



普通高等教育“十五”国家级规划教材

过程装备力学基础

第二版

陈旭 主编 蒋家羚 主审



化学工业出版社

普通高等教育“十五”国家级规划教材

过程装备力学基础

第二版

陈旭 主编

蒋家羚 主审



化学工业出版社

·北京·

本书介绍在“过程装备”设计中所涉及的工程力学方面的基本理论和基本知识。包括弹性理论的有关内容、圆板理论、旋转薄壳理论，机械振动，疲劳设计及断裂力学等。是过程装备及控制工程本科专业的专业基础课程。也可作为相关专业工程技术人员的参考资料。

图书在版编目 (CIP) 数据

过程装备力学基础/陈旭主编. —2版, —北京: 化学工业出版社, 2006. 5

普通高等教育“十五”国家级规划教材

ISBN 978-7-5025-8740-6

I. 过… II. 陈… III. 化工过程-化工设备-工程力学-高等学校-教材 IV. TQ051

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 120211 号

责任编辑: 程树珍
责任校对: 顾淑云

装帧设计: 潘 峰

出版发行: 化学工业出版社 (北京市东城区青年湖南街 13 号 邮政编码 100011)

印 刷: 北京云浩印刷有限责任公司

装 订: 三河市前程装订厂

787mm×960mm 1/16 印张 13 $\frac{1}{2}$ 字数 284 千字

2006 年 5 月北京第 2 版第 2 次印刷

购书咨询: 010-64518888 (传真: 010-64519686) 售后服务: 010-64518899

网 址: <http://www.cip.com.cn>

凡购买本书, 如有缺损质量问题, 本社销售中心负责调换。

定 价: 27.00 元

版权所有 违者必究

过程装备与控制工程学科的研究方向、趋势和前沿

——代序

人类的主要特点是能制造工具，富兰克林曾把人定义为制造工具的动物。通过制造和使用工具，人类把自然物变成他的活动器官，从而延伸了他的肢体和感官。人们制造和使用工具，有目的、有计划地改造自然、变革自然，才有了名副其实的生产劳动。

现代人越来越依赖高度机械化、自动化和智能化的产业来创造财富，因此必然要创造出现代化的工业装备和控制系统来满足生产的需要。流程工业是加工制造流程性材料产品的现代国民经济支柱产业之一，必然要求越来越高度机械化、自动化和智能化的过程装备与控制工程。如果说制造工具是原始人与动物区别的最主要标志，那么就可以说，现代过程装备与控制系统是现代人类文明的最主要标志。

工程是人类将现有状态改造成所需状态的实践活动，而工程科学是关于工程实践的科学基础。现代工程科学是自然科学和工程技术的桥梁。工程科学具有宽广的研究领域和学科分支，如机械工程科学、化学工程科学、材料工程科学、信息工程科学、控制工程科学、能源工程科学、冶金工程科学、建筑与土木工程科学、水利工程科学、采矿工程科学和电子/电气工程科学等。

现代过程装备与控制工程是工程科学的一个分支，严格地讲它并不能完全归属于上述任何一个研究领域或学科。它是机械、化学、电、能源、信息、材料工程乃至医学、系统学等学科的交叉学科，是在多个大学科发展的基础上交叉、融合而出现的新兴学科分支，也是生产需求牵引、工程科技发展的必然产物。显而易见，过程装备与控制工程学科具有强大的生命力和广阔的发展前景。

学科交叉、融合和用信息化改造传统的“化工设备与机械”学科产生了过程装备与控制工程学科。化工设备与机械专业是在建国初期向前苏联学习在我国几所高校首先设立后发展起来的，半个世纪以来，毕业生几乎一直供不应求，为我国社会主义建设输送了大批优秀工程科技人才。1998年3月教育部应上届教学指导委员会建议正式批准建立了“过程装备与控制工程”学科。这一学科在美欧等国家本科和研究生专业目录上是没有的，在我国已有60多所高校开设这一专业，是适合我国国情，具有中国特色的一门新兴交叉学科。其主要特点如下。

(1) 过程装备：与生产工艺即加工流程性材料紧密结合，有其独特的过程单元设备和工程技术，如混合工程、反应工程、分离工程及其设备等，与一般机械设备完全不同，有其独特之处。

(2) 控制工程：对过程装备及其系统的状态和工况进行监测、控制，以确保生产工艺有

序稳定运行，提高过程装备的可靠度和功能可利用度。

(3) 过程装备与控制工程：是指机、电、仪一体化连续的复杂系统，它需要长周期稳定运行；并且系统中的各组分部分（机泵、过程单元设备、管道、阀、监测仪表、计算机系统）均互相关联、互相作用和互相制约，任何一点发生故障都会影响整个系统；又由于加工的过程材料有些易燃易爆、有毒或是加工要在高温、高压下进行，系统的安全可靠性十分重要。

过程装备与控制工程的上述特点就决定了其学科研究的领域十分宽广，一是要以机电工程为主干，与工艺过程密切结合，创新单元工艺装备；二是与信息技术和知识工程密切结合，实现智能监控和机电一体化；三是不仅研究单一的设备和机器，而且更主要的是要研究与过程生产融为一体的机、电、仪连续复杂系统，在工程上就是要设计建造过程工业大型成套装备。因此，要密切关注其他学科的新的发展动向，博采众长、集成创新，把诸多学科最新研究成果之他山之石为我所用；同时要以现代系统论（Systemics）和耗散结构理论为指导，研究本学科过程装备与控制工程复杂系统独特的工程理论，不断创新和发展过程装备与控制工程学科是我们的重要研究方向。

我国科技部和国家自然科学基金委员会在 21 世纪初发表了《中国基础学科发展报告》，其中分析了世界工程科学研究的发展趋势和前沿，这也为过程装备与控制工程学科的发展指明了方向，值得借鉴和参考。

(1) 全生命周期的设计/制造正成为研究的重要发展趋势。由过去单纯考虑正常使用的设计，前后延伸到考虑建造、生产、使用、维修、废弃、回收和再利用在内的全生命周期的综合决策。

过程装备的监测与诊断工程、绿色再制造工程和装备的全寿命周期费用分析、安全和风险评估等正在流程工业开始得到应用。工程科技界已开始移植和借鉴现代医学与疾病作斗争的理论和方法，去研究过程装备故障自愈调控（Fault Self-recovering Regulation），探讨装备医工程（Plant Medical Engineering）理论。

(2) 工程科学的研究尺度向两极延伸。过程装备的大型化是多年发展方向，近年来又有向小型化集成化的趋势。

(3) 广泛的学科交叉、融合，推动了工程科学不断深入、不断精细化，同时也提出了更高的前沿科学问题，尤其是计算机科学和信息技术的发展冲击着每个工程科学领域，影响着学科的基础格局。过程装备与控制工程学科的发展也必须依靠学科交叉和信息化，改变传统的生产观念和 production 模式，过程装备复杂系统的监控一体化和数字化是发展的必然趋势。

(4) 产品的个性化、多样化和标准化已经成为工程领域竞争力的标志，要求产品更精细、灵巧并满足特殊的功能要求。产品创新和功能扩展/强化是工程科学研究的首要目标，柔性制造和快速重组技术在大流程工业中也得到了重视。

(5) 先进工艺技术得到前所未有的广泛重视，如精密、高效、短流程、敏捷制造、虚拟制造等先进制造技术对机械、冶金、化工、石油等制造工业产生了重要影响。

(6) 可持续发展的战略思想渗透到工程科学的多个方面, 表现了人类社会与自然相协调的发展趋势。制造工业和大型工程建设都面临着有限资源和破坏环境等迫切需要解决的难题, 从源头控制污染的绿色设计和制造系统为今后发展的主要趋势之一。

众所周知, 过程工业是国民经济的支柱产业; 是发展经济提高我国国际竞争力的不可缺少的基础; 过程工业是提高人民生活水平的基础; 过程工业是保障国家安全、打赢现代战争的重要支撑, 没有过程工业就没有强大的国防; 过程工业是实现经济、社会发展与自然相协调从而实现可持续发展的重要基础和手段。因而, 过程装备与控制工程在发展国民经济的重要地位是显而易见的。

新中国成立以来, 特别是改革开放以来, 中国的制造业得到蓬勃发展。中国的制造业和装备制造业的工业增加值已居世界第四位, 仅次于美国、日本和德国。但中国制造业的劳动生产率远低于发达国家, 约为美国的 5.76%、日本的 5.35%、德国的 7.32%。其中最主要原因是技术创新能力十分薄弱, 基本上停留在仿制, 实现国产化的低层次阶段。从 20 世纪 70 年代末, 中国大规模、全方位地引进国外技术和进口国外设备, 但没做好引进技术装备的消化、吸收和创新, 没有同时加快装备制造业的发展, 因此, 步入引进一落后一再引进的怪圈。以石油化工设备为例, 20 年来, 化肥生产企业先后共引进 31 套合成氨装置、26 套尿素装置、47 套磷复肥装置, 总计耗资 48 亿美元; 乙烯生产企业先后引进 18 套乙烯装置, 总计耗资 200 亿美元。因此, 要振兴我国的装备制造业, 必须变“国际引进型”为“自主集成创新型”, 这是历史赋予我们过程装备与控制工程教育和科技工作者的历史重任。过程装备与控制工程学科的发展不仅仅要发表 EI、SCI 文章, 而且要十分重视发明专利和标准, 也要重视工程实践, 实现产、学、研相结合。这样才能为结束我国过程装备“出不去, 挡不住”的局面做出应有的贡献。

过程装备与控制工程是应用科学和工程技术, 这一学科的发展会立竿见影, 直接促进国民经济的发展。过程装备的现代化也会促进机械工程、材料工程、热能动力工程、化学工程、电子/电气工程、信息工程等工程技术的发展。我们不能只看到过程装备与控制工程是一个新兴的学科, 是博采诸多自然科学学科的成果而综合集成的一项工程科学技术, 而忽略了反过来的一面, 一个反馈作用, 也就是过程装备与控制工程学科也应对自然科学的发展做出应有的贡献。

实际上, 早在 18 世纪末期, 自然科学的研究就超出了自然界, 从而包括了整个世界, 即自然界和人工自然物。过程装备与控制工程属人工自然物, 它也理所当然的是自然科学研究的对象之一。工程科学能把过程装备与控制工程在工程实践中的宝贵经验和初步理论精练成具有普遍意义的规律, 这些工程科学的规律就可能含有自然科学里现在没有的东西。所以对工程科学研究的成果即工程理论加以分析, 再加以提高就可能成为自然科学的一部分。钱学森先生曾提出: “工程控制论的内容就是完全从实际自动控制技术总结出来的, 没有设计和运用控制系统的经验, 决不会有工程控制论。也可以说工程控制论在自然科学中是没有它的祖先的。” 因此对现代过程装备与工程的研究也有可能创造出新的工程理论, 为自然科学的

发展做出贡献。

过程装备与控制工程学科的发展历史地落在我们这一代人的肩上，任重道远。我们深信，经过一代又一代人的努力奋斗，过程装备与控制工程这一新兴学科一定会兴旺发达，不但会为国民经济的发展建功立业，而且会为自然科学的发展做出应有的贡献。

高质量的精品教材是培养高素质人才的重要基础，因此编写面向 21 世纪的迫切需要的过程装备与控制工程“十五”规划教材，是学科建设的重要内容。遵照教育部《关于“十五”期间普通高等教育教材建设与改革的意见》，以邓小平理论为指导，全面贯彻国家的教育方针和科教兴国战略，面向现代化、面向世界、面向未来，充分发挥高等学校在教材建设中的主体作用，在有关教师 and 教学指导委员会委员的共同努力下，过程装备与控制工程的“十五”规划教材陆续与广大师生和工程科技界读者见面了。这套教材力求反映近年来教学改革成果，适应多样化的教学需要；在选择教材内容和编写体系时注意体现素质教育和创新能力及实践能力的培养，为学生知识、能力、素质协调发展创造条件。在此向所有为这些教材问世付出辛勤劳动的人们表示诚挚的敬意。

教材的建设往往滞后于教学改革的实践，教材的内容很难包含最新的科研成果，这套教材还要在教学和教改实践中不断丰富和完善；由于对教学改革研究深度和认识水平都有限，在这套书中有不妥之处在所难免。为此，恳请广大读者予以批评指正。

教育部高等学校机械学科教学指导委员会副主任委员
过程装备与控制工程专业教学指导分委员会主任委员

北京化工大学 教授
中国工程院 院士

高吉吉

2003 年 5 月 于北京

第二版前言

本教材为普通高等教育“十五”国家级规划教材。根据过程装备与控制工程专业课程体系及教学改革计划,使学生所获知识系统化,各校对原化工设备与机械本科专业课程设置进行了重新调整。在近十年的教学实践中,各校对天津大学余国琮、胡修慈、吴文林教授主编的化工容器及设备普遍反映较好,因此本教材主要参照了该书的第一篇内容。在原化工机械力学基础课程教材的基础上做一定的改编,教材定名为《过程装备力学基础》。本书介绍在“过程装备”设计中所涉及的工程力学方面的基本理论和基本知识。包括弹塑性理论、薄板理论、旋转薄壳理论,机械振动,疲劳设计,断裂力学等。新版教材在2001年版本基础上删除了有限单元方法及带星号的内容,使教材更为简洁,并且结合重点,在各章均增加了思考题及习题答案和提示。以达到注重素质,加强基础,减少总学时,增加学生自学时间的目标。

本版内容的安排做了如下考虑。弹塑性力学基础和板壳理论约32学时,以精讲多练为原则,每章后都附有习题,以便学生自学和练习的目的。作为容器设计的理论基础,应为必修内容。高速回转件的应力与变形和机械振动的基本理论共8学时,作为化工机器及设备振动的基础知识,各校可根据需要选用。蠕变、疲劳、断裂分析简介共8学时,介绍基本概念和应用实例,各校可根据各自的教学计划需要选用。

本书编写分工如下:第一章和第七章由天津大学陈旭编写,第二章和第三章由太原理工大学段滋华编写,第四章、第五章和第六章由天津大学谭蔚编写。天津大学吴文林对本书的编写提出许多意见。全书由陈旭主编,浙江大学蒋家羚主审,郑水英参加了部分章节的校审工作。陈刚对各章的习题进行了校验,并给出了答案。

由于作者水平有限,错误及不妥之处在所难免,望读者提出意见以便更正。

编者
2006年3月

第一版前言

根据“过程装备与控制工程”专业课程体系及教学计划，各校对原“化工设备与机械”本科专业课程设置进行了重新调整。本教材主要参照了余国琮、胡修慈、吴文林教授主编的《化工容器及设备》的第一篇内容，并进行了改编。本书系统介绍在“过程装备”设计中所应用的工程力学方面的基本理论和基本知识。主要内容包括弹塑性理论的基本内容、薄板理论、旋转薄壳理论，机械振动等。此外，增加了部分近年来发展的新知识，如广泛用于压力容器分析设计的有限单元法，疲劳设计，断裂力学等方法。总学时约为48学时，各校可根据实际情况选用。以达到注重素质，加强基础，减少讲授总学时，增加学生自学时间的目标。

其内容的安排作了如下考虑，弹塑性力学基础和板壳理论约32学时，以精讲多练为原则，每章后都附有习题，以便学生自学和练习。作为容器设计的理论基础，应为必修内容。高速回转件的应力与变形和机械振动的基本理论共8学时，作为化工机器及设备振动的基础知识；蠕变、疲劳、断裂分析和有限单元法简介共8学时，介绍基本概念和应用实例。本书中加“*”的章节为选用教材，各校可根据各自的教学计划需要选用。

本书编写分工如下：天津大学陈旭编写第1~7章，太原理工大学段滋华编写第2~3章，天津大学谭蔚编写第4~6章，太原理工大学张铨芬编写第8章。天津大学吴文林对本书的编写提出许多意见。全书由陈旭主编，浙江大学蒋家羚主审，郑水英参加了部分章节的校审工作。

由于作者水平有限，错误及不妥之处在所难免，望读者提出意见以便更正。

编者

2001年12月

目 录

第一章 弹性力学基本方法和平面问题解答	1
第一节 弹性力学的内容和基本概念	1
一、弹性力学的内容	1
二、弹性力学中的几个基本概念	1
三、弹性力学基本方程	3
第二节 弹性力学的平面问题	5
一、平面应力和平面应变	5
二、平面问题的基本方程	6
三、平面问题的边界条件	8
四、圣维南原理	9
五、平面问题的解法	9
六、应力函数	11
第三节 弹性力学平面问题的极坐标解答	14
一、极坐标中的基本方程	14
二、平面轴对称问题	19
三、解法举例	21
习题	27
思考题	28
参考文献	29
第二章 厚壁圆筒的弹塑性应力分析	30
第一节 厚壁圆筒的弹性应力分析	30
一、厚壁圆筒的基本方程	30
二、厚壁圆筒的应力和位移解	34
三、温差应力问题	40
四、组合圆筒的应力分析	45
第二节 厚壁圆筒的弹塑性应力分析	49
一、简单应力状态下的弹塑性力学问题	50
二、屈服条件	53
三、厚壁圆筒的弹塑性分析	56
习题	64

思考题	64
参考文献	65
第三章 薄板理论	66
第一节 薄板的基本概念及基本假定	66
第二节 圆板的轴对称问题	67
一、圆板轴对称弯曲的基本方程	68
二、受均布载荷圆平板的应力分析	72
三、承受轴对称载荷的环板	75
习题	81
思考题	81
参考文献	82
第四章 旋转薄壳理论	83
第一节 基本概念	83
一、旋转薄壳的几何概念	83
二、外力与内力	85
第二节 旋转薄壳的无力矩理论	86
一、无力矩理论的基本方程	87
二、无力矩理论的应用	90
三、无力矩理论的应用范围	97
第三节 旋转薄壳的边缘问题	98
一、概述	98
二、圆筒形壳体的有力矩理论	99
三、一般旋转壳体边缘弯曲的应力和变形表达式	106
四、边缘问题的求解	107
五、边缘问题求解实例	108
六、边缘应力的特点与设计中的处理	113
习题	114
思考题	115
参考文献	116
第五章 高速回转零件的应力分析	117
第一节 概述	117
第二节 高速回转圆鼓的应力与变形	118
一、转鼓自身质量引起的应力与变形	118
二、筛网质量引起的鼓壁应力与变形	120
三、物料离心力所造成的容器壁的应力和变形	121

四、实际转鼓工作时的应力	124
第三节 高速回转圆盘的应力与应变	125
一、轮盘应力分析的一般理论	125
二、等厚度盘	127
三、变厚度盘、锥形盘	131
四、实际圆盘的应力计算	133
参考文献	137
第六章 机械振动	138
第一节 振动基本概念	138
第二节 单自由度系统振动	139
一、无阻尼振动	139
二、有阻尼振动	140
第三节 多自由度系统振动	141
一、二自由度系统的振动	141
二、多自由度系统运动的微分方程	144
第四节 转轴系统的临界转速	152
一、单转子轴的临界转速	152
二、多转子轴的临界转速	153
三、均布质量轴的临界转速	157
四、影响临界转速的主要因素	157
第五节 分布系统振动	159
一、梁的横向振动	159
二、连续分布系统的振动实例	162
思考题	165
参考文献	165
第七章 压力容器的疲劳、断裂、蠕变*	166
第一节 压力容器的疲劳设计	166
一、低循环疲劳寿命曲线	167
二、考虑平均应力影响的疲劳寿命	169
三、疲劳损伤积累	170
四、疲劳设计规范	171
五、疲劳分析的其他问题	173
第二节 压力容器的脆性断裂	173
一、线弹性断裂力学简介	174
二、弹塑性断裂力学简介	177

三、结构防止断裂的安全评定工程方法·····	179
四、断裂力学在疲劳问题上的应用·····	186
第三节 高温蠕变强度·····	190
一、单向拉伸蠕变试验·····	190
二、复杂应力状态下的蠕变方程式·····	191
三、厚壁圆筒的蠕变计算·····	193
习题·····	194
思考题·····	195
参考文献·····	195
参考答案及提示 ·····	196

第一章 弹性力学基本方法和平面问题解答

第一节 弹性力学的内容和基本概念

一、弹性力学的内容

弹性力学是研究物体在弹性范围内由于外载荷作用或物体温度改变而产生的应力、应变和位移。就这一方面而言，弹性力学的任务和材料力学是相似的。材料力学中关于弹性体的均匀连续假设和各向同性假设也适用于弹性力学。

弹性力学和材料力学不同处在于材料力学主要研究杆件和比较简单的杆件系统，且在研究杆件和杆件系统时，为简化数学推导，基于大量实验观察的基础上，采用了关于变形和应力分布的假设，并以一个有限大的单元体作为研究对象；而弹性力学除了研究杆件外，还研究平面问题及空间问题，在研究这些问题时，并不采用变形或应力分布之类的假设，由于结构和受力的复杂性，以无限小的单元体作为研究和分析问题的出发点，并由力平衡方程、几何方程和物理方程等构成数学-力学问题求解。

二、弹性力学中的几个基本概念

弹性力学中经常用到的基本概念有外力、应力、应变和位移。

作用于物体的外力可以分为体积力（体力）和表面力（面力）两种。体力是分布在物体体积内的力，例如重力和惯性力；面力是分布在物体表面上的力，例如流体的压力和接触力。

物体在外力作用下将产生变形。为了抵抗这种变形，其内部就要产生相互作用力，称之为内力。内力在各点的集度就是各点的应力。对于应力，通常都用它沿作用截面的法线方向和切线方向的分量，即正应力 σ 和切应力 τ 来表示，因为这些分量与物体的形状改变或材料的强度有直接的关系。

为了考察物体受载后内部某一点 P 的应力，在 P 点从物体内取出一个微小的正六面体，它的棱边平行于坐标轴，长度为： $PA = \Delta x$ ； $PB = \Delta y$ ； $PC = \Delta z$ ，如图 1-1 所示。将每一个面上的应力分解为一个正应力和两个切应力，分别与三个坐标轴平行。

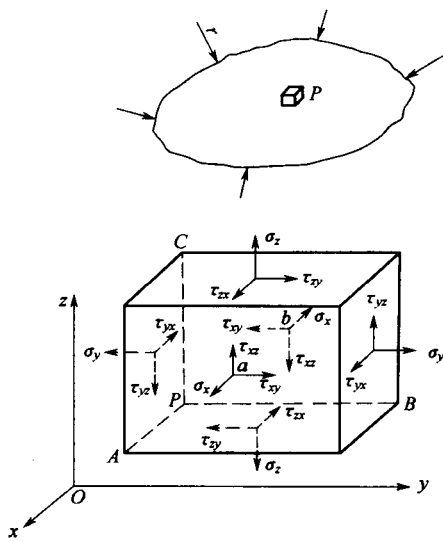


图 1-1 弹性体内某一点的应力

为了表明应力的作用面和作用方向，在正应力 σ 上加一个坐标角码，例如 σ_x 是指作用在垂直于 x 轴的面上，并与 x 轴方向平行的正应力；在切应力 τ 上加两个坐标角码，前一个角码表明作用面垂直于哪一个坐标轴，后一个角码表明作用方向沿着哪一个坐标轴，例如 τ_{xy} 是指作用在垂直于 x 轴的面上而沿 y 轴方向的切应力。如果某一个面上的外法线是沿着坐标轴的正方向，这个截面就称为一个正面。在这个面上的应力分量就以沿坐标轴正方向为正，沿坐标轴负方向为负。反之，如果某一个截面上的外法线是沿着坐标轴的负方向，这个截面就称为一个负面，而这个面上的应力分量就以沿坐标轴负方向为正，沿坐标轴正方向为负。图 1-1 所示的应力分量全部都是正的。

六个切应力之间具有一定的互等关系。例如，以连接正六面体前后两面中心的直线 ab 为矩轴，见图 1-1，写出力矩平衡方程为

$$2\tau_{yz}\Delta z\Delta x\frac{\Delta y}{2}-2\tau_{xy}\Delta y\Delta x\frac{\Delta z}{2}=0$$

由此得到

$$\tau_{yz}=\tau_{xy}$$

同样可以建立其余两个相似的方程，可得出

$$\tau_{xz}=\tau_{zx}, \tau_{xy}=\tau_{yx}$$

这就证明了切应力互等定律，即作用在两个垂直面上且垂直于该两面交线的切应力，大小相等，正负号也相同。因此，切应力记号的两个角码可以互换。

于是，九个应力分量中，只有六个独立的未知量，即三个正应力 σ_x 、 σ_y 、 σ_z 和三个切应力 τ_{xy} 、 τ_{yz} 、 τ_{zx} 。和材料力学的分析相似，利用静力平衡，过 P 点所作的任意斜截面上的应力，都可用上述六个应力分量来确定。所以，这六个应力分量确定为 P 点的应力状态。应力分析的目的，就是确定物体受载后各点的六个应力分量，进而求得主应力，作为强度设计的依据。

物体的形状可以用它各部分的长度和角度来表示。因此，物体受外载后的变形，也可以归结为长度的改变和角度的改变。如求物体内某点 P 的变形，可在 P 点沿坐标轴 x 、 y 、 z 正方向取三个微小线段 PA 、 PB 、 PC ，如图 1-1 所示。物体变形后， PA 、 PB 、 PC 的长度以及它们之间的直角一般都将改变，各线段的每单位长度的伸长或缩短称为线应变，用字母 ϵ 表示；各线段之间的直角改变，以弧度为单位，称为切应变，用字母 γ 表示。在线应变 ϵ 上加一个坐标角码表示伸缩的方向，如 ϵ_x 表示 x 方向的线段 PA 的正应变；在切应变 γ 上加两个坐标角码，表示那两个线段之间的直角改变，如 γ_{yz} 表示 y 与 z 两方向的线段即 PB 与 PC 之间的直角改变。线应变以伸长为正，缩短为负；切应变以直角变小时为正，变大时为负。这些规定和正应力、切应力的符号规定是相对应的。

物体任一点的位移，用它在 x 、 y 、 z 三轴上的投影 u 、 v 、 w 来表示。沿坐标轴正方向为正，反之为负。这三个投影称为该点的位移分量。

一般而论，弹性体内任意一点的体力分量、面力分量、应力分量、应变分量和位移分量是随着该点的位置而变的，因而都是位置坐标的函数。弹性力学所研究的绝大多

数是静不定问题，必须综合应用平衡（应力、体力、面力之间的关系）、几何（应变、位移、边界位移之间的关系）和物理（应力、应变之间的关系）三个方面的方程才能得到问题的解答。

三、弹性力学基本方程

1. 平衡微分方程

在物体内任意一点 P ，割取一个微小的正六面体，如图 1-2 所示。它的六面体垂直于坐标轴，沿 x 、 y 、 z 方向的长度分别为 dx 、 dy 和 dz 。因为应力分量是 x 、 y 、 z 坐标的函数，所以作用在微小单元体三对面上的应力分量是不同的。

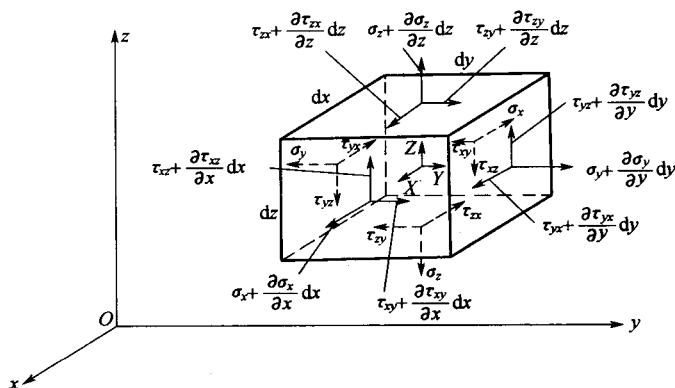


图 1-2 单元体受力分析

在垂直 x 轴的两个面上应力分别为

$$\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz} \text{ 和 } \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx, \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx, \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx;$$

在垂直 y 轴的两个面上的应力分别为

$$\sigma_y, \tau_{yx}, \tau_{yz} \text{ 和 } \sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy, \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy, \tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy;$$

在垂直 z 轴的两个面上的应力分别为

$$\sigma_z, \tau_{zx}, \tau_{zy} \text{ 和 } \sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz, \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz, \tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz;$$

因为正六面体是微小的，各面上所受的应力可以认为是均匀分布，其合力作用在对应面的中心。正六面体上的外力为体力，沿 x 、 y 、 z 轴的分量为 X 、 Y 、 Z 。体力 X 、 Y 、 Z 也可以认为是均匀分布，其合力作用在体积中心。微小单元正六面体的受力情况如图 1-2 所示。

在图 1-2 所示的微正六面体，根据力和力矩的平衡条件可列出三个力的平衡方程和三个力矩的平衡方程。

其中，沿 x 轴的力的平衡方程 $\sum F_x = 0$

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dydz - \sigma_x dydz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy\right) dx dz - \tau_{yx} dx dz$$

$$+\left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz\right) dx dy - \tau_{zx} dx dy + X dx dy dz = 0$$

化简以后，两边同除以 $dx dy dz$ 后得

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0$$

$$\text{同理沿 } y \text{ 轴的力的平衡方程 } \sum F_y = 0 \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0 \quad (1-1)$$

$$\text{沿 } z \text{ 轴的力的平衡方程 } \sum F_z = 0 \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0$$

式(1-1)即为物体的平衡方程式，由这一微正六面体的力矩平衡条件可以导出切应力互等定律

$$\left. \begin{aligned} \sum M_x = 0, \quad \tau_{yz} &= \tau_{zy} \\ \sum M_y = 0, \quad \tau_{zx} &= \tau_{xz} \\ \sum M_z = 0, \quad \tau_{xy} &= \tau_{yx} \end{aligned} \right\} \quad (1-2)$$

2. 几何方程

当物体变形后的各点位移分量确定后，各微元体的应变分量也相应地确定了。所以位移分量与应变分量之间有着密切的关系，而这种关系纯属几何方面的，这将在第二节中给出平面问题几何方程的推导，这里直接给出空间问题的几何方程如下

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (1-3)$$

它给出了六个应变分量和三个位移分量之间的关系。

3. 物理方程（广义虎克定律）

在完全弹性的各向同性体内，应变分量与应力分量之间的关系式，即物理方程，可以由材料力学中已经得到的广义虎克定律给出

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} \\ \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz} \\ \gamma_{zx} &= \frac{1}{G} \tau_{zx} \end{aligned} \right\} \quad (1-4)$$