学新课标教材 用新理念教辅

高中选修系列（人教A版）

教材精析精练

数学 选修1—1

jiao cai jing xi jing lian jiao cai jing xi jing lian

xue xin ke biao jiao cai yong xin li nian jiao fu

人民教育出版社 延边教育出版社

前言 FOREWORD

由人民教育出版社、延边教育出版社联合出版的《教材精析精练》一跃成为全国优秀的教辅精品图书。该丛书率先与新课程、新理念接轨，融入自主、合作、探究学习的全新学习理念，栏目新颖、版式活泼、讲解透彻、科学性强、题目灵活、准确率高、题量适中，能使学生在高效的学习中能力与成绩得到迅猛提升！

丛书策划组兢兢业业，与时俱进，获得了国家课程标准研究专家和人民教育出版社各编辑室的指导，多次赴山东、广东、海南、江苏等高中新课标实验区，与特级教师共同探索高中新课标"自主性""实践性""探究性""趣味性"的教学模式和最贴近新课标理念的评价模式，潜心研究，精心设计编写了高中新课标《教材精析精练》丛书。在浩瀚的教辅市场中，这套丛书具有以下显著的特点：

标准制造——丛书编写以国家教育部颁布的各学科课程标准为纲，以国家教育部教材审定委员会审查通过的各种教材最新版本为依据。国内著名的高中新课程研究专家和人民教育出版社各学科编辑室对高中新课标实验区特级教师的编写工作进行指导并最终审定书稿。

引领潮流——丛书最贴近高中新课标理念，设置多样栏目拓展学生的知识和眼界，为学生构建开放的学习体系，语言表述清新自然，版式流畅活泼，充分尊重学生学习的主体地位。

与时俱进——丛书讲解和练习部分都充分体现当代社会和科技发展，反映各学科的发展趋势，引导学生关注社会、经济、科技和生活中的现实问题。

科学实用——丛书体例设置科学，在"精析"和"精练"上狠下功夫。既充分考虑目前全国高考考试的现状，又真实反映高中课标实验区的教学模式和评价模式。用独到的方法突破教材中的重难点，强调讲解透彻、分析精辟和指导到位。

编写高中新课标学生用书是新时期新的研究课题，本丛书尽管经过国家及实验区特级教师编写和国内著名的教材专家、课程标准研究专家、高中新课标考试研究专家审定，仍需不断完善，恳请专家、读者指正。

丛书主编：周益新

contents 目录

contents

目录

第 1 章　常用逻辑用语

解读　课程标准

新课程内容标准	教材内容	考纲内容
了解命题的逆命题、否命题与逆否命题	1.1 命题及其关系	1. 了解命题及其逆命题、否命题与逆否命题 2. 会分析四种命题的相互关系
理解必要条件、充分条件与充要条件的意义，会分析四种命题的相互关系	1.2 充分条件与必要条件	理解必要条件、充分条件与充要条件的意义
通过数学实例，了解逻辑联结词"或""且""非"的含义	1.3 简单的逻辑联结词	了解逻辑联结词"或""且""非"的含义
1. 通过生活和数学中的丰富实例，理解全称量词与存在量词的意义 2. 能正确地对含有一个量词的命题进行否定	1.4 全称量词与存在量词	1. 理解全称量词与存在量词的意义 2. 能正确地对含有一个量词的命题进行否定

1.1　命题及其关系

1.1.1　命　　题

本节内容主要学习命题的概念、命题的组成以及判断出命题的条件和结论，为今后进一步学习其他知识作准备，在高考中多数以选择题、填空题的形式出现. 本节内容渗透于数学中的各个知识角落，因此在学习中要引起足够的重视.

精析　知识归纳

1. 在数学中，我们把用________________表达的，可以________________的陈述句叫做命题. 其中判断为真的语句叫做____________，判断为假的语句叫做______________.

2. 命题具有________的形式，并且把这种形式的命题中的 p 叫做________________，q 叫做________________.

精析　重难点突破

1. 理解命题概念，掌握判断语句是不是命题的方法

判断一个语句是否为命题，应首先判断它是否为陈述句，再判断它是真还是假，一定要有明确的结论. 因此，命题必须具备两个条件：其一，语句是陈述句；其二，语句有唯一确定的真假意义.

例如：他是三好学生吗？

这里该语句首先不是陈述句，其次我们不能判断其真假，因此这个语句不是命题.

2. 会找出命题的条件和命题的结论

命题，一般是明确给出了条件和结论的命题，即要了解什么是条件，什么是结论，会将一个命题分解成"若 p，则 q"的形式.

例如：指出命题"若两条直线都平行于第三条直线，则这两条直线互相平行"中的条件和结论.

条件 p：两条直线都平行于第三条直线.

结论 q：这两条直线互相平行.

对于简单的，没有明显写成"若 p，则 q"形式的命题，也应分清条件与结论是什么，并能准确地分解成"若 p，则 q"的形式.

例如：将命题"内错角相等"分解成"若 p，则 q"的形式.

条件 p：两个角是内错角.

结论 q：这两个角相等.

找出命题的条件和结论，是学习中的难点. 因为找出一个命题的题设和结论，是对该命题深刻理解的前提，而对命题的理解能力是我们今后研究数学必备的，也是研究其他学科的基础，故是一个重点内容. 理解和掌握一个命题，一定要分清它的题设和结论，所以找出一个命题的题设和结论是十分重要的.

但有些命题，没有写成"若……，则……"的形式，例如，"对顶角相等""等角的余角相等"等，题设和结论不明显. 对于这样的命题，往往容易搞不清哪是题设，哪是结论，又没有一个通用的方法可以套用，要经过分析才能找出题设和结论，才可将它们改写成"若……，则……"的形式. 所以分清题设和结论是一个难点. 因此在学习过程中，要学会从具体到抽象，结合熟悉的事例，来理解命题的概念、找出一个命题的题设和结论，并能判断一些简单命题的真假.

另外，命题的题设（条件）部分，有时也可用"已知……"

或者“如果……”等形式表述;命题的结论部分,有时也可用“求证……”或“那么……”等形式表述.

精练 考点讲练

考查知识点:命题的判断

例1 判断下列语句是否是命题,若是,判断其真假,并说明理由.

(1)$x^2-5x+6=0$;

(2)若 $x=4$,则 $2x<0$;

(3)垂直于同一条直线的两条直线平行吗?

(4)矩形难道不是平行四边形吗?

(5)一个数不是合数就是质数;

(6)求证:若 $x\in\mathbf{R}$,则方程 $x^2-x+1=0$ 无实根.

解析 根据概念“可以判断真假的陈述句叫做命题”,因此,解答本题的关键是抓住能否判断其真假.

(1)不是命题.因为语句中含有变量 x,在不给定变量 x 的值之前,我们无法判断这一语句的真假(这种含有变量的语句称为“开语句”).类似的如:$x>0$,$3x<2y$ 等都是开语句,也都不是命题;

(2)是命题.它是可以作出判断的语句,而且这个判断是不成立的,即我们知道了它的真假.所以它是命题,而且是假命题(判断一语句是否为命题,不能只看它是否能作出判断,还要看它作出的判断能否判断真假);

(3)不是命题.因为并没有对垂直于同一条直线的两条直线平行作出判断,疑问句不是命题.

