一确定的元素与之对应,则称 f 是 A 到 B 的一个函数.

A 称为函数 f 的定义域,而把 $C=\{y \mid y=f(x), x\in A\}$ 称为函数 $f(x)$ 的值域,$C\subseteq B$.

对于映射 $f: A\to B$,若对任意 $x_1, x_2\in A$,当 $x_1\neq x_2$ 时,有 $f(x_1)\neq f(x_2)$,则称映射 f 为单射;若 B 中的每一个元素都有原象,则称 f 为满射;若 f 既是单射又是满射,则称 f 为双射(一一映射).

若函数 $f: A\to B$ 是双射,则其逆映射 $f^{-1}: B\to A$ 所确定的函数 $x=f^{-1}(y)$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的反函数,记为 $y=f^{-1}(x)$.函数与其反函数的定义域与值域是互换的.

例题精析

例1 (全国高中数学联赛)已知不等式 $\sin^2 x+a\cos x+a^2\geqslant 1+\cos x$ 对一切 $x\in \mathbf{R}$ 恒成立,求 a 的取值范围.

分析 因为 $\sin^2 x=1-\cos^2 x$,原问题可转化为在闭区间上的二次函数问题.

解 原不等式可化为

$$\left(\cos x-\frac{a-1}{2}\right)^2\leqslant a^2+\frac{(a-1)^2}{4}.$$

因为 $-1\leqslant\cos x\leqslant 1$, $a<0$, $\frac{a-1}{2}<0$,

所以当 $\cos x=1$ 时，函数 $y=\left(\cos x-\frac{a-1}{2}\right)^2$ 有最大值 $\left(1-\frac{a-1}{2}\right)^2$，

从而有 $\left(1-\frac{a-1}{2}\right)^2\leqslant a^2+\frac{(a-1)^2}{4}$.

整理，得 $a^2+a-2\geqslant 0$，

所以 $a\leqslant -2$.

例 2 已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $\left[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$，求函数 $g(x)=f(ax)+f\left(\frac{x}{a}\right)$ 的定义域（其中 $a>0$）.

分析 现已知函数的定义域，而求复合函数的定义域主要是依据以下两点：①求函数 $f(x)$ 的定义域是求自变量 x 的取值范围. ②在对应法则 f 之下，若复合函数的中间变量的取值范围相同，如 $f(\varphi(x))$ 与 $f(g(x))$，则 $\varphi(x)$ 与 $g(x)$ 的取值范围相同.

解 由上面的分析知，$g(x)$ 的定义域为下述不等式组的解集：

$$\begin{cases}-\frac{1}{2}\leqslant ax\leqslant\frac{3}{2},\\ -\frac{1}{2}\leqslant\frac{x}{a}\leqslant\frac{3}{2},\end{cases}$$

即 $$\begin{cases}-\frac{1}{2a}\leqslant x\leqslant\frac{3}{2a},\\ -\frac{a}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3a}{2}.\end{cases}$$

当 $a\geqslant 1$ 时，$-\frac{a}{2}\leqslant-\frac{1}{2a}$，$\frac{3}{2a}\leqslant\frac{3a}{2}$，

所以定义域为 $\left[-\frac{1}{2a},\frac{3}{2a}\right]$；

当 $0<a<1$ 时，$-\frac{1}{2a}<-\frac{a}{2}$，$\frac{3a}{2}<\frac{3}{2a}$，

所以定义域为 $\left[-\frac{a}{2},\frac{3a}{2}\right]$.

例 3 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，$f(1)=1$，且对任意 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x+5)\geqslant f(x)+5$，$f(x+1)\leqslant f(x)+1$. 若 $g(x)=f(x)+1-x$，求 $g(2002)$.

解 由 $g(x)=f(x)+1-x$，得 $f(x)=g(x)+x-1$.

所以 $g(x+5)+x+5-1\geqslant g(x)+(x-1)+5$，

$g(x+1)+(x+1)-1\leqslant g(x)+(x-1)+1$，

即 $g(x+5)\geqslant g(x)$，$g(x+1)\leqslant g(x)$.

