科学版

研究生教学丛书

随机过程与应用

田 铮　秦超英 等 编著

科学出版社
www.sciencep.com

内 容 简 介

本书共7章，包括概率论补充知识、随机过程的概念与几类重要的随机过程、Markov过程、平稳过程、鞅、时间序列分析及小波与时间序列简介等内容. 全书广度和深度适宜、论述清晰、深入浅出、循序渐进、便于教学. 书中配有一定数量的典型例题和习题，并给出时间序列分析中若干典型问题的计算机模拟和相应的C语言程序，书后附有习题答案，可供读者参考.

本书不仅为不同层次的研究生提供了适应性强且内容具有"弹性"的教科书，还可作为理科本科生的专业课教材，同时也可供广大科技工作者和工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

随机过程与应用 / 田铮等编著. —北京：科学出版社，2007
（科学版研究生教学丛书）
ISBN 978-7-03-018805-2

Ⅰ. 随… Ⅱ. 田… Ⅲ. 随机过程-研究生-教材 Ⅳ. O211.6

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第042942号

责任编辑：姚莉丽 / 责任校对：陈玉凤
责任印制：张克忠 / 封面设计：陈 敬

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码 100717
http://www.sciencep.com
新蕾印刷厂印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2007年4月第 一 版 开本：B5（720×1000）
2007年4月第一次印刷 印张：23 1/2
印数：1—4 000 字数：445 000

定价：32.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈路通〉）

前　言

随机过程是研究客观世界中随机现象演变过程规律性的一门学科. 随机过程的理论和方法在许多领域中得到了广泛的应用,如物理、力学、控制、通信、信息与信号处理、生物、工程技术及金融、社会科学等领域,并且发挥着越来越重要的作用. 学习和掌握随机过程的基本理论和基本方法,并将其应用于科学研究和工程实际中,是高度发展的科学技术的需要.

本书是面向工学硕士、博士研究生所编写的教材,同时也可作为理科本科生教材. 包括概率论补充知识、随机过程的概念与几类重要的随机过程、Markov 过程、平稳过程、鞅、时间序列分析及小波与时间序列简介等内容.

作者积 30 多年的教学经验和 10 多年指导硕、博士研究生的经验,发现在随机过程课程的教学和科学研究中存在如下问题:

• 学生们由于前期的概率论基础薄弱,对随机过程这门课程感到难学,摸不清分析问题和思考问题的方法,"入门难";

• 到了后续学习阶段认识到随机过程课程的重要性时,想"亡羊补牢"却感到"力不从心";

• 在进一步的科研工作中遇到涉及随机过程的应用或理论问题时,因前期基础的"先天不足"只好"绕道而行",致使有些原创性的成果"半途夭折".

作者在编著本书时对这些问题给予了充分的关注.

本书在内容的编排、处理和结合实用实例方面作了尝试,在注重打好随机过程基础的同时,强调引导学生发现问题、探索问题和研究问题,强调培养学生研究随机问题的能力,激发学生对学习随机过程的兴趣和求知欲. 本书具有如下特点:

(1)以概率论补充知识、条件数学期望和 $L^2(\Omega,\mathscr{F},P)$ 空间等有关内容为基础,以阐述随机过程的概念和几类重要的随机过程为开篇,这样"先见森林后见树木"的分析问题和处理问题方法使得主线清晰,初学者易于入门,易于掌握随机过程的基本理论和方法.

(2)注重随机过程基本理论、基本概念和基本方法的论述,力求做到论述严谨清晰,数学工具应用简明,文字易懂,以便读者能系统地掌握分析问题和解决问题的理论和方法.

(3)适量介绍随机过程的应用实例,并介绍了小波与时间序列. 把建立数学模型和预报及图像处理等问题变为一类可"触摸"和可"验证"的问题,激发学生对学习随机过程课程的兴趣,进而学会学习.

(4) 给出时间序列分析中若干典型问题的计算机模拟计算的示例和相应程序，提高学生对随机过程的某些基本概念、基本理论和基本方法的理解，进而学会分析问题和解决问题.

