李登信　梁久忠　著

CAYLEY图与超EULER图

中国科学技术出版社

李登信　梁久忠　著

CAYLEY图与超EULER图

中国科学技术出版社
·北　京·

图书在版编目(CIP)数据

CAYLEY 图与超 EULER 图/李登信，梁久忠著.-北京：中国科学技术出版社，2006.7

ISBN 7－5046－4447－1

Ⅰ.C… Ⅱ.①李…②梁… Ⅲ.图论 Ⅳ.0157.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 082754 号

中国科学技术出版社出版
北京市海淀区中关村南大街 16 号　邮政编码：100081
电话：010-62103210　传真：010－62183872
科学普及出版社发行部发行　新千年印制有限公司印刷
*
开本：787 毫米×1092 毫米　1/16　印张：12　字数：190 千字
2006 年 11 月第 1 版　2006 年 11 月第 1 次印刷
册数：1—1000 册　定价：36.00 元

前　　言

为解决哥尼斯堡(konigsberg)七桥问题,1736年数学家欧拉(L.Euler)发表了第一篇图论论文。

1736年被认为是图论的诞生年,图论也因此成为确切知道诞生年份的少数几个学科之一。1986年,国际著名的图论杂志(J.Graph Theory)曾发文纪念图论诞生250周年。

由于计算机的广泛应用,图论在近半个世纪以来得到了飞速的发展。图论作为一门应用数学学科,为含有二元关系的所有系统提供离散数学模型。图论已广泛应用于计算机科学、物理学、化学、运筹学、电子学、经济学、控制论、网络理论、管理学等几乎所有的学科领域,运用图论的理论和方法,在这些学科中取得了丰硕的成果。另一方面,这些学科的发展也刺激了图论的进步。图论与其他数学分支相互渗透,建立了紧密的联系,也使图论有了长足的发展。现代图论已发展出许多分支,如基础图论、算法图论、极值图论、随机图论、代数图论等。图论已成为应用数学的重要组成部分,许多高等学校的数学专业也相继开设了图论课,已出版了多种图论教科书(见本书第一章参考文献)。图论的发展方兴未艾。

本书不是图论的基础教材,它主要介绍图论的两个专题:超Euler图与Cayley图的Hamilton性。许多内容直接从最近的研究论文中选取。

第一章为图论基础,介绍图论的最基本的概念和理论。其并非图论专门教材,只是为尚未学过图论的读者提供图论的一些最基本的术语和记号,以及本书要用到的图论的一些基本定理。并罗列了图论的一些常见习题及解答,希望能使读者对图论的一些最基本的方法和技巧有一定的了解。

第二章介绍超Euler图的两个基本问题:超Euler图的判定问题及Euler生成子图的边数问题。超Euler图与次Euler图是Euler图的自然延伸。1977年,F.T.Boesch,C.Suffel及R.Tindell等人提出超Euler图判定问题以后,许多学者从事超Euler图的判定工作,已发表相关论文数百篇。这些研究者中,应特别提

到美国 Wayne 州立大学教授、著名数学家 P.A.Catlin 和他的学生赖虹建教授(美国 West Virginia 大学)、陈志宏教授(美国 Butler 大学)等人,他们为超 Euler 图的研究作出了卓越的贡献,完成了十分出色的研究工作。20 世纪 90 年代初以来,赖虹建(Hong - Jian Lai)教授多次来我校访问,给我们带来了超 Euler 图研究的最新成果和资料,带动了我校教师对超 Euler 图问题的研究。本章介绍 Catlin 的简化图方法及超 Euler 图的"判定问题"、"边数问题"的若干最新研究成果,希望能引起读者的兴趣。

第三章介绍 Cayley 图的基本概念及性质。阅读本章需要初等群论及图论的基础知识。Cayley 图作为定义在群上的图,它给出了图与群之间的一个联系。1970 年,匈牙利数学家 L.Lovasz 提出猜想:每一个点传递图存在 Hamilton 路。其后不久,对于特殊的点传递图——Cayley 图,许多学者把上述猜想改写为"每个连通的 Cayley 图存在 Hamilton 圈"。此问题提出三十多年来,虽然有许多人从事这一问题的研究,但进展甚微,仅对一些特殊的图类解决了上述猜想。目前,该猜想仍是一个十分困难的公开问题。本章主要介绍笔者近二十年来对该问题的一些研究成果,希望能为感兴趣的研究者提供一点参考。