所以 $g(x)\leqslant g(x+5)\leqslant g(x+4)\leqslant g(x+3)\leqslant g(x+2)\leqslant g(x+1)\leqslant g(x)$.

所以 $g(x+1)=g(x)$.

这说明 $g(x)$ 是一个以 1 为周期的函数. 又 $g(1)=1$,故 $g(2002)=1$.

例 4 已知函数 $f(x)=\log_x(x+1)$,$x\in(1,+\infty)$,试比较 $f(x)$,$f(x+1)$ 的大小.

分析 $\log_x(x+1)$ 与 $\log_{(x+1)}(x+2)$ 的大小不能直接观察出来,我们可以考虑作差.

解 $\log_x(x+1)-\log_{(x+1)}(x+2)$

$$=\frac{\lg(x+1)}{\lg x}-\frac{\lg(x+2)}{\lg(x+1)}=\frac{\lg^2(x+1)-\lg x\cdot\lg(x+2)}{\lg x\cdot\lg(x+1)}.$$

因为 $\lg x\cdot\lg(x+2)<\left(\frac{\lg x+\lg(x+2)}{2}\right)^2=\left(\frac{\lg(x^2+2x)}{2}\right)^2$

$$<\left(\frac{\lg(x+1)^2}{2}\right)^2=\lg^2(x+1),$$

又 $\lg x>0$,$\lg(x+2)>0$,

所以 $f(x)>f(x+1)$.

例 5 设 $f(x)=x^n+ax^2+bx+c$,n 为自然数,已知 $f(-1)=0$,$f(1)=-6$,$f(2)=-9$,$f(3)=-4$,$f(6)=119$,求 $f(x)$.

解 由题设有

$$\begin{cases}f(-1)=(-1)^n+a-b+c=0,\\ f(1)=1+a+b+c=-6,\\ f(2)=2^n+4a+2b+c=-9,\\ f(3)=3^n+9a+3b+c=-4,\\ f(6)=2^n\cdot3^n+36a+6b+c=119.\end{cases}$$

即:
$$\begin{cases}a-b+c=-(-1)^n, & (1)\\ a+b+c=-7, & (2)\\ 4a+2b+c=-9-2^n, & (3)\\ 9a+3b+c=-4-3^n, & (4)\\ 36a+6b+c=119-2^n\cdot3^n. & (5)\end{cases}$$

所以
$$\begin{cases}a=\frac{1}{6}[3-(-1)^n-2\cdot2^n],\\ b=\frac{1}{2}[(-1)^n-7],\\ c=-4-\frac{1}{3}[(-1)^n-2^n].\end{cases}$$

①当 n 为奇数时,

$$\begin{cases} a=\dfrac{1}{3}(2-2^n), \\ b=-4, \\ c=\dfrac{1}{3}(-11+2^n). \end{cases}$$

将上列各式的值代入(4)、(5)得

$$3^{n-1}-8\cdot 2^n-17=0, \tag{6}$$

$$2^n\cdot 3^{n-1}-35\cdot 2^n-368=0, \tag{7}$$

(6)代入(7)消去 3^{n-1}，得

$$4\cdot(2^n)^2-9\cdot 2^n-184=0.$$

解得 $n=3$，从而 $a=-2,b=-4,c=-1$，故得

$$f(x)=x^4-2x^2-4x-1.$$

②当 n 为偶数时，$a=\dfrac{1-2^n}{3},b=-3,c=\dfrac{-13+2^n}{3}$，同①可得方程

$$2\cdot(2^n)^2-4\cdot 2^n-97=0.$$

这时无整数解 n，故

$$f(x)=x^4-2x^2-4x-1.$$

例 6 设有函数

$$f(x)=\sin(x+a_1)+\frac{1}{1\times 2}\sin(x+a_2)+\cdots+\frac{1}{(n-1)\times n}\sin(x+a_n),$$

其中，$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为常数. 证明：

(1)至少有一个实数 x_0，使 $f(x_0)\neq 0$；

(2)如果 $f(x_1)=f(x_2)=0$，则 $x_1-x_2=m\pi$(m 是一个整数).