全书共 7 章：第 1 章介绍概率论补充知识，为学习随机过程打好基础；第 2 章介绍随机过程的概念与几类重要的随机过程，其中包括二阶矩过程、正态过程、正交增量过程、Wiener 过程和 Poisson 过程等；第 3 章介绍 Markov 过程；第 4 章介绍平稳过程；第 5 章介绍鞅；第 6 章介绍时间序列分析；第 7 章是小波与时间序列简介.

全书的思路和统稿由田铮负责，其中第 1～3 章及第 5～7 章由田铮和金子负责，第 4 章由秦超英负责，第 7 章的 7.5 节由丁明涛负责. 附录 A 由田铮、毛军、赵振民、陈伯林、李昱川负责，附录 B 由徐海霞、肖燕婷负责.

本书自 2002 年以来，已在西北工业大学工学硕士、博士研究生和应用数学本科生中分别使用了四届，效果良好，受到学生的欢迎和教师的好评. 阅读和学习本书需要掌握高等数学和线性代数有关基础知识，讲授全书的内容大约需要 48～64 学时.

本书得到国家自然科学基金(项目批准号:60375003)和航空科学基金(项目批准号:03153059)研究项目的资助.

本书是国家教育部高等工科院校工科数学教学指导委员会立项项目《概率统计系列课程改革的实践》的内容之一，也是西北工业大学立项项目《随机数学系列课程改革的实践》的内容之一.

本书的出版得到科学出版社和西北工业大学教务处的热情支持，谨表示诚挚的感谢. 对所有曾使用过本教材，并提出宝贵意见的教师和研究生、本科生表示感谢.

田 铮

2006 年 11 月于西北工业大学

目 录

第 1 章　概率论补充知识

随机过程是研究随机现象演变过程的概率规律性的一门学科. 因此,学习随机过程应具有一定的概率论基础,本章是工程数学中概率论的补充内容,包括概率空间、随机变量及其分布、特征函数、多维正态分布、极限定理、条件数学期望及 $L^2(\Omega,\mathscr{F},P)$ 空间等,为学习随机过程作准备.

1.1　概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$

1933 年苏联数学家 Kolmogrov 在其著作《概率论基础》一书中首次给出概率的测度论式的严格定义,归纳总结了事件及事件的概率的基本性质和关系,建立了概率论的公理化体系,从而使概率论成为一个严谨的数学分支.

1.1.1　事件域 $\mathscr{F}$

事件是**样本空间** Ω 的一个子集,但一般并不把 Ω 的一切子集都作为事件. 例如在几何概率中就不能把不可度量的子集作为事件. 事实上,只需把具有某些限制又相当广泛的一类 Ω 的子集作为事件即可,为此介绍事件域的概念.

定义 1.1.1(事件域)　设 Ω 是样本空间,$\mathscr{F}$ 是由 Ω 的一些子集构成的集类. 如果满足

(1) $\Omega\in\mathscr{F}$;

(2) 若 $A\in\mathscr{F}$, 则 A 的余集 $\overline{A}\in\mathscr{F}$;

(3) 若 $A_n\in\mathscr{F},n=1,2,\cdots$,则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{F}$,

则称集类 $\mathscr{F}$ 为**事件域**,$\mathscr{F}$ 中元素称为**事件**.

一般地,称满足上述条件的集类 $\mathscr{F}$ 为 σ 域. 因此,事件域是一个 σ 域. Ω 称为**必然事件**,$\varnothing$ 称为**不可能事件**.

σ 域具有以下性质:

(1) 空集 $\varnothing\in\mathscr{F}$.

(2) 若 $A_n\in\mathscr{F},n=1,2,\cdots$,则 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{F}$.

事实上,由 De Morgan 律知

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}\overline{A}_n}\in\mathscr{F}.$$

(3) 若 $A_n\in\mathscr{F}, n=1,2,\cdots$，则 $\bigcup\limits_{n=1}^{k}A_n\in\mathscr{F}, \bigcap\limits_{n=1}^{k}A_n\in\mathscr{F}$.

事实上，$\bigcup\limits_{n=1}^{k}A_n=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k\cup\varnothing\cup\varnothing\cup\cdots\in\mathscr{F}, \bigcap\limits_{n=1}^{k}A_n=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_k\cap\Omega\cap\Omega\cap\cdots\in\mathscr{F}$.

(4) 若 $A_n\in\mathscr{F}, n=1,2,\cdots$，则 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n\in\mathscr{F}$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n\in\mathscr{F}$.