本书中介绍的作者的研究工作是在国家自然科学基金(NO.19871066, NO.10171074)、重庆市教委科研基金、重庆工商大学(渝州大学)科研基金的资助下完成的。

本书的出版得到重庆工商大学出版基金资助。

重庆工商大学应用数学学科的同事们,对本书的出版给予了热情的关心与帮助。

我的两位青年朋友李霄民、王斌,阅读了部分原稿,提出了一些修改意见。

在此,谨向他们一并表示衷心的感谢。

鉴于作者水平有限,本书难免有疏漏和错误,敬请读者指正。

作者

2005 年 8 月 22 日于重庆工商大学理学院

目 录

第一章　图论基础

为方便读者阅读本书的几个专题,本章介绍图论的一些基本知识,并试图通过对一些定理证明的介绍,使读者了解图论的一些基本方法和技巧。本章中介绍的图论的一些定义和定理,在本书以后的专题中也会用到。应该说明的是,本章不是图论的专门教材,因此,图论中尚有一些基本内容未被提及。本章内容主要取材于文献[1]、文献[2]、文献[3]。欲对图论的基本理论作较全面了解的读者,亦请阅读上述文献。

§1 图的定义及相关概念

设 A 是一个有限集,用 A^k 表示 A 的所有 k 元子集组成的集合。注意,$A^2 \neq A \times A$(A 的笛卡尔积),例如,若 $a,b \in A$ 但 $(a,a) \overline{\in} A^2$,并且 $(a,b)=(b,a)$。

定义 1.1 图的定义:设 V 是一个有限集,$E \subseteq V^2$,称 $G=(V,E)$ 是一个图,其中 V 表示图 G 的顶点集,E 表示图的边集;V 的每个元素称为图的顶点,E 的每个元素称为图的边。

若图 G 的顶点集为 V,我们把图 G 称为 V 上的图。

图的表示:设 $G=(V,E)$ 是一个图,V 的每个元素用平面上一个点表示;若 V 的二元子集 $(u,v) \in E$,则用一条线连接 u 点 v 点。

例 1.1 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_8\}$,$E=\{(v_1,v_2),(v_1,v_3),(v_2,v_4),(v_3,v_5),(v_3,v_4),(v_2,v_7),(v_5,v_6),(v_7,v_8)\}$(图 1.1)。

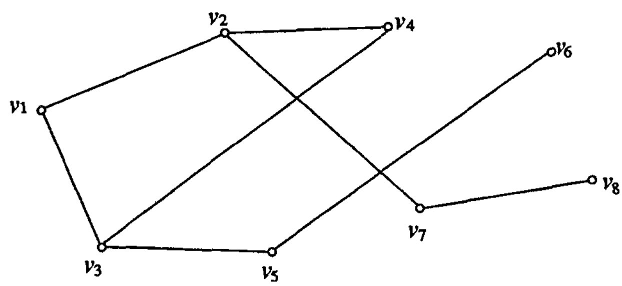

图 1.1 图的表示

下面介绍图的一些常用记号及相关概念。

定义 1.2 给定 V 上的图 $G=(V,E)$。

(1)图 G 的顶点集用 $V(G)$ 表示,简记为 V。图 G 的边集用 $E(G)$ 表示,简记为 E。点 v 是图 $G=(V,E)$ 的顶点,用 $v \in G$ 或 $v \in V$ 表示;边 e 是图 $G=(V,E)$ 的一条边,用 $e \in G$ 或 $e \in E$ 表示。

(2)图 $G=(V,E)$ 的顶点数,称为图 G 的阶,记为 $|V|$;边数用 $|E(G)|$ 或 $|E|$ 表示。阶为 1 的图称为平凡图。本书只讨论有限阶图。