分析 (1)注意到 $\dfrac{1}{1\times 2}\sin(x+a_2)+\cdots+\dfrac{1}{(n-1)n}\sin(x+a_n)\leqslant\dfrac{1}{1\times 2}+\cdots+\dfrac{1}{(n-1)n}=1-\dfrac{1}{n}$，可选取 x_0，使 $x=x_0$ 时，$\sin(x+a_1)=1$.

(2)将 $\sin(x+a_i)$ 展开后，将出现 $\sin x$ 与 $\cos x$，再使用辅助角公式.

解 (1)取 $x_0=\dfrac{\pi}{2}-a_1$，则

$$\begin{aligned} |f(x_0)| &= \left|1-\frac{1}{1\times 2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-a_1+a_2\right)+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}\sin\left(\frac{\pi}{2}-a_1+a_n\right)\right| \\ &\geqslant 1-\sum_{r=1}^{n-1}\frac{1}{r(r+1)}\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}-a_1+a_{r+1}\right)\right| \\ &\geqslant 1-\sum_{r=1}^{n-1}\frac{1}{r(r+1)}=\frac{1}{n}>0, \end{aligned}$$

故 $f(x_0)\neq 0$.

(2) $f(x)=\left[\sin a_1+\sum\limits_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i(i+1)}\sin a_i\right]\cos x+\left[\cos a_1+\sum\limits_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i(i+1)}\cos a_i\right]\sin x$.

令 $a=\sin a_1+\sum\limits_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i(i+1)}\sin a_i$, $b=\cos a_1+\sum\limits_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i(i+1)}\cos a_i$,

则 $f(x)=a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$. 其中 $a^2+b^2\neq 0$(不然会与(1)的结果矛盾).

$\tan\varphi=\frac{a}{b}$,其中 φ 所在象限与点 (a,b) 所在象限相同.

由 $f(x_1)=f(x_2)=0$,可得 $x_1+\varphi=k_1\pi$, $x_2+\varphi=k_2\pi$ $(k_1,k_2\in\mathbf{Z})$,

所以 $x_1-x_2=m\pi$.

例 7 设正实数 x,y 满足 $xy=1$,求函数 $f(x,y)=\frac{x+y}{[x]\cdot[y]+[x]+[y]+1}$ 的值域(这里 $[z]$ 表示不超过 z 的最大整数).

分析 虽然这个表达式是一个二元函数,由于 $y=\frac{1}{x}$,其本质还是中学阶段的一元函数,本题的关键还是对 $[x]$ 和 $[y]$ 的处理.

解 不妨设 $x\geqslant y$,则

(1)当 $x=1$ 时, $y=1$, $f(1,1)=\frac{1}{2}$;

(2)当 $x>1$ 时,令 $x=m+\lambda$,其中 $m=[x]$, $\lambda=x-[x]$,

这样 $y=\frac{1}{m+\lambda}$, $[y]=0$.

所以 $f(x,y)=\frac{m+\lambda+\frac{1}{m+\lambda}}{1+m}$.

又函数 $g(x)=x+\frac{1}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上递增,且 $0\leqslant\lambda<1$,

所以 $m+\frac{1}{m}\leqslant m+\lambda+\frac{1}{m+\lambda}<m+1+\frac{1}{m+1}$,

即 $\frac{m+\frac{1}{m}}{m+1}\leqslant f(x,y)<\frac{m+1+\frac{1}{m+1}}{1+m}$.

令 $a_m=\frac{m+\frac{1}{m}}{m+1}=\frac{m^2+1}{m^2+m}$,

$$b_m=\frac{m+1+\frac{1}{m+1}}{1+m}=1+\frac{1}{(m+1)^2},$$

则 $\quad a_{m+1}-a_m=\frac{m-2}{m(m+1)(m+2)}$.

所以，当 $m\geqslant 1$ 时，有 $a_1>a_2=a_3<a_4<\cdots$，而 $b_1>b_2>b_3>\cdots$，

于是 $x>1$ 时，$f(x,y)$ 的值域为 $[a_2,b_1)$，即 $\left[\frac{5}{6},\frac{5}{4}\right)$.