事实上，$\overline{\lim\limits_{n=1}}A_n=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{m=n}^{\infty}A_m\in\mathscr{F}, \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{m=n}^{\infty}A_m\in\mathscr{F}$.

1.1.2 概率 P

概率是定义在事件域 $\mathscr{F}$ 上的一个集合函数，即对于事件域 $\mathscr{F}$ 中的每一个元素 A 都有一个实数 $P(A)$ 与之对应. 一般把这种由集合到实数的映射称为集合函数，简称为集函数.

定义 1.1.2(概率)　设 Ω 是样本空间，$\mathscr{F}$ 是 Ω 的一个事件域，$P(A)$ 是定义在 $\mathscr{F}$ 上的实值集函数. 如果 $P(A)$ 满足

(1) (非负性)对任意 $A\in\mathscr{F}$，有

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1; \tag{1.1.1}$$

(2) (归一性)$P(\Omega)=1$; (1.1.2)

(3) (可列可加性)若 $A_m\in\mathscr{F}, m=1,2,\cdots$，且 $A_i\cap A_j=\varnothing, i\neq j$，则

$$P\left(\sum_{m=1}^{\infty}A_m\right)=\sum_{m=1}^{\infty}P(A_m), \tag{1.1.3}$$

则称 P 是事件域 $\mathscr{F}$ 上的**概率**.

一般称三元总体$(\Omega,\mathscr{F},P)$为**概率空间**，其中 Ω 是样本空间，$\mathscr{F}$ 是事件域，P 是概率. 在以后所讨论的问题中，$(\Omega,\mathscr{F},P)$认为是预先给定的，并以此作为出发点. 至于实际问题中，如何选定 Ω，怎样构造 $\mathscr{F}$，怎样给定 P，则要视具体情况而定.

例 1.1.1　掷一枚均匀硬币，观察其出现的结果. 样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$，其中 ω_1 表示出现正面，ω_2 表示出现反面，则基本事件 $A=\{\omega_1\}, \overline{A}=\{\omega_2\}$. 事件域 $\mathscr{F}=\{\varnothing,A,\overline{A},\Omega\}$，含有 2^2 个子集，定义事件域上的事件 A 的概率为 $P(A)=\dfrac{k}{2}$，k 为事件 A 包含的样本点的个数，则$(\Omega,\mathscr{F},P)$为概率空间.

例 1.1.2　掷一枚均匀的骰子，观察其出现的点数. 样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_6\}$，其中 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_6$ 分别表示出现“1”，“2”，…，“6”点. 样本空间 Ω 的所有子集分别为

单样本点集：$\{\omega_1\},\{\omega_2\},\cdots,\{\omega_6\}$，有 $C_6^1=6$ 个；

双样本点集：$\{\omega_1,\omega_2\},\cdots,\{\omega_5,\omega_6\}$，有 $C_6^2=15$ 个；

…………

六样本点集：$\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_6\}=\Omega$，有 $C_6^6=1$ 个；

$\varnothing\subset\Omega$，有 1 个.

事件域 $\mathscr{F}$ 由样本空间 Ω 的一切子集所构成，即 $\mathscr{F}=\{\{\omega_1\},\{\omega_2\},\cdots,\{\omega_6\},\{\omega_1,\omega_2\},\cdots,\{\omega_5,\omega_6\},\cdots,\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_6\},\varnothing\}$，其元素总数为 $C_6^0+C_6^1+C_6^2+\cdots+C_6^6=2^6$. 事件域 $\mathscr{F}$ 上事件 A 的概率定义为 $P(A)=\frac{k}{6}$，k 为事件 A 包含的样本总数. $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为概率空间.

例 1.1.3 某电话交换台，在一单位时间内，可能收到的呼唤次数为 0,1,2,…. 若平均数为 λ，求呼唤次数不超过 5 次的概率.