(4)是命题.通过反诘疑问句对矩形是平行四边形作出判断,它是真命题.(并不是疑问句都不是命题,反诘疑问句想表达的是一个判断句,“难道不是吗?”正说明它表达的是“是”.)

(5)是命题.因为它对一个数给出了一个判断:“不是合数就是质数”,但这个判断是错误的,即可以判断真假,因而是命题,而且是假命题.

(6)不是命题.它是祈使句,没有作出判断,要求我们做一件事,所以不是命题.若把“求证”两字去掉,改写成“若 $x\in\mathbf{R}$,则方程 $x^2-x+1=0$ 无实根.”这就可以成为命题了,而且是真命题.

答案 是命题的有(2)(4)(5),不是命题的有(1)(3)(6).

总结规律 一般能判断真假的陈述句、反诘疑问句都叫做命题.而开语句、祈使句都不是命题.要判断一个命题是真命题,需要给出严格的证明;而要判断一个命题是假命题,只需要举出一个反例即可,不必要进行严格的证明.

在此,再强调一下命题的分类:

真命题:如果由命题的条件 p 通过推理一定可以得出命题的结论 q,那么这样的命题叫做真命题.

假命题:如果由命题的条件 p 通过推理不一定可以得出命题的结论 q,那么这样的命题叫做假命题.

强调:

(1)注意命题与假命题的区别.如:“作直线 AB”.这本身不是命题.也更不是假命题.

(2)命题是一个判断,判断的结果就有对错之分.因此就要引入真命题、假命题的概念,强调真假命题的大前提,首先是命题.

变式题1

判断下列语句是否是命题,并说明理由.

(1)若 $x+y$ 是有理数,则 x,y 都是有理数;

(2)一条直线 l,不是与平面 α 平行就是相交;

(3)$x^2+2x-3<0$;

(4)作$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$;

(5)二次函数的抛物线太完美了!

(6)4 是集合$\{1,2,3\}$的元素.

例2 在下面的下划线上填空,使之构成真命题.

所有__________都__________.

解析 本题是一道开放性题目,一方面要使其是陈述句,另一方面要由条件能够推出结论,这样才能构成真命题.结合学习过的知识,可以有很多这样的真命题.例如:

1. 所有的直角都相等.
2. 所有的正方形都是平行四边形.
3. 所有向量的模都大于或等于零.
4. 所有函数的定义域和值域都不可能为空集.

提升拓展 刚才列出的一些真命题,都是在中学数学中的部分真命题,掌握这些真命题(数学知识)是我们学习数学的基本目标之一.

变式题2

α、β、γ 是两两不重合的平面,m、n 为两两不重合的直线,试在下面的下划线上填空,使之构成真命题.

(1)若__________,则__________.

(2)若__________,则__________.

考查知识点:命题的形式:若 p,则 q

例3 指出下列命题中的条件 p 和结论 q:

(1)如果 a,b,c 成等差数列,则 $2b=a+c$;

(2)如果两个三角形相似,则它们的对应角相等;

(3)偶函数的图象关于 y 轴成轴对称图形;

(4)菱形的对角线互相垂直.

解析 一般而言,“若”“如果”“只要”等后面是条件,

“则”“那么”“就有”等后面是结论，因此：

(1)条件 p：a,b,c 成等差数列，结论 q：$2b=a+c$；

(2)条件 p：两个三角形相似，结论 q：对应角相等；

(3)条件 p：一个函数是偶函数，结论 q：这个函数的图象关于 y 轴成轴对称图形；

(4)条件 p：四边形是菱形，结论 q：四边形的对角线互相垂直.

拓展提升 在写命题的条件和结论时，如果一个命题的条件和结论不很明显，我们可以把它的表述作适当改变，写成“若 p，则 q”的形式，如(3)可改写成：如果一个函数是偶函数，则它的图象关于 y 轴成轴对称图形；(4)可改写成：如果四边形是菱形，则它的对角线互相垂直.

变式题 3

把下列命题改写成“若 p，则 q”的形式，并指出条件与结论.

(1)等边三角形的三个内角相等；

(2)当 $b>0$ 时，函数 $y=bx+a$ 的值随 x 的值的增加而增大.

例 4 把下列命题改写成“若 p，则 q”的形式，并指出 p 能否使 q 成立.

(1)$x^2>1$ 时，$x>1$；

(2)设 A、B 是两个集合，由 $A\cup B=B$ 可知，$A\subseteq B$；

(3)不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是 $\mathbf{R}$ 时，$a>0$，且 $b^2-4ac<0$；

(4)①$x>2$ 时，$|x|>2$，②$|x|>2$ 时，$x>2$；

(5)在$\triangle ABC$ 中，a、b、c 分别是$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的对边，当 $a^2+b^2=c^2$ 时，$\triangle ABC$ 是直角三角形，$\angle C=90°$.

解析 把一个命题改写成“若 p，则 q”的形式，总的要求是把命题写成若条件，则结论的形式. 因此，分清命题的条件与结论至关重要. 至于文字叙述的字里行间用哪些字，还真的没有什么具体要求，文字通顺就可以了，指出 p 能否使 q 成立，就是看改写后的命题中，执因能否索到果. 对于本题：

(1)若 $x^2>1$，则 $x>1$. 不成立. 如：

$x=-2$ 时，$x^2=(-2)^2=4>1$ 但 $x=-2<1$.

(2)设 A、B 是两个集合，若 $A\cup B=B$，则 $A\subseteq B$. 成立.

(3)若不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是 $\mathbf{R}$，则 $a>0$，且 $b^2-4ac<0$. 不成立. 如：

$a=b=0$，$c=1$ 时；

(4)①若 $x>2$，则 $|x|>2$. 成立；②若 $|x|>2$，则 $x>2$. 不成立. 如：$x=-3$ 时，

$|x|=|-3|=3>2$，但 $x=-3<2$.

(5)在$\triangle ABC$ 中，a、b、c 分别是$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的对边，若 $a^2+b^2=c^2$，则$\triangle ABC$ 是直角三角形，且$\angle C=90°$成立.

规律总结 有些命题，书写格式有这样的特点：在条件与结论之前有一段文字叙述，其作用是做好书写命题的前期准备. 如：本例的第(5)小题中，“在$\triangle ABC$ 中，a、b、c 分别是$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的对边”，就属于这类问题. 对这样的命题进行改写时，这段文字叙述仍需保留下来，否则，将出现命题中的对象不明确等后果.

变式题 4

把下列命题改写成“若 p，则 q”的形式：

(1)末位是 0 的整数，可以被 5 整除；

(2)线段的垂直平分线上的点与这条线段两个端点的距离相等；

(3)等式两边都乘以同一个数，所得结果仍是等式；

(4)到圆心的距离不等于半径的直线不是圆的切线.

精练·体验探究

例 5 设 I 是全集，非空集合 P、Q 满足 $P\subseteq Q\subseteq I$. 若含 P、Q 的一个集合运算表达式，使运算结果为空集$\varnothing$，则这个表达式可以是________________.