例 8 给出形如 $f(x)=ax+b$ 的非常数函数 f 所组成的非空集合 G，这里 $a,b\in\mathbf{R}$，$a\neq 0$，且 x 为实变数. 若 G 有如下性质：

①若 $f,g\in G$，则 $g*f\in G$，其中定义 $(g*f)(x)=g(f(x))$；

②若 $f\in G$，且 $f(x)=ax+b$，那么 f^{-1} 也属于 G，这里 $f^{-1}(x)=\frac{x-b}{a}$；

③对每一个 $f\in G$，有一个 x_f，使 $f(x_f)=x_f$，称 x_f 为 f 的"不动点".

则当 $b\neq 0$ 时，$f(x)$ 的不动点唯一.

证明 设 $f(x)=ax+b\in G$，若 $a\neq 1$，则 f 的"不动点" $x_f=\frac{b}{1-a}$；

若 $a=1$，则由 $ax_f+b=x_f$，得 $b=0$. 即 $f(x)=x$.

设 $g(x)=ax+b$，$\varphi(x)=a'x+b'\in G-\{x\}$，则

$x_g=\frac{b}{1-a}$，$x_\varphi=\frac{b'}{1-a'}$.

因为 $\varphi(x)=g*\varphi*g^{-1}*\varphi^{-1}(x)$

$$\begin{aligned}&=a\left[a'\left(\frac{\frac{x-b'}{a'}-b}{a}\right)+b'\right]+b\\&=x-b'-a'b+ab'+b\\&=x+(1-a)(1-a')(x_g-x_\varphi)\in G,\end{aligned}$$

由开始所证：$(1-a)(1-a')(x_g-x_\varphi)=0$.

从而 $x_g=x_\varphi$.

即 G 中一切异于 x 的函数 f，x_f 均为同一值 k，因此结论成立.

思考交流

思考题 1 函数 $f(x)$ 定义在 $[0,1]$ 上，且 $f(0)=f(1)$，若对不同的 $x_1,x_2\in[0,1]$，都

有$|f(x_1)-f(x_2)|<|x_1-x_2|$.求证:$|f(x_2)-f(x_1)|<\frac{1}{2}$.

证明 不妨设$0\leqslant x_1<x_2\leqslant 1$,则

(1)若$x_2-x_1\leqslant\frac{1}{2}$,则$|f(x_2)-f(x_1)|<|x_2-x_1|\leqslant\frac{1}{2}$;

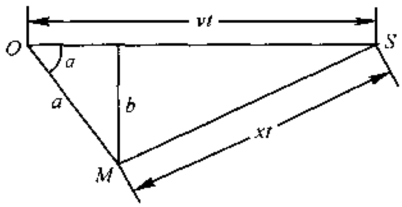
(2)若$x_2-x_1>\frac{1}{2}$,则由$f(0)=f(1)$可得

$|f(x_2)-f(x_1)|=|f(x_2)-f(1)+f(0)-f(x_1)|$

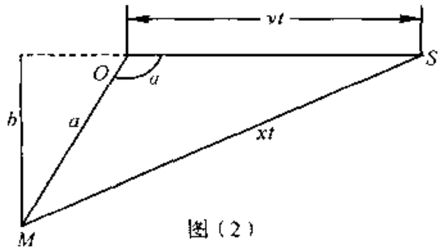
$\leqslant|f(x_2)-f(1)|+|f(0)-f(x_1)|<1-x_2+x_1-0=1+(x_1-x_2)<\frac{1}{2}$.

思考题 2 一辆汽车从O点出发沿一条直线公路行驶,其速度v保持不变,汽车开动的同时,在与O点的距离为a、与公路线的距离为b的地方有一人骑自行车出发,想把一封信递给这辆汽车的司机.问骑自行车的人至少必须以多大的速度行驶,才能实现他的愿望?

解 设$b>0$(若$b=0$,即骑自行车者位于公路线上,则问题有显然的解答),骑自行车者位于M点,S是两者的相遇点,$\angle MOS=\alpha$,t是骑自行车者从出发到相遇所花时间,x是自行车速度,则在$\triangle MOS$中有$OS=vt$,$MS=xt$,$OM=a$,应用余弦定理,得到



图(1)



图(2)

$$x^2t^2=a^2+v^2t^2-2avt\cos\alpha,$$

$$x^2=\frac{a^2}{t^2}-2av\cos\alpha\cdot\frac{1}{t}+v^2$$

$$=\left(\frac{a}{t}-v\cos\alpha\right)^2+v^2\sin^2\alpha, \qquad (1)$$

(1)当α为锐角时,由(1)式可知,当$t=\frac{a}{v\cos\alpha}$时,x取最小值,并且

$x_{\min}=v\sin\alpha=\frac{vb}{a}$(如图(1)),

此时骑自行车者赶上汽车所用的时间是$t=\frac{a}{v\cos\alpha}$,他所走的距离$MS=v\sin\alpha\cdot\frac{a}{v\cos\alpha}=a\tan\alpha$,此式表明骑自行车者的路线应垂直于$OM$.

(2)当 α 为直角或钝角时，不存在骑自行车者赶上汽车的最小速度. 这是因为在图(2)的$\triangle OMS$ 中有 $MS>OS$，即 $xt>vt$，但 x 决不能大于或等于 v.

同步检测 1

1. 对于在区间$[a,b]$上有意义的两个函数 $f(x)$与 $g(x)$，如果对于任意 $x\in[a,b]$，均有$|f(x)-g(x)|\leqslant1$，则称 $f(x)$与 $g(x)$在区间$[a,b]$上是接近的. 若函数 $y=x^2-3x+4$ 与函数 $y=2x-3$ 在区间$[a,b]$上是接近的，则该区间可以是________.

2. 对函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 作变换 $x=h(t)$的代换，则不改变函数 $f(x)$值域的代换是 …………………………………………………………（　　）

A. $h(t)=10^t$　　B. $h(t)=t^2$　　C. $h(t)=\sin t$　　D. $h(t)=\log_2 t$

3. 已知 a、b 为实数，集合 $M=\left\{\dfrac{b}{a},1\right\}$，$N=\{a,0\}$，映射 f：$x\to x$ 表示把集合 M 中的元素 x 映射到集合 N 中仍为 x，则 $a+b$ 等于 ………………………………（　　）

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. ±1

4. 已知 $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ 在区间 M 上的反函数是其本身，则 M 可以是 ……（　　）

A. $[-2,2]$　　B. $[-2,0]$　　C. $[0,2]$　　D. $(-2,2)$

5. 已知 x、y 在区间$(-2,2)$内，且 $xy=-1$，则函数 $u=\dfrac{4}{4-x^2}+\dfrac{9}{9-y^2}$ 的最小值是 ………………………………………………………………（　　）

A. $\dfrac{8}{5}$　　B. $\dfrac{24}{11}$　　C. $\dfrac{12}{7}$　　D. $\dfrac{12}{5}$

6. 已知函数 $f(x)=\log_a\left(x+\dfrac{a}{x}-4\right)(a>0$ 且 $a\neq1)$的值域为 $\mathbf{R}$，则实数 a 的取值范围是________.

7. 已知 $A=\{x|x^2-4x+3<0,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x|2^{1-x}+a\leqslant0,x^2-2(a+7)x+5\leqslant0,x\in\mathbf{R}\}$. 若 $A\subseteq B$，则实数 a 的取值范围是________.

8. 设函数 f：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，满足 $f(0)=1$，且对任意 x、$y\in\mathbf{R}$，都有 $f(xy+1)=f(x)f(y)-f(y)-x+2$，则 $f(x)=$________.

9. 将多项式 $f(x)=1-x+x^2-x^3+\cdots-x^{19}+x^{20}$表示为关于 y 的多项式 $g(y)=a_0+a_1y+a_2y^2+\cdots+a_{19}y^{19}+a_{20}y^{20}$，且 $y=x-4$，则 $a_0+a_1+\cdots+a_{20}=$________.

10. $f(x)$是定义在$(0,+\infty)$上的减函数，若 $f(2a^2+a+1)<f(3a^2-4a+1)$成立，则实数 a 的取值范围是________.

11. 定义在 $\mathbf{R}^+$ 上的函数 $f(x)$满足：