样本空间 $\Omega=\{0,1,2,\cdots\}$，事件域 $\mathscr{F}$ 可取为 Ω 的一切子集构成的 σ 域，在 $\mathscr{F}$ 上定义一个集函数 $P(A)$ 满足

$$P(A)=\sum_{k\in A}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\qquad(\lambda>0)$$

且

$$P(\varnothing)=0.$$

可以验证这样定义的集函数 $P(A)$ 是概率. 事实上，对任意 $A\in\mathscr{F}$，有

$$0\leqslant P(A)=\sum_{k\in A}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\leqslant\sum_{k\in\Omega}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}=1,$$

$$P(\Omega)=\sum_{k\in\Omega}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}=1.$$

若 $A_m\in\mathscr{F}$，$m=1,2,\cdots$，$A_i\cap A_j=\varnothing$，$i\neq j$，则

$$P\Big(\sum_{m=1}^{\infty}A_m\Big)=\sum_{k\in\sum\limits_{m=1}^{\infty}A_m}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k\in A_m}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}=\sum_{m=1}^{\infty}P(A_m).$$

因此，$(\Omega,\mathscr{F},P)$ 是一概率空间. 所要求的呼唤次数不超过 5 次的这一事件 A 的概率为

$$P(A)=\sum_{k=0}^{5}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为概率空间，则概率 P 有如下性质：

(1) $P(\varnothing)=0$；

(2)（有限可加性）若对 $\forall i=1,2,\cdots,n$，$A_i\in\mathscr{F}$，且对 $\forall i\neq j$，$A_iA_j=\varnothing$，则有 $P\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i\Big)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)$；

(3)（可减性）若 $A\in\mathscr{F}$，$B\in\mathscr{F}$，且 $A\subset B$，则有 $P(B-A)=P(B)-P(A)$；

(4) (单调不减性) 若 $A \in \mathscr{F}, B \in \mathscr{F}$,且 $A \subset B$,则有 $P(A) \leqslant P(B)$;

(5) (次可加性) 对任意 $n = 1,2,\cdots, A_n \in \mathscr{F}$, 有 $P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)$;

(6) (加法公式) 对任意的 $A_k \in \mathscr{F}\,(k = 1,2,\cdots,n)$,有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_iA_j) + \sum_{i<j<k} P(A_iA_jA_k) - \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1A_1\cdots A_n).$$

1.1.3　条件概率空间

定义 1.1.3(条件概率)　设 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 是一已知的概率空间,$B \in \mathscr{F}$ 满足 $P(B) > 0$. 定义

$$P(A \mid B) \triangleq \frac{P(AB)}{P(B)}, \qquad A \in \mathscr{F}, \tag{1.1.4}$$

则 $P(\cdot \mid B)$ 是定义在 $\mathscr{F}$ 上的一个概率测度,称为在给定事件 B 的条件下的**条件概率**.

记 $P_B(A) \triangleq P(A \mid B)$,称 $(\Omega, \mathscr{F}, P_B)$ 为给定事件 B 的条件概率空间,简称为**条件概率空间**.

由于条件概率空间中 P_B 是一概率测度,因此条件概率也具有概率有关的性质,此处不再重复. 下面给出条件概率本身所具有的特殊性质:

(1) 设 $(\Omega, \mathscr{F}, P_A)$ 是一条件概率空间,$B \in \mathscr{F}$,且 $P_A(B) > 0$,则有

$$P_A(C \mid B) = P(C \mid AB) = P_{AB}(C). \tag{1.1.5}$$

(2) (乘法公式) 设 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 是一概率空间,$A_i \in \mathscr{F}\ (i = 1,2,\cdots,n)$, 且 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1}) > 0$,则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2)\cdots P(A_n \mid A_1A_2\cdots A_{n-1}). \tag{1.1.6}$$

(3) (全概率公式) 设 $A \in \mathscr{F}, B \in \mathscr{F}\ (i = 1,2,\cdots)$. 若 $\forall i \neq j, B_iB_j = \varnothing$, $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i \supset A, P(B_i) > 0$, 则

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i)P(A \mid B_i). \tag{1.1.7}$$

(4) (Bayes 公式) 设 $A \in \mathscr{F}, B_i \in \mathscr{F}(i = 1,2,\cdots)$ 满足(3) 中的条件,且 $P(A) > 0$,则

$$P(B_n \mid A) = \frac{P(B_n)P(A \mid B_n)}{\sum\limits_{k=1}^{\infty} P(B_k)P(A \mid B_k)}, \qquad n = 1,2,\cdots. \tag{1.1.8}$$

1.1.4 事件的独立性

定义 1.1.4(n个事件独立) 设$A_i \in \mathscr{F}(i=1,2,\cdots,n)$是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$中的$n$个事件. 若对任意的$m(1\leqslant m\leqslant n)$及任意的$1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_m\leqslant n$,都有

$$P(A_{k_1}A_{k_2}\cdots A_{k_m})=P(A_{k_1})P(A_{k_2})\cdots P(A_{k_m}), \qquad (1.1.9)$$

则称**事件**$A_1,A_2,\cdots,A_n$**是独立的**.