(3) $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$,边 $e \in G$,即 $e=(v_i,v_j)$;常把边 e 记为 $e=v_iv_j$,v_i、v_j 称为边 e 的端点,这时点 v_i,v_j 称为在 G 中相邻接;边 e 与点 v_i,v_j 称为相关联;两边 e_1,e_2 若有一个公共端点,则称边 e_1,e_2 相邻。

(4)点 v 的邻域:所有与点 v 相邻接的点组成的集合,用 $N(v)$表示。类似地,所有与点 v 相关联的边组成的边集,用 $E(v)$表示。注意,点 $v \overline{\in} N(v)$。点集 $N(v)\cup\{v\}$称为点 v 的闭邻域。若 $S\subset V$,记 $N(S)=\bigcup_{v\in S}N(v)$称为 S 的邻域。

(5) 设 $G=(V,E)$,$G'=(V',E')$是两个简单图。如果在 V 与 V'之间存在一个一一映射$\psi:V\to V'$,使得 $xy\in E\Leftrightarrow\psi(x)\psi(y)\in E'$,则称 G 与 G'同构,记为 $G\cong G'$。我们把同构的图视为同一个图,若 $G\cong G'$,则直接写成 $G=G'$。

(6)图的并与交:设 $G=(V,E)$,$G'=(V'、E')$,定义 $G\cup G'=(V\cup V',E\cup E')$; $G\cap G'=(V\cap V',E\cap E')$。

当 $G\cap G'=\phi$ 时,称 G 与 G'是不交的。当 $E\cap E'=\phi$ 时,称 G 与 G'是边不交的。

(7)设 $G=(V,E)$,$G'=(V',E')$,若 $V'\subseteq V$ 且 $E'\subseteq E$,则称 G'是 G 的子图,G 称为 G'的超图(母图),记为 $G'\subseteq G$。若 $G'\subseteq G$,且 $V'=V$,则称 G'是 G 的生成子图。若 $V'\subseteq V$,$E'=\{uv\in E\mid u,v\in V'\}$,则称图 $G'=(V',E')$是 G 的由 V'导出的子图,记为 $G'=G[V']$。同样,若 $E'\subseteq E$,$V'=\{v\in V\mid v$ 是 E'中某边的端点$\}$,则称 $G'=(V',E')$是 G 的由边集 E'导出的子图,记为 $G'=G[E']$。

(8)设 $G=(V,E)$,$V'\subset V$,$E'\subset E$。用 $G-V'$表示 $G[V\setminus V']$即 $G-V'$是在 G 中去掉 V'中的点及与 V'中的点关联的边而得到的图。当 $V'=\{v\}$时,用 $G-v$ 表示 $G-\{v\}$。同样,用 $G-E'$表示图 G 中去掉 E'中的边而得到的图。当 $E'=\{e\}$时,用 $G-e$ 表示 $G-\{e\}$。

(9)设 $G=(V,E)$,则称图 $K_n=(V,\ V^2)$为完全图,其中 $n=|V|$;称图 $\overline{G}=(V,V^2-E)$为 G 的补图。

(10)$G=(V,E)$的线图 $L(G)$:对 G 的每一条边 e_i,对应于 $L(G)$的一个点 v_i;$L(G)$中的两个点 v_i,v_j 相邻接当且仅当 v_i,v_j 对应的边 e_i,e_j 在 G 中相邻。这样由 G 确定的图 $L(G)$称为 G 的线图。

(11)简单图、多重图、伪图:在图的定义中,V^2 不是 V 与 V 的笛卡尔积;即 $(v,v)\overline{\in} V^2$,$(v,u)=(u,v)$;故我们定义的图不含环(即两端点重合的边),也不含重边(即连结两点多于一条边),这样的图称为简单图。有重边的图称为多重

图;允许有环和重边的图称为伪图。

(12)标定图:把图的顶点标上不同的符号,得到标定图;显然,一个图有多种不同的标定方式。

(13)设 $G_1=(V_1,E_1)$,$G_2=(V_2,E_2)$是两个点不交的图,定义 $G_1+G_2=(V_1\cup V_2,E_1\cup E_2\cup E_3)$,这里 $E_3=\{uv\mid u\in V_1,v\in V_2\}$。

(14)赋权图:给定图 $G=(V,E)$,用 $\omega(e)$表示定义在 E 上的一个非负函数;$\forall e\in E$, $\omega(e)$称为边 e 的权;每条边给定了权的图称为赋权图。

§2 顶点的度(次)数

设有图 $G=(V,E)$。$v\in V$,在图 G 中以 v 为端点的边的数目称为点 v 在图 G 中的度数(次数),简称为点 v 的度(次),记为 $d_G(v)$,在不致引起混淆的情况下,常记为 $d(v)$。

对简单图,$d(v)=|N(v)|$。

$d(v)=1$,则点 v 称为悬挂点。与悬挂点关联的边称为悬挂边。度为零的点称为孤立点。度为奇数的点称为奇顶点,简称奇点;度为偶数的点称为偶顶点,简称偶点。

用 $\delta(G)$表示图 G 的最小度数,即

$\delta(G)=\min\{d(v)\mid v\in V\}$。

用$\triangle(G)$表示图 G 的最大度数,即

$\triangle(G)=\max\{d(v)\mid v\in V\}$。

图 G 的平均度记为 $d(G)$,即

$$d(G)=\frac{1}{|V|}\sum_{v\in V}d(v)$$

显然有:$\delta(G)\leqslant d(G)\leqslant\triangle(G)$。

若$\forall\, v\in V,d(v)=k,k$ 为正整数,则称 G 为 k—正则图。

有时我们用 $\varepsilon(G)$表示图 G 的边数与点数的比,即

$\varepsilon(G)=|E|/|V|$。

容易推出:$\varepsilon(G)=\frac{1}{2}d(G)$

$$\sum_{v\in V}d(v)=2|E|$$

定理 2.1 图 G 中有偶数个奇顶点。

定理 2.2 设 G 的边数大于零,则 G 存在子图H,使 $\delta(H)>\varepsilon(H)\geqslant\varepsilon(G)$。

例 2.1 设 $V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$,则称 $d(v_1),d(v_2),\cdots,d(v_n)$为图 G 的度(次)序列。证明:非负整数序列 $d_1,d_2,\cdots,d_n$ 是一个图(非简单图)的度序列当且仅当$\sum_{i=1}^{n}d_i$为偶数。

证明 必要性显然。

充分性：因为$\sum_{i=1}^{n} d_i$为偶数，故 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 中有偶数个奇数，不妨设 $d_1, d_2, \cdots, d_{2k}$为奇数。把 n 个点标上 $d_1, d_2, \cdots, d_n$。点 d_1, d_2 连一条边，点 d_3, d_4 连一条边，……，点 d_{2k-1}, d_{2k} 连一条边，然后用经过点 v 的环来增加点 v 的度数，即可得到一个序列为 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 的图。一般来说，该图不是简单图。

§3 通道、迹、路、圈

设 $G=(V,E)$是给定的图。图 G 中点、边交错的序列 $W=(v_0,e_1,v_1,e_2,v_2,\cdots,e_k,v_k)$并有边 $e_i=v_{i-1}v_i$, $i=1,2,\cdots,k$,称 W 为一条连结 v_0 与 v_k 的通道;若边 e_i 互不相同,则称 W 为一条迹,若点 v_i 互不相同,则称 W 为一条路。

图 $P=(V',E')$是一条路当且仅当 $V'=\{v_0,v_1,\cdots,v_k\}$, $E'=\{v_0v_1,v_1v_2,\cdots,v_{k-1}v_k\}$。

我们常把路记为 $P=v_0v_1\cdots v_k$,称为从点 v_0 到 v_k 的一条路,路中所含边的数目称为路长,长为 k 的路记为 P_k。当路的起点和终点重合时,得到一个圈。圈中所含边的数目称为圈长,长为 k 的圈,称为 k—圈,记为 C_k。

路的表示是直观的。

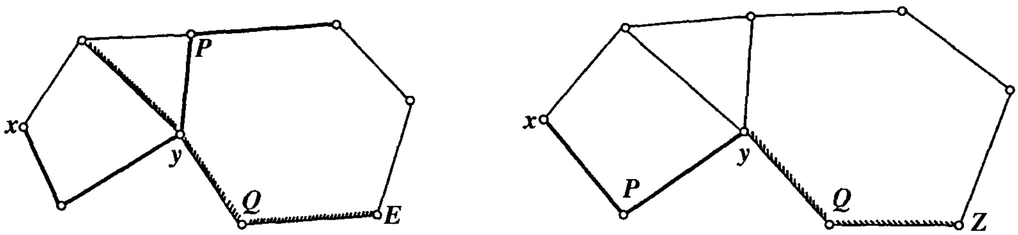

图 3.1 路 P、Q 及路 $xPyQz$

图 G 的最小圈长称为围长,记为 $g(G)$。

图 G 的最大圈长称为周长,记为 $c(G)$。

图 G 中,连结两点 u,v 的最短路的长称为点 u,v 的距离,记为 $d_G(u,v)$,简记为$d(u,v)$。

定义图的直径为:

$diam(G)=\max\{d(u,v)\mid u,v\in V(G)\}$。

定理 3.1 设 $\delta(G)\geqslant 2$,则图 G 中含有长为$\delta(G)$的路及长至少为 $\delta(G)+1$ 的圈。

证明 设 $P=v_0v_1v_2\cdots v_k$ 是G 的一条最长路,则 $N(v_k)\subset V(P)$,于是 $k\geqslant d(v_k)\geqslant\delta(G)$。若 i 是使得$v_iv_k\in E(G)$的最小的 i,则 $v_iv_{i+1}\cdots v_kv_i$ 是一个长至少为 $\delta(G)+1$ 的圈。(图 3.2)

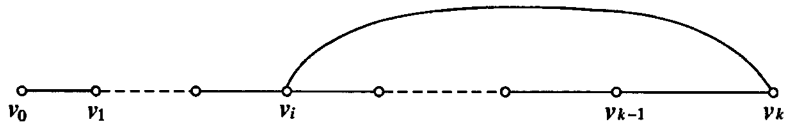

图 3.2　G 的最长路 P

定理 3.2　设图 G 含有圈，则 $g(G) \leqslant 2diam(G)+1$。

证明　用反证法。

设 P_1、P_2 是图 G 的两条路，若除端点外，没有公共点，则称 P_1 与 P_2 是内部点不交的。

若图 G 中任意两点均存在一条连接这两点的路，则称图 G 是连通的，否则 G 是不连通的。容易证明，图 G 的顶点关于连通所产生的关系是等价关系。由此得到的每个等价类，称为图 G 的连通分支。不连通图所含连通分支的数目，称为 G 的分支数，记为 $\omega(G)$。

G 是连通图当且仅当 $\omega(G)=1$。

我们常常称路 $P=uv_1v_2\cdots\cdots v_kv$ 是一条 (u,v)—路，或 $(u—v)$ 路。

§4　树与图的连通性

定义 4.1　不含圈的连通图称为树。

一般来说,不含圈的图称为林;林的每一分支是一棵树。树通常记为 $T=(V,E)$。

定理 4.1　设 $T=(V,E)$,$|V|\geqslant 2$,则 T 至少有两个悬挂点。

证明　利用极大性原则。

设 $P=uv_1v_2\cdots v_kv$ 是 T 中的一条最长路,则点 u,v 必是悬挂点。实际上,若 $d(u)\geqslant 2$,则存在 $w\in N(u)$且 $w\neq v_1$, $w\in V(P)$,产生了圈,矛盾。

定理 4.1 常常用到,特别是在用数学归纳法作证明时:一棵树去掉它的一个悬挂点及其关联的边得到的图仍然是一棵树。

定理 4.2　图 $G=(V,E)$是一棵树,则$|E|=|V|-1$。

证明　对点数$|V|$进行归纳。

$|V|=1, G=K_1, |E|=0=|V|-1$。

设定理对点数小于$|V|$的树成立。设$|V|\geqslant 2$, u 是 G 的一个悬挂点,则 $G-u$是$|V|-1$ 个点的树,由归纳假设,$|E(G-u)|=(|V|-1)-1$,于是$|E(G)|=|E(G-u)|+1=|V|-1$。由归纳法,定理证毕。

定理 4.3　若 T 是树,则

(1) T 中任意两点被唯一的一条路连结。

(2) T 是连通图,但去掉一边,恰好有两个连通分支。

(3) T 是无圈图,但添加一边,恰好有一个圈。

定理 4.4　下列关于图 $G=(V,E)$是一棵树的定义等价。

(1) 图 G 是不含圈的连通图;

(2) 图 G 无圈,并且$|E|=|V|-1$;

(3) 图 G 连通,并且$|E|=|V|-1$。

定义 4.2　边 e 是图 G 的一条割边当且仅当$\omega(G-e)>\omega(G)$。

定理 4.5　e 是图 G 的一条割边当且仅当 e 不含在 G 的圈中。

证明　设 e 是 G 的一条割边,因为 $\omega(G-e)>\omega(G)$,存在 G 的两点 u 和 v 在 G 中连通,但在$(G-e)$中不连通。故在 G 中存在一条(u,v)—路 P 经过边

e,设 $e=xy$,且在路 P 上 x 在 y 之前。在$(G-e)$中,通过 P 的一段把 u 连结到 x,通过 P 的一段把 y 连结到 v。若 e 在 G 的圈 C 上,则在$(G-e)$中,x 与 y 由路 $C-e$ 连通,于是 u,v 在 $G-e$ 中连通,矛盾。

反过来,设 e 不是割边,即 $\omega(G-e)=\omega(G)$,因为在 G 中存在一条(x,y)—路(即边 xy),x,y 在同一个分支中,也即 x,y 在$(G-e)$的同一个分支中,所以在$(G-e)$中存在一条(x,y)—路 P,那么 $P+e$ 是 G 的圈,矛盾。

证毕。

定理 4.6 连通图 G 是树当且仅当 G 的每一条边是割边。

定理 4.7 每一个连通图包含一棵生成树。

推论 4.1 若图 $G=(V,E)$是连通的,则$|E|\geq|V|-1$。

定义 4.3 点 v 是 G 的割点当且仅当$\omega(G-v)>\omega(G)$。

定理 4.8 树 T 的一个点 v 是割点当且仅当 $d(v)>1$。

定义 4.4 点割与边割的概念。设 $G=(V,E)$是连通图。

(1)设 G 不是完全图,若 $V_1\subset V$ 使 $G-V_1$ 不连通,则称 V_1 是 G 的点割。$|V_1|=k$,也称 V_1 是一个 k—点割。若点 u,v 在 $G-V_1$ 的不同分支中,则称 V_1 是分离 u、v 点的点割。

(2)点连通度 $\kappa(G)$:

$$\kappa(G)=\begin{cases}\min\{|V_1|\},\text{若 } G\neq K_n\\ n-1, \quad\quad\ \text{若 } G=K_n\end{cases}$$

这里对 G 的所有点割取最小。

若点割 V_1 满足$|V_1|=\kappa(G)$,则称 V_1 为最小点割。若 G 不是连通图,则 $\kappa(G)=0$。

对于非负整数 k,若 $\kappa(G)\geq k$,则称 G 是 k—点连通图。显然,若 G 是 k—点连通图,那么 G 也是$(k-1)$—点连通图。一般来说,$\kappa(G)$是使连通图 G 不连通,必须去掉的最少点数。

(3)若 $E_1\subset E$,$G-E_1$ 不连通,则称 E_1 是 G 的一个边割。G 的边连通度 $\kappa'(G)$定义为:

$$\kappa'(G)=\begin{cases}\min\{|E_1|\},\text{若 } G\neq K_1\\ 0 \quad\quad\quad\ \ ,\text{若 } G=K_1\end{cases}$$