解析 对于这个问题，我们可以按命题的形式来理解，就是在 I 是全集，非空集合 P、Q 满足 $P\subseteq Q\subseteq I$ 的前提下，如果满足这个表达式，那么其运算结果为空集$\varnothing$，要填充的就是相当于命题的条件. 那么这个条件是什么呢？

不妨先画出集合 P、Q 和 I 的韦恩图，如图 1.1.1-1，从中就可以看出三个集合之间的关系. 利用它们的关系构造集合表达式，使之运算结果为空集. 如$(\complement_I Q)\cap P=\varnothing$，$((\complement_I Q)\cap P)\cap P=\varnothing$等.

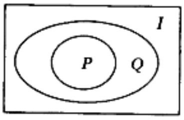

图 1.1.1-1

点评 要解答该问题，首先应了解集合的运算：交、并、补，同时应注意利用韦恩图有效地解决问题. 此外本题也可从两方面进行拓展，一方面是将集合的数量扩展四个或更多，另一方面也可构造若干个集合，经过若干次运算后结果为$\varnothing$. 如下面写出的三个集合 A，B，C，经过交、并运算得到的结果为$\varnothing$.

$A=\{x|2x-1>0\}$，$B=\{x|x>1\}$，$C=\{x|x<-1\}$，$(A\cup B)\cap C=\varnothing$.

精练 自主测评

双基复习巩固

1. 下列语句是命题的是 ( )

A. $|x+a|$　　B. $\{0\}\in\mathbf{N}$

C. 元素与集合　　D. 真子集

2. 下列语句中，不是命题的是 ( )

A. 两点之间线段最短

B. 互补的两个角相等

C. 不是对顶角不相等

D. 延长线段 AB

3. 下列命题中真命题是 ( )

A. 互余的两个角不相等

B. 相等的两个角是同位角

C. 若 $a^2=b^2$，则 $|a|=|b|$

D. 三角形的一个外角等于和它不相邻的一个内角

4. 若 A,B 是两个集合，则下列命题中的真命题是 ( )

A. 如果 $A\subseteq B$，那么 $A\cap B=A$

B. 如果 $A\cap B=A$，那么 $(\complement_U A)\cap B=\varnothing$

C. 如果 $A\subseteq B$，那么 $A\cup B=A$

D. 如果 $A\cup B=A$，那么 $A\subseteq B$

5. 下列命题是假命题的是 ( )

A. 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，那么 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$

B. 若 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$

C. 若 $ac^2>bc^2$，则 $a>b$

D. $5>3$

6. 命题“邻补角的平分线互相垂直”的条件是________________，结论是________________. 这个命题是真命题还是假命题：________________.

7. 命题“一个数的相反数比它本身小”是________命题，若为假命题，举出反例：________________________________.

能力综合提升

8. 与命题“若 $m\in M$，则 $n\notin M$”等价的命题是 ( )

A. 若 $m\notin M$，则 $n\notin M$

B. 若 $n\notin M$，则 $m\in M$

C. 若 $m\notin M$，则 $n\in M$

D. 若 $n\in M$，则 $m\notin M$

9. 有下列命题：

①$mx^2+2x-1=0$ 是一元二次方程；

②抛物线 $y=ax^2+2x-1$ 与 x 轴至少有一个交点；

③互相包含的两个集合相等；

④空集是任何集合的真子集.

其中真命题的个数为 ( )

A. 1 个　　B. 2 个

C. 3 个　　D. 4 个

10. (2006・广东)给出以下四个命题：

①如果一条直线和一个平面平行，经过这条直线的平面和这个平面相交，那么这条直线和交线平行；

②如果一条直线和一个平面内的两条相交直线都垂直，那么这条直线垂直于这个平面；

③如果两条直线都平行于一个平面，那么这两条直线相互平行；

④如果一个平面经过另一个平面的一条垂线，那么这两个平面相互垂直.

其中真命题的个数是 ( )

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

11. 写出命题“若方程 $ax^2-bx+c=0$ 的两根均大于零，则 $ac>0$”的一个等价命题是________________，其真假性是________________.

12. 指出下列命题的条件和结论，并判断命题的真假.

(1)等角的补角相等；

(2)两边分别平行的两个角相等或互补.

13. 将下列命题改写成“如果……，那么……”的形式，并判断其真假，是假命题则举一反例.

(1)两直线不平行，内错角不相等；

(2)两个锐角的和大于直角.

14. 将下列命题改写成“若 p，则 q”的形式，并判断其真假.

(1)偶数能被 2 整除；

(2)奇函数的图象关于原点对称；

(3)正方形既是矩形又是菱形；

(4)实数的平方非负；

(5)同弧所对的圆周角不相等.

15. 给出下列三个命题：

①若 $a \geqslant b > -1$，则 $\frac{a}{1+a} \geqslant \frac{b}{1+b}$；

②若正整数 m 和 n 满足 $m \leqslant n$，则 $\sqrt{m(n-m)} \leqslant \frac{n}{2}$；

③设 $P(x_1, y_1)$ 为圆 $O_1: x^2+y^2=9$ 上任一点，圆 O_2 以 $Q(a,b)$ 为圆心且半径为 1. 当 $(a-x_1)^2+(b-y_1)^2=1$ 时，圆 O_1 与圆 O_2 相切.

其中假命题的个数为 （　　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

16. 设 α, β, γ 为两两不重合的平面，l, m, n 为两两不重合的直线，给出下列四个命题：

①若 $\alpha \perp \gamma, \beta \perp \gamma$，则 $\alpha /\!/ \beta$；

②若 $m \subset \alpha, n \subset \alpha, m /\!/ \beta, n /\!/ \beta$，则 $\alpha /\!/ \beta$；

③若 $\alpha /\!/ \beta, l \subset \alpha$，则 $l /\!/ \beta$；

④若 $\alpha \cap \beta = l, \beta \cap \gamma = m, \gamma \cap \alpha = n, l /\!/ \gamma$，则 $m /\!/ n$.

其中真命题的个数是 （　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

精选 视野延伸

数学是什么？

数学是一门高度抽象、推理严谨、应用广泛的学科. 在数学体系中，只有从公理出发，被严格证明了的东西才被认为是正确的. 而依赖于实验所取得的一切结论都有待于证明，这与实验性强的学科，如物理、化学等学科有着本质的区别. 数学是体现逻辑最彻底的学科，尤其是在几何分支上，通过数学证明的教学，学生能以花费较少的精力而获取培养逻辑思维能力的较大收获，因此要重视数学证明的教学.

另外，演绎推理虽然是数学证明的主要手段，并贯彻于数学教学的全过程；但另一方面，归纳、类比、联想等非演绎思想对培养学生提出问题、分析问题、解决问题能力的作用也不可低估. 我们应该在数学证明的教学中强调“演绎思想与非演绎思想相结合”. 换言之，数学证明中的演绎法与归纳法、综合法与分析法、直接证法与间接证法不可只强调一面而忽视另一方面. 能否根据材料的特点、学生的认知规律的特点、揭示知识发生的过程的特点，选择数学证明的方法，实际上是区别教师教学水平的标志.

数学证明在数学课程上的功能不仅在于判断命题的真假，也在于它能启发人们对命题有更深刻的理解，并导致发现.