显然,若$A_1,A_2,\cdots,A_n$独立,则$A_1,A_2,\cdots,A_n$中的任意两个都是独立的(称之为两两独立);反之,若$A_1,A_2,\cdots,A_n$两两独立,则未必有$A_1,A_2,\cdots,A_n$独立. 请读者自行构造反例.

定理 1.1.1 设$A_i\in\mathscr{F}(i=1,2,\cdots,n)$,则$A_1,A_2,\cdots,A_n$相互独立的充分必要条件是下列$2^n$个式子成立:

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n),$$

$$P(A_1\cdots\overline{A_i}\cdots A_n)=P(A_1)\cdots P(\overline{A_i})\cdots P(A_n), \qquad 1\leqslant i\leqslant n,$$

$$P(A_1\cdots\overline{A_i}\cdots\overline{A_j}\cdots A_n)=P(A_1)\cdots P(\overline{A_i})\cdots P(\overline{A_j})\cdots P(A_n), \ 1\leqslant i\leqslant j\leqslant n,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P(\overline{A_1}\cdots A_i\cdots\overline{A_n})=P(\overline{A_1})\cdots P(A_i)\cdots P(\overline{A_n}), \qquad 1\leqslant i\leqslant n,$$

$$P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_n})=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})\cdots P(\overline{A_n}).$$

定理的证明请读者自行完成.

1.2 随机变量

1.2.1 随机变量

由于随机变量是以数量形式来描述随机现象,因此它给理论研究和数学运算都带来了很大的方便.

仍以例 1.1.3 某电话交换台在一单位时间内接到的呼唤次数这一随机试验为例.

概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$已建立,那么有关此试验的任何事件的概率就可以在该概率空间进行讨论和解决. 但是为了使随机事件数量化,作一映射,把在抽象概率空间上讨论的问题,转化到$\mathbf{R}^1$空间中讨论. 设$X(\omega)$为一映射,定义$X(\omega_0)=0$,$X(\omega_1)=1,X(\omega_2)=2,\cdots$,则$X(\omega)$是由一样本空间$\Omega$到非负整数集$\{0,1,2,\cdots\}$上的映射,即是到$\mathbf{R}^1$内的映射. 这样,讨论任何一个随机事件的概率就转化为讨论映射$X(\omega)$的取值所对应的事件的概率. 因此,必须要求对任意$x\in\mathbf{R}^1$,$\{\omega:X(\omega)\leqslant x\}$是一随机事件,即$\{\omega:X(\omega)\leqslant x\}\in\mathscr{F}$.

一般地，设Ω是某一概率试验的样本空间. 如果对每个$\omega \in \Omega$都有一实数与之对应，就得到一个定义在Ω上的实值函数$X(\omega)$. 我们不仅关心$X(\omega)$取什么值，而且还关心它取值的概率大小. 例如希望知道集$\{\omega: X(\omega) \leqslant x\}$的概率，其中$x$是任一实数，常将$\{\omega: X(\omega) \leqslant x\}$简记为$\{X(\omega) \leqslant x\}$或$\{X \leqslant x\}$. 因为我们只在事件上定义了概率，讨论$\{X(\omega) \leqslant x\}$的概率，当然要求$\{X(\omega) \leqslant x\}$是事件，即$\{X(\omega) \leqslant x\} \in \mathscr{F}$.

定义 1.2.1(随机变量)　设$(\Omega, \mathscr{F}, P)$是一概率空间，$X(\omega)$是定义在Ω上的单值实函数. 如果对任意$x \in \mathbf{R}^1$，有

$$\{\omega: X(\omega) \leqslant x\} \in \mathscr{F}, \tag{1.2.1}$$

则称X为$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的一个**随机变量**，进而称$F(x) = P\{X \leqslant x\}$为随机变量$X$的**分布函数**.

$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的随机变量X的**分布函数**$F(x)$**具有以下基本性质**：

(1) (**单调不减性**) 若$x < y$，则$F(x) \leqslant F(y)$；

(2) (**右连续性**) 对任意$x \in \mathbf{R}^1$，$F(x_{0^+}) = F(x)$；

(3) 记$F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x)$，$F(\infty) = \lim\limits_{x \to \infty} F(x)$，则$F(-\infty) = 0$，$F(\infty) = 1$. 本书约定$+\infty$记为$\infty$.

还可以证明，满足上述三个性质的函数，必定是某个概率空间上某个随机变量的分布函数. 因此，也称满足以上三个条件的函数为分布函数.

最常见的是离散型和连续型随机变量.

若存在有限个或可列个实数集合$\{x_1, x_2, \cdots\}$，使随机变量有

$$P\{X \in \{x_1, x_2, \cdots\}\} = 1, \tag{1.2.2}$$

则称X是**离散型随机变量**，而$p_i = P\{X = x_i\}, i = 1, 2, \cdots$称为**离散型随机变量**$X$**的概率分布律(或分布列)**.

若对任意实数x，存在非负实函数$f(x)$，使随机变量X的分布函数$F(x)$有

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x) \mathrm{d}x, \tag{1.2.3}$$

则称X是**连续型随机变量**，$f(x)$为**连续型随机变量**X**的概率密度函数**.

几种常见的离散型随机变量和连续型随机变量见表 1.1.

1.2.2　随机向量及其分布

某些随机试验的结果需要用几个随机变量来表示，我们不但要考虑其中各个随机变量的性质，还要研究它们之间的联系，下面讨论随机向量及其分布.

定义 1.2.2(n维随机向量)　设$(\Omega, \mathscr{F}, P)$是一概率空间，$X_1(\omega), X_2(\omega), \cdots, X_n(\omega)$是定义在这个概率空间上的$n$个随机变量，称$\boldsymbol{X}(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), \cdots,$

表 1.1 几种重要的概率分布

分布	参数	分布列或概率密度	数学期望	方差	特征函数
两点分布(Bernoulli 分布)	$0<p<1$	$p_k=\begin{cases}p, & k=1,\\ q, & k=0\end{cases}\quad (q=1-p)$	p	pq	$pe^{jt}+q$
二项分布	$n\geqslant 1$ $0<p<1$	$p_k=C_n^k p^k q^{n-k}\quad (k=0,1,\cdots,n)$ $(q=1-p)$	np	npq	$(pe^{jt}+q)^n$
几何分布	$0<p<1$	$p_k=pq^{k-1}\quad (k=1,2,\cdots)$ $(q=1-p)$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1-p}{p^2}$	$\dfrac{pe^{jt}}{1-qe^{jt}}$
超几何分布	N,M,n $(n\leqslant M)$	$p_k=\dfrac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$ $(k=0,1,\cdots,n)$	$\dfrac{nM}{N}$	$\dfrac{nM}{N}\left(1-\dfrac{M}{N}\right)\dfrac{N-n}{N-1}$	略
Poisson 分布	$\lambda>0$	$p_k=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\quad (k=0,1,\cdots)$	λ	λ	$\exp\{\lambda(e^{jt}-1)\}$
均匀分布	$a<b$	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$	$\dfrac{e^{jtb}-e^{jta}}{(b-a)jt}$
正态分布	μ 为常数 $\sigma>0$	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2	$e^{j\mu t-\frac{1}{2}t^2\sigma^2}$
对数正态分布	μ 为常数 $\sigma>0$	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$	$e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$	$e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1)$	略
Cauchy 分布	a 为常数 $\lambda>0$	$f(x)=\dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{\lambda^2+(x-a)^2}$	不存在	不存在	$e^{jat-\lambda\|t\|}$
指数分布	$\lambda>0$	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$	$\left(1-\dfrac{jt}{\lambda}\right)^{-1}$
Γ 分布	$\lambda>0$ $r>0$	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^r}{\Gamma(r)}x^{r-1}e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$	$\dfrac{r}{\lambda}$	$\dfrac{r}{\lambda^2}$	$\left(1-\dfrac{jt}{\lambda}\right)^{-r}$
Laplace 分布	μ 为常数 $\lambda>0$	$f(x)=\dfrac{1}{2\lambda}e^{-\frac{\|x-\mu\|}{\lambda}}$	μ	$2\lambda^2$	$\dfrac{e^{j\mu t}}{1+\lambda^2 t^2}$

$X_n(\omega)$) 为$(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的一个 n **维随机向量**.

n 维随机向量取值于 n 维欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$.