知识归纳提示

1. 语言、符号或式子；判断真假；真命题；假命题
2. “若 p，则 q”；命题的条件；命题的结论

1.1.2 四种命题

本节主要学习原命题、逆命题、否命题、逆否命题这四种命题的概念，掌握四种命题的形式，并能根据给出的一个比较简单的命题(原命题)，写出它的逆命题、否命题和逆否命题，并会初步判断四种命题的真假.

精析 知识归纳

1. 对于两个命题，如果一个命题的____________分别是另一个命题的____________，那么我们把这样的两个命题叫做____________，其中一个命题叫做____________，另一个叫做____________.

2. 如果将一个已知的条件和结论互换，就可以得到这个已知命题的____________，也即若原命题为“若 p，则 q”，那么它的逆命题为____________.

3. 如果一个命题的条件和结论恰好是另一个命题的条件的否定和结论的否定，我们把这样的两个命题叫做____________. 如果把其中的一个命题叫做原命题，那么另一个叫做原命题的____________，即若原命题为“若 p，则 q”，那么它的否命题为____________.

4. 如果一个命题的条件和结论恰好是另一个命题的结论的否定和条件的否定，则把这样的两个命题叫做____________. 如果把其中的一个命题叫做原命题，那么另一个叫做原命题的____________，即若原命题为“若 p，则 q”，那么它的逆否命题为____________.

精析 重难点突破

1. 如何写出原命题的逆命题、否命题和逆否命题

(1)如果原命题的形式就是“若 p,则 q”,则其逆命题为:“若 q,则 p”;否命题为:“若 $\neg p$,则 $\neg q$”;逆否命题为:“若 $\neg q$,则 $\neg p$”.

(2)当原命题不是“若 p,则 q”的形式时,首先应该将命题写成规范形式,然后再进行书写.

例如:写出命题“奇函数的图象关于原点对称”的逆命题、否命题和逆否命题. 由于原命题不是以“若 p,则 q”的形式出现,因此首先应将命题“奇函数的图象关于原点对称”改写成“若函数 $f(x)$ 是奇函数,那么 $f(x)$ 的图象关于原点对称”,这样就可以顺利地写出这个命题的逆命题、否命题和逆否命题了. 即:

逆命题:若函数 $f(x)$ 的图象关于原点对称,那么 $f(x)$ 是奇函数;

否命题:若函数 $f(x)$ 不是奇函数,那么 $f(x)$ 的图象不关于原点对称;

逆否命题:若函数 $f(x)$ 的图象不关于原点对称,那么 $f(x)$ 不是奇函数.

2. 否命题与命题的否定

否命题与命题的否定是两个不同的概念,不能混淆. 若 p 表示命题,则 $\neg p$ 叫做命题的否定,也即如果原命题是“若 p,则 q”,那么这个命题的否定就是“若 p,则 $\neg q$”,即命题的条件不变,结论变为其否定形式. 而原命题的否命题是“若 $\neg p$,则 $\neg q$”,它既否定条件,又否定结论.

精练 考点讲练

考查知识点:命题的逆命题、否命题与逆否命题

例 1 写出命题“同位角相等,两直线平行”的逆命题、否命题和逆否命题.

解析 先找清条件和结论,再依据四种命题的定义即可求解. 显然原命题的条件是:同位角相等,结论是:两直线平行,于是原命题的另外三种形式的命题如下:

逆命题:若两直线平行,则同位角相等;

否命题:若同位角不相等,则两直线不平行;

逆否命题:若两直线不平行,则同位角不相等.

方法总结 定义是解题的根本. 交换原命题的条件和结论,所得的命题就是它的逆命题;同时否定原命题的条件和结论,所得的命题就是它的否命题;交换原命题的条件和结论,并且同时否定,所得的命题就是它的逆否命题.

另外还需强调的是:原命题与逆命题、原命题与否命题、原命题与逆否命题是相对的.

变式题 1

请写出命题“若一个数是负数的平方,则这个数是正数”的逆命题、否命题和逆否命题.

例 2 将下列命题写成“若 p,则 q”的形式,并指出它们的逆命题、否命题和逆否命题.

(1)两条平行直线不相交;

(2)全等三角形相似;

(3)菱形的对角线互相垂直平分.

解析 先找出原命题的条件 p 和结论 q,再根据题目要求,适当将命题的语句作些调整和补充,并将原命题改写成“若 p,则 q”的形式,然后根据命题的四种形式的定义来表达其他形式的命题.

答案 (1)原命题:若 l_1 与 l_2 是平行直线,则 l_1 与 l_2 不相交;

逆命题:若直线 l_1 与 l_2 不相交,则 l_1 与 l_2 平行;

否命题:若直线 l_1 与 l_2 不平行,则 l_1 与 l_2 相交;

逆否命题:若直线 l_1 与 l_2 相交,则 l_1 与 l_2 不平行.

(2)原命题:若两个三角形全等,则这两个三角形相似;

逆命题:若两个三角形相似,则这两个三角形全等;

否命题:若两个三角形不全等,则这两个三角形不相似;

逆否命题:若两个三角形不相似,则这两个三角形不全等.

(3)原命题:若四边形 $ABCD$ 是菱形,则对角线 AC,BD 互相垂直平分;

逆命题:若四边形 $ABCD$ 的对角线 AC,BD 互相垂直平分,则四边形 $ABCD$ 是菱形;

否命题:若四边形 $ABCD$ 不是菱形,则对角线 AC,BD 不互相垂直平分;

逆否命题:若四边形 $ABCD$ 的对角线 AC,BD 不互相垂直平分,则四边形 $ABCD$ 不是菱形.

要点提示 解此类题的难点在于有的命题是由三部分组成的,即有前提、条件、结论. 正确地分析命题的前提、条件是解决问题的关键.

变式题 2

(1)“等腰三角形两底角相等”的逆命题__________;

(2)“直角三角形两直角边的平方和等于斜边的平方”的否命题是__________;

(3)命题“a、b 都是偶数,则 $a+b$ 是偶数”的逆否命题是__________.

例 3 判断下列命题的真假，并写出它的逆命题、否命题和逆否命题，同时也判断这些命题的真假.

(1)若 $a>b$，则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$；

(2)若一个式子是等式，则它的两边都乘以同一个数，所得结果仍是等式；

(3)若圆心到直线的距离等于半径，则该直线是圆的切线；

(4)若四边形的对角互补，则该四边形是圆的内接四边形.

解析 依据四种命题的定义来解题.

答案 (1)该命题为假命题，这是因为当 $a>0,b<0$ 时，$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$.

逆命题"若 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，则 $a>b$"为假($b>0,a<0$ 时)；

否命题"若 $a\leqslant b$，则 $\frac{1}{a}\geqslant\frac{1}{b}$"为假($b>0,a<0$ 时)；

逆否命题"若 $\frac{1}{a}\geqslant\frac{1}{b}$，则 $a\leqslant b$"为假($a>0,b<0$ 时).

(2)该命题为真命题，这是等式的性质.

逆命题"若两个式子都乘以同一个数，所得结果相等，则这两个式子相等"为假，如把 x 和 x^2+1 都乘以 0 后相等，但 $x\neq x^2+1$；

否命题"若两个式子不相等，则把它们都乘以同一个数，所得结果也不相等"为假命题；

逆否命题"若两个式子都乘以同一个数，所得的结果不相等，则这两个式子也不相等"为真命题.

(3)该命题为真命题.

逆命题"若直线是圆的切线，则圆心到直线的距离等于半径"为真命题；

否命题"若圆心到直线的距离不等于半径，则该直线不是圆的切线"为真命题；

逆否命题"若直线不是圆的切线，则圆心到直线的距离不等于半径"为真命题.

(4)该命题为真命题.

逆命题"若四边形是圆的内接四边形，则四边形的对角互补"为真命题；

否命题"若四边形的对角不互补，则该四边形不是圆的内接四边形"为真命题；

逆否命题"若四边形不是圆的内接四边形，则四边形的对角不互补"为真命题.

总结规律 原命题的真假与其他三种命题的真假有如下关系：

①原命题为真，它的逆命题不一定为真.

②原命题为真，它的否命题不一定为真.

③原命题为真，它的逆否命题一定为真.

原命题为假时类似.

于是结合以上练习可以发现：原命题与逆否命题总是具有相同的真假性，逆命题与否命题也总是具有相同的真假性. 至于一个命题的逆命题、否命题与逆否命题之间是否还存在着一定的关系，我们下节内容将继续进行研究.

变式题 3

写出下列命题的逆命题、否命题和逆否命题，并判断这些命题的真假.

(1)三角形的两边之和不小于第三边；

(2)若 $a>b$，则 $b<a$.

考查知识点：命题的否定与否命题

例 4 写出下列命题的否定及其否命题：

(1)正 n 边形($n\geqslant3$)的 n 个内角全相等；

(2)末位数字是 0 或 5 的整数，能被 5 整除；

(3)零的平方等于 0.

解析 本题的关键是弄清命题的否定，即"非 p"与否命题的区别，其中命题的否定是指对命题的结论加以否定，而否命题却是对命题的条件和结论都加以否定.

答案 (1)命题的否定：正 n 边形($n\geqslant3$)的 n 个内角不全相等.

否命题：非正 n 边形($n\geqslant3$)的 n 个内角不全相等.

(2)命题的否定：末位数字是 0 或 5 的整数，不能被 5 整除.

否命题：末位数字不是 0 也不是 5 的整数，不能被 5 整除.

(3)命题的否定：零的平方不等于 0.

否命题：不等于零的数的平方不等于 0.

归纳方法 否命题与命题的否定是不同的. 若 p 表示命题，"非 p"叫做命题的否定.

如果原命题是"若 p，则 q"，那么原命题的否定是"若 p，则 $\neg q$"，即只否定结论，而原命题的否命题是"若 $\neg p$，则 $\neg q$"，即既否定条件又否定结论.

变式题 4

写出下列各命题的否定形式及命题的否命题，并分别判断它们的真假.

(1)面积相等的三角形是全等三角形；

(2)有些质数是奇数；

(3)所有的方程都不是不等式；

(4)自然数的平方是正数.

精练 体验探究

四种形式的命题不是孤立存在的,它们之间是有内在联系的,知其一可知其三,关键是要找出原命题的条件 p 和结论 q,再按逆命题、否命题的定义写出相应的命题.

例5 设"若 $x^2+y^2\neq0$,则 x、y 至少有一个不为 0"是命题 A 的逆否命题,请写出 A,并写出 A 的逆命题、否命题.

解析 因为原命题与其逆否命题互为逆否命题,所以,"若 $x^2+y^2\neq0$,则 x、y 至少有一个不为 0"的逆否命题就是 A. 现在的问题是"x、y 至少有一个不为 0"的否定是什么呢?

从两个角度来研究"x、y 至少有一个不为 0"的否定:

(1) x、y 至少有一个不为 0,它的否定是"x、y 中,一个不为 0 的也没有,那就是 x、y 都为 0";

(2) x、y 至少有一个不为 0,可以分成三类,即 $\begin{cases}x\neq0,y=0\\x=0,y\neq0\\x\neq0,y\neq0\end{cases}$,就 x、y 是否为 0 而言,x、y 总共有三类,

即 $\begin{cases}\text{两者都是 }0:x=0,y=0;\\\text{一个是 }0\text{,另一个不是 }0\text{,即 }x=0,y\neq0\text{ 或 }x\neq0,y=0;\\\text{两者都不是 }0:x\neq0,y\neq0.\end{cases}$

所以,"x、y 至少有一个不为 0"的否定是 $x=0,y=0$.

根据上面的理解,所以有 A:若 $x=0,y=0$,则 $x^2+y^2=0$;A 的逆命题:若 $x^2+y^2=0$,则 $x=0,y=0$;A 的否命题:若 $x\neq0,y\neq0$,则 $x^2+y^2\neq0$.

提要示点 数学中,与"至少""至多"等有关的问题是难点,解决这些问题,要有很好的积累才行.

精练 自主测评

双基复习巩固

1. 命题"若 a 是有理数,则 $a+\sqrt{5}$是无理数"的逆命题是 ( )

A. 若 $a+\sqrt{5}$是无理数,则 a 是有理数

B. 若 a 是有理数,则 $a+\sqrt{5}$是有理数

C. 若 a 不是有理数,则 $a+\sqrt{5}$是有理数

D. 若 $a+\sqrt{5}$不是无理数,则 a 不是有理数

2. "若 P,则 Q"为原命题,那么它的逆否命题是 ( )

A. 若 $\neg P$,则 $\neg Q$　　B. 若 Q,则 P

C. 若 $\neg Q$,则 $\neg P$　　D. 不一定有

3. 命题:若 $a\neq0$,则 $ab\neq0$,则该命题的否命题和逆否命题的真假分别是 ( )

A. 真、假　B. 假、真　C. 真、真　D. 假、假

4. 命题"若 $a\notin A$,则 $b\in B$"的否命题是 ( )

A. 若 $a\notin A$ 则 $b\notin B$　　B. 若 $a\in A$ 则 $b\notin B$

C. 若 $a\in A$ 则 $b\in B$　　D. 若 $a\notin A$ 则 $b\notin B$

5. 关于命题"平行四边形的两组对边分别相等",下列论述中,正确的是 ( )

A. 逆命题是假命题　　B. 否命题是假命题

C. 逆否命题是真命题　　D. 以上答案都不正确

6. 写出命题"在$\triangle ABC$ 中,若 $AB>AC$,则$\angle C>\angle B$"的逆命题、否命题和逆否命题,并判断其真假.

7. 将命题"正偶数不是质数"改写成"若 p,则 q"的形式,并写出它的逆命题、否命题和逆否命题,并判断其真假.

能力综合提升

8. 下列命题:

①"若 $x^2+y^2=0$,则 x,y 全是 0"的否命题;

②"全等三角形是相似三角形"的否命题;

③"若 $m>1$,则 $mx^2-2(m+1)x+(m-3)>0$ 的解集为 $\mathbf{R}$"的逆命题;

④"若 $a+5$ 是无理数,则 a 是无理数"的逆否命题.

其中为真命题的是 ( )

A. ①②③　B. ①④　C. ②③④　D. ①③④

9. 给定下列命题:

①方程 $x^2+x-a=0$ 无实根,则 $a<0$;②"若 $a>b$,则$ac^2>bc^2$"的逆命题;③"若 $xy=0$,则 x,y 中至少有一个为 0"的否命题. 其中真命题有 ( )

A. 3 个　B. 2 个　C. 1 个　D. 0 个

10. 命题"若 $a>b$,则 $2^a>2^b-1$"的否命题是________.

11. 按题后的要求构造命题:

(1)垂直于弦的直径平分这条弦(逆命题);

(2) a,b 都是偶数,则 $a+b$ 为偶数(否命题);

(3)当 $c>0$ 时,若 $a>b$,则 $ac>bc$(逆命题).

12. “已知 a,b,c,d 是实数,若 $a>c,b>d$,则 $a+b>c+d$”,写出上述命题的逆命题、否命题和逆否命题,并分别判断其真假.

13. 给出一个命题 M,它的前提为 $x_1\neq x_2$,其条件、结论形成的过程是:

条件 $p:x_1,x_2\in A=\left\{x\in\mathbf{Q}\mid x=\sqrt{t}+t^2-\frac{2}{t},t=1,2,3,4\right\}$;

结论:$q:kx_1-\frac{x_2}{k+1}>\frac{104}{3}$,其中$\sqrt{3}<k<2\sqrt{2}$,且 $k\in\mathbf{N}$.

试写出 M,并判断 M 的真假.

精选 视野延伸

逆命题的制作方法

1. 当命题的条件和结论都是一个简单命题时,只要将它们互换位置就可以得到原命题唯一的一个逆命题. 例如,命题“对顶角相等”,它的逆命题是“相等的角是对顶角”,这个逆命题显然是不正确的.

2. 当命题的条件和结论不只是一个简单命题时,将命题条件和结论中的简单命题任意进行交换位置,就可以得到多个逆命题. 例如,原定理“圆内垂直平分弦的直线必过圆心且平分该弦所对的弧”,不难得到它的五个逆定理:

圆内过圆心且平分弦的直线必垂直该弦且平分该弦所对的弧;

圆内平分弦和这弦所对弧的直线必过圆心且垂直该弦;

圆内过圆心且垂直弦的直线必平分该弦和该弦所对的弧;

圆内垂直弦且平分该弦所对弧的直线必过圆心且平分该弦;

圆内过圆心且平分弦所对弧的直线必垂直平分该弦.

知识归纳提示

1. 条件和结论;结论和条件;互逆命题;原命题;原命题的逆命题

2. 逆命题;“若 q,则 p”

3. 互否命题;否命题;若 $\neg p$,则 $\neg q$

4. 互为逆否命题;逆否命题;若 $\neg q$,则 $\neg p$

1.1.3 四种命题间的相互关系

通过上节内容的学习,我们已经初步知道:当原命题为真时,它的逆命题不一定为真,它的否命题不一定为真,它的逆否命题一定为真. 本节我们将继续学习一个命题的真假与其他三个命题真假间的关系,即进一步学习四种命题的关系及真假判断方法.

精析 知识归纳

四种命题的真假性,有而且仅有下面四种情况:

原命题	逆命题	否命题	逆否命题
真	真	真	真
真	假	假	真
假	真	真	假
假	假	假	假

由于逆命题和否命题也是互为逆否命题,因此这四种命题的真假性之间的关系如下:

(1)两个命题互为________,它们有________真假性;

(2)两个命题为互逆命题或互否命题,它们的________没有关系.

精析 重难点突破

1. 四种命题之间的相互关系

四种命题之间的相互关系如图 1.1.3-1 所示.

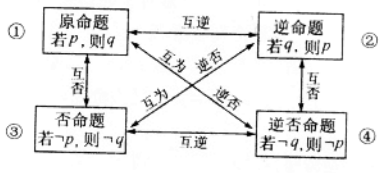

图 1.1.3-1

规感律悟 命题的四种形式中,哪一个是原命题是相对的,不是绝对的. 如上图中若④是原命题,那么它相应的逆命题、否命题和逆否命题就应该是③、②、①.

2. 能用原命题与逆否命题的等价性间接证明有关问题

由于原命题与其逆否命题具有相同的真假性，所以四个命题中正确的个数应该是0或2或4.

此外，在直接证明某一问题比较困难时，可以通过证明它的逆否命题为真命题，间接地证明原命题为真命题.

例如：证明"若$a^2+2ab+b^2+a+b-2\neq 0$，则$a+b\neq 1$".

我们可以证明该命题的逆否命题：即："若$a+b=1$，则$a^2+2ab+b^2+a+b-2=0$"，证明过程自己试一试！要相信自己！

3. 反证法

证明方法分为直接证法和间接证法. 其中间接证法中有一种重要的证明方法——反证法，它的理论依据是互为逆否命题的两个命题是等价命题，将原命题的证明转化为它的逆否命题来证明，即要证明某一结论A是正确的，但不直接证明，而是先去证明A的反面(非A)是错误的，从而断定A是正确的，反证法就是通过否定命题的结论而导出矛盾来达到肯定命题的结论，完成命题的论证的一种数学证明方法.

反证法的步骤：

(1)假设命题的结论不成立，即假设结论的反面成立.

(2)从这个假设出发，通过推理论证，得出矛盾.

(3)由矛盾判定假设不正确，从而肯定命题的结论正确.

注意：可能出现的矛盾有四种情况：

①与题设矛盾；②与反设矛盾；③与公理、定理矛盾；

④在证明过程中，推出自相矛盾的结论.

精练 考点讲练

考查知识点：原命题与逆否命题、逆命题与否命题的等价性(同真假)

例1 命题"若$x=y$，则$|x|=|y|$"，写出它的逆命题、否命题、逆否命题，并判断它的真假.

解析 如果说前面我们判断四种命题的真假，还需要对每一个命题的正确性进行一一验证的话，那么现在我们就可以通过原命题与逆否命题、逆命题和否命题之间的等价性来处理了，即只需对其中的两个命题(原命题和逆命题、否命题和逆否命题)进行判断即可. 于是对于原命题"若$x=y$，则$|x|=|y|$"，显然这是个真命题，那么其逆否命题也是真命题；其逆命题是"若$|x|=|y|$，那么$x=y$"，显然当$x=1$，$y=-1$时，$|x|=|y|$，但$x\neq y$，这是假命题，从而否命题也是假命题.

答案 逆命题：若$|x|=|y|$，则$x=y$，这是假命题；

否命题：若$x\neq y$，则$|x|\neq|y|$，这是假命题；

逆否命题：若$|x|\neq|y|$，则$x\neq y$，这是真命题.

总结规律 两个互为逆否的命题同真或同假(如原命题和它的逆否命题，逆命题和否命题)，其余情况则不一定同真或同假(如原命题和逆命题，否命题和逆否命题等)，这时称互为逆否的两个命题等价，即原命题⇔逆否命题.

变式题1

判断命题"当$m<1$时，抛物线$y=x^2+2x+m$与x轴存在交点"的逆否命题的真假.

例2 判断命题"若$m>0$，则$x^2+x-m=0$有实根"的逆否命题的真假.

解析 本题可以直接进行逻辑推理判断，也可以借助集合关系判断. 可以从逆否命题直接判断，也可以先判断原命题的真假，然后利用原命题与逆否命题的关系使问题获解.

答案 解法一：∵$m>0$，∴$4m>0$，∴$4m+1>0$. ∴方程$x^2+x-m=0$有实根，所以原命题"若$m>0$，则$x^2+x-m=0$有实根"为真命题. 又因为原命题与它的逆否命题等价，所以原命题的逆否命题也为真命题.

解法二：原命题"若$m>0$，则方程$x^2+x-m=0$有实根"的逆否命题为"若方程$x^2+x-m=0$无实根，则$m\leqslant 0$".

∵方程$x^2+x-m=0$无实根，即$\Delta=4m+1<0$，解得$m<-\frac{1}{4}\leqslant 0$，所以"若方程$x^2+x-m=0$无实根，则$m\leqslant 0$"为真命题.

解法三：设p：$m>0$，q：$x^2+x-m=0$有实数根，则p：$A=\{m|m>0\}$，q：$B=\{m|$方程$x^2+x-m=0$有实数根$\}=\left\{m\middle|m\geqslant-\frac{1}{4}\right\}$. 显然当$m\in A$时，必有$m\in B$，即"若$p$，则$q$"为真命题. 又因为原命题与逆否命题等价，即"若$\neg p$，则$\neg q$"为真命题.

解法四：设p：$m>0$，q：$x^2+x-m=0$有实数根，则$\neg p$：$m\leqslant 0$，$\neg q$：$x^2+x-m=0$无实数根，所以$\neg p$：$A=\{m|m\leqslant 0\}$，$\neg q$：$B=\{m|$方程$x^2+x-m=0$无实数根$\}=\left\{m\middle|m<-\frac{1}{4}\right\}$.

同理$B\subseteq A$，所以"若$\neg p$，则$\neg q$"为真命题. 即"若方程$x^2+x-m=0$无实根，则$m\leqslant 0$"为真.

总结方法 直接判断一个命题的真假有困难时，往往还可以改为判断其逆否命题的真假. 因为原命题与它的逆否命题是等价命题. 另外解法三和解法四，是利用集合的包含关系进行求解.

变式题2

判断命题"已知a、x为实数，如果关于x的不等式$x^2+(2a+1)x+a^2+2\leqslant 0$的解集非空，则$a\geqslant 1$"的逆否命题的真假.

考查知识点:反证法

例 3 空间四点 A、B、C、D 不在同一平面内,则直线 AB 和直线 CD 既不相交也不平行.

解析 直接证明该问题比较困难,但注意此命题的逆否命题为:如果空间两条直线 AB 和直线 CD 相交或平行,则四点 A、B、C、D 在同一平面内.由平面的基本性质可以知道该命题的逆否命题显然成立.但本题用反证法也很简单,证明如下:

如果直线 AB 和 CD 相交或平行,则这两条直线确定一个平面,设这个平面为 α,则 $AB\subset\alpha$,$CD\subset\alpha$,所以 $A\in\alpha$,$B\in\alpha$,$C\in\alpha$,$D\in\alpha$,即四个点 A、B、C、D 同在平面 α 内,这与已知条件 A、B、C、D 不在同一平面内相矛盾.

所以 AB 和 CD 既不相交也不平行.

总结方法 对于一个具体问题,究竟怎么证明,没有一个具体的模式,这就应该具体问题具体分析.一般地,下面这些情况适宜用反证法:

①当问题的已知条件较少,从这些条件能推出所知的也很少,或者无法用已知条件来进行直接证明,此时适宜用反证法;

②当问题中能用来作为推理依据的公理、定理很少,无法直接证明,或是证明无从着手,此时适宜用反证法;

③当问题的结论以否定的形式出现,无法引用定理来证明否定形式的结论,此时适宜用反证法;

④如果要证明的命题已知它的逆命题是正确的,此时适宜用反证法;

⑤如果问题要求证明适合某种条件的结论是唯一存在的,此时适宜用反证法.

变式题 3

若 a 是整数,a^2 能被 2 整除,求证:a 也能被 2 整除.

例 4 如图 1.1.3-2,在三角形 ABC 中,$AB=AC$,P 为这个三角形内一点,且 $\angle APB>\angle APC$,求证:$\angle BAP<\angle CAP$.

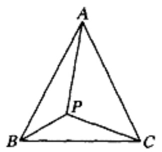

图 1.1.3-2

解析 因为根据条件 $AB=AC$,$\angle APB>\angle APC$,无法得到结论 $\angle BAP<\angle CAP$,即已知条件无法利用,故考虑用反证法.题中结论的反面有两种情形:$\angle BAP=\angle CAP$ 以及 $\angle BAP>\angle CAP$,只有将这两种情况一一驳倒,原命题的结论才能成立.

答案 假设 $\angle BAP$ 不小于 $\angle CAP$,必然有 $\angle BAP=\angle CAP$ 或 $\angle BAP>\angle CAP$.

当 $\angle BAP=\angle CAP$ 时,显然有三角形 BAP 与三角形 CAP 全等,所以 $\angle APB=\angle APC$,这与假设条件矛盾,故 $\angle BAP\neq\angle CAP$.

当 $\angle BAP>\angle CAP$ 时,则 $BP>PC$,故 $\angle PBC<\angle PCB$.又 $\angle ABC=\angle ACB$,所以 $\angle ABP>\angle ACP$,所以 $\angle BAP+\angle ABP>\angle CAP+\angle ACP$,所以 $\angle APB<\angle APC$,这也与所给条件矛盾,所以 $\angle BAP>\angle CAP$ 不成立.

综上所述,$\angle BAP<\angle CAP$.

总结方法 用反证法证题时,首先对原结论的否定要正确,其次要选好推理方向.有时事先并不清楚证明过程中将导致什么类型的矛盾,而是随着证明过程的进展才逐渐发现矛盾的.因此,在证明时应对过程中第一步得出的结果加以注意,用已知条件及已有的公理、定理、定义等,用假设及前面已得结果,对比新得出的结果,矛盾一旦出现,及时捕捉.

变式题 4

用反证法证明:圆的两条不是直径的相交弦不能互相平分.

精练 体验探究

一般地,当题目中所涉及的原命题包含的情形较多,而直接求解十分繁琐时,往往考虑原命题的否命题,运用否命题可简化计算,这也就是否命题与逆否命题在解题中的灵活运用问题.例如:

例 5 若下列关于 x 的三个方程:$x^2-ax+4=0$,$x^2+(a-1)x+16=0$,$x^2+2ax+3a+10=0$ 中至少有一个方程有实根,求实数 a 的取值范围.

分析 从"三个方程中至少有一个方程有实根"的否命题"三个方程都无实根"来考虑,因此,若三个方程都无实根,

则 $\begin{cases}a^2-16<0,\\(a-1)^2-64<0,\\4a^2-4(3a+10)<0.\end{cases}\Rightarrow -2<a<4$,故三个方程中至少有一个方程有实根时,实数 a 的取值范围是 $a\leqslant-2$ 或 $a\geqslant4$.

上述解法相当于在必修 1 中所学的"补集法".类似地,请读者试解下面一题:

已知二次函数 $y=mx^2+(m-3)x+1$ 的图象与 x 轴的交点至少有一个在原点的右侧,求实数 m 的取值范围.

答案 $m\in(-\infty,0)\cup(0,1]$

精练 自主测评

双基复习巩固

1. 命题"a、b 都是奇数,则 $a+b$ 是偶数"的逆否命题是(　　)

A. a、b 都不是奇数,则 $a+b$ 是偶数

B. $a+b$ 是偶数,则 a、b 都是奇数

C. $a+b$ 不是偶数,则 a、b 都不是奇数

D. $a+b$ 不是偶数,则 a、b 不都是奇数

2. 命题"若 $a>b$,则 $ac^2>bc^2$"(这里 a、b、c 都是实数)与它的逆命题、否命题、逆否命题中,真命题的个数为 ( )

A. 4 个 B. 3 个 C. 2 个 D. 0 个

3. 对以下四个命题判断正确的是 ( )

(1)原命题:若一个自然数的末位数字为零,则这个自然数被 5 整除.

(2)逆命题:若一个自然数能被 5 整除,则这自然数末位数字为零.

(3)否命题:若一个自然数的末位数字不为零,则这个自然数不能被 5 整除.

(4)逆否命题:若一个自然数不能被 5 整除,则这个自然数末位数字不为零.

A. (1)与(3)为真,(2)与(4)为假

B. (1)与(2)为真,(3)与(4)为假

C. (1)与(4)为真,(2)与(3)为假

D. (1)与(4)为假,(2)与(3)为真

4. 命题"若 $A\cup B=A$,则 $A\cap B=B$"的否命题是 ( )

A. 若 $A\cup B\neq A$,则 $A\cap B\neq B$

B. 若 $A\cap B=B$,则 $A\cup B=A$

C. 若 $A\cap B\neq A$,则 $A\cup B\neq B$

D. 若 $A\cup B=B$,则 $A\cap B=A$

5. 下列说法:

(1)四种命题中真命题的个数一定是偶数.

(2)若一个命题的逆命题是真命题,则它的否命题一定是真命题.

(3)逆命题与否命题之间是互为逆否的关系.

(4)若一个命题的逆否命题是假命题,则它的逆命题与否命题都是假命题.

其中正确的有 ( )

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

6. 若命题 p 的逆命题是 q,命题 r 是命题 q 的否命题,则 p 是 r 的________命题.

7. 命题"若 x,y 是奇数,则 $x+y$ 是偶数($x\in\mathbf{Z}$, $y\in\mathbf{Z}$)"的逆否命题是________________,它是________命题(填"真"或"假").

能力综合提升

8. 下列命题:

(1)"全等三角形的面积相等"的逆命题.

(2)"正三角形的三个角均为 60°"的否命题.

(3)"若 $k<0$,则方程 $x^2+(2k+1)x+k=0$ 必有两相异实根"的逆否命题.

(4)"若 $ac^2\geqslant bc^2$,则 $a\geqslant b$"的逆命题.

其中真命题是 ( )

A. (1)(2)(4) B. (2)(3)(4)

C. (2)(3) D. (2)(4)

9. 用反证法证明命题:"$a,b\in\mathbf{N}$,ab 能被 5 整除,那么 a,b 中至少有一个能被 5 整除"时,假设的内容是 ( )

A. a,b 都能被 5 整除

B. a,b 都不能被 5 整除

C. a,b 不都能被 5 整除

D. a 不能被 5 整除,或 b 不能被 5 整除

10. 反证法的证明过程中,假设的内容是 ( )

A. 原命题的否命题 B. 原命题的逆命题

C. 原命题的逆否命题 D. 原命题结论的否定

11. "已知 a、b、c 是实数,如果不等式 $ax^2+bx+c\leqslant 0$ 的解集非空,那么 $b^2-4ac\leqslant 0$"这个命题与它的逆命题、否命题、逆否命题中,有________个假命题.

12. 写出下列命题的逆命题、否命题和逆否命题,并判断它们的真假.

(1)两条平行线不相交;

(2)两条对角线不相等的平行四边形不是矩形;

(3)若 $x\geqslant 10$,则 $2x+1>20$.

13. 判断下列命题的真假.

(1)"若 $ab=0$,则 a、b 中至少有一个为零"的否命题;

(2)"若 $ac=bc$,则 $a=b$"的逆命题.

14. 用反证法证明:一个三角形中,不能有两个钝角或直角.

15. 求证：一元二次方程最多有两个不相等的实根.

16. 若 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的增函数，对命题"若 $a+b\geqslant 0$，则 $f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$".

(1)写出其逆命题，判断其真假，并证明你的结论；

(2)写出其逆否命题，判断其真假，并证明你的结论.

精选 视野延伸

小 故 事

三个古希腊哲学家，由于争论和天气炎热感到疲倦了，于是在花园里的一棵大树下躺下来休息一会，结果都睡着了. 这时一个爱开玩笑的人用炭涂黑了他们的前额. 三个人醒来以后，彼此看了看，都笑了起来. 但这并没引起他们之中任何一个人的担心，因为每个人都以为是其他两人在互相取笑. 这时其中有一个突然不笑了，因为他发觉自己的前额也给涂黑了. 那么他是怎样觉察到的呢？你能想出来吗？

答案：为了方便，用甲、乙、丙分别代表三个科学家，并不妨设甲已发觉自己的前额给涂黑了. 那么甲这样想：我们三个人都可以认为自己的前额没被涂黑，如果我的前额没被涂黑，那么乙能看到(当然对于丙也是一样)，乙既然看到了我的前额没给涂黑，同时他又认为他的前额也没给涂黑，那么乙就应该对丙的发笑而感到奇怪. 因为在这种情况下(甲、乙的脸都是干净的)，丙没有可笑的理由. 然而现在的事实是乙对丙的发笑并不感到奇怪，可见乙是在认为丙在笑我. 由此可知，我的前额也给涂黑了.

这里应着重指出的是，甲并没有直接看到自己的前额是否给涂黑了，他是根据乙、丙两人的表情进行分析、思考，而证明了自己的前额给涂黑了：简单地说，甲是通过说明前额被涂黑了的反面——没被涂黑是错误的，从而觉察了自己的前额被涂黑了. 因此这是一种间接的证明方法. 显然这种证明方法也是不可缺少的.

像这样，为了说明某一个结论是正确的，但不从正面直接说明，而是通过说明它的反面是错误的，从而断定它本身是正确的方法，就叫做"反证法".

知识归纳提示

(1)逆否命题；相同的；(2)真假性

1.2 充分条件与必要条件

1.2.1 充分条件与必要条件

前面我们学习了命题的定义和形式、四种命题以及四种命题之间的相互关系，由于充分条件、必要条件都是讨论命题中的条件和结论的关系的，因此对前面的所学知识必须要深刻认真掌握. 同时由于原命题与逆否命题、逆命题与否命题都是两者同真或同假，因此互为逆否的两个命题是等价的，而具有等价关系的命题在推理中可以互相代换，所有这些是理解好充分条件、必要条件的前提和基础，因此在学习本节内容时要注意与前面所学知识的联系.

精析 知识归纳

"若 p，则 q"为真命题，是指由 p 通过推理可以得出 q，即由 p 可推出 q，记作________，并且说 p 是 q 的________，q 是 p 的________.

精析 重难点突破

1. 符号"⇒"的含义

前面我们讨论了"若 p，则 q"形式的命题，其中有的命题为真，有的命题为假. "若 p，则 q"为真，是指由 p 经过推理可