对于 n 个实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,由于

$$\{X_1 \leqslant x_1, X_2 \leqslant x_2, \cdots, X_n \leqslant x_n\} = \bigcap_{k=1}^{n} \{X_k \leqslant x_k\} \in \mathscr{F},$$

所以 $P\{X_1 \leqslant x_1, X_2 \leqslant x_2, \cdots, X_n \leqslant x_n\}(x_i \in \mathbf{R}^1, i=1,2,\cdots,n)$是有意义的.

定义 1.2.3(n 维随机向量的分布函数)　设 $\boldsymbol{X}=(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的 n 维随机向量,称 n 元函数

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P\{X_1 \leqslant x_1, X_2 \leqslant x_2, \cdots, X_n \leqslant x_n\} \tag{1.2.4}$$

为 **n 维随机向量 $\boldsymbol{X}=(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的分布函数**,也称之为 n 个随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的**联合分布函数**.

由工程数学的概率论知识,二维随机向量的分布函数 $F(x_1, x_2) = P\{X_1 \leqslant x_1, X_2 \leqslant x_2\}$具有如下性质:

(1) 对每一个变元 x_1 或 x_2, $F(x_1, x_2)$ 是单调不减、右连续函数;

(2) $F(x_1, -\infty) = F(-\infty, x_2) = 0, F(-\infty, \infty) = 1$;

(3) 对于任意 $a_1 < b_1, a_2 < b_2$,有

$$\begin{aligned} &P\{a_1 < X_1 \leqslant b_1, a_2 < X_2 \leqslant b_2\} \\ &= F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2). \end{aligned}$$

这些性质都可以推广到 n 维分布函数 $F\{(x_1, x_2, \cdots, x_n)\}$. 例如, $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 关于每个变元 $x_i(i=1,\cdots,n)$ 是单调不减、右连续函数; $F(x_1, x_2, \cdots, -\infty, \cdots, x_n) = 0$; $F(\infty, \infty, \cdots, \infty) = 1$ 等.

在处理具体问题时,常用的两种随机向量类型是离散型和连续型.

若随机向量 $\boldsymbol{X}=(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 只取有限个或可列个不同的向量值,则称 $\boldsymbol{X}$ 为**离散型随机向量**.

设 $\boldsymbol{X}=(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的所有可能值为$(x_{1i_1}, x_{2i_2}, \cdots, x_{ni_n})$, $i_1, i_2, \cdots, i_n = 1, 2, \cdots$, 则称概率 $p_{i_1, i_2, \cdots, i_n} = P\{X_1 = x_{1i_1}, X_2 = x_{2i_2}, \cdots, X_n = x_{ni_n}\}$, $i_1, i_2, \cdots, i_n = 1, 2, \cdots$ 为 $\boldsymbol{X}=(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的**联合分布律**. 它具有如下性质:

$$p_{i_1, i_2, \cdots, i_n} \geqslant 0, \qquad \sum_{i_1} \cdots \sum_{i_n} p_{i_1, i_2, \cdots, i_n} = 1.$$

离散型随机向量 $\boldsymbol{X}=(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的**分布函数**为

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{x_{1i_1} \leqslant x_1} \cdots \sum_{x_{ni_n} \leqslant x_n} p_{i_1, i_2, \cdots, i_n}.$$

若存在 n 元非负Lebesgue 可积函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$,使随机向量 $\boldsymbol{X}=(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的分布函数

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(y_1, y_2, \cdots, y_n) \mathrm{d}y_1 \mathrm{d}y_2 \cdots \mathrm{d}y_n,$$

则称 $\boldsymbol{X}=(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为**连续型随机向量**,函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称为 $\boldsymbol{X}$ 的 **n 维概率密度函数**. 它满足如下性质: