高职高专公共基础课“十一五”规划教材

高等数学

黄振波 主 编
赵振杰 许旼 侯爱华 副主编

中国科学技术出版社
CHINA SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

高职高专公共基础课“十一五”规划教材

高 等 数 学

黄振波 **主 编**
赵振杰 许 昄 侯爱华 **副主编**

中国科学技术出版社
CHINA SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS
·北 京·
BEIJING

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/黄振波主编.—北京:中国科学技术出版社,2007.8

高职高专公共基础课“十一五”规划教材

ISBN 978-7-5046-4794-8

Ⅰ.高… Ⅱ.黄… Ⅲ.高等数学-高等学校:技术学校-教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 129974 号

内容提要

本书包括极限、导数与微分、导数的应用、积分及应用、多元函数微积分、无穷级数等内容。结合当前职业教育的特点,在教材编写中突出重点、分散难点、深入浅出、图文并茂,同时淡化了定理证明,注重几何、物理解释。用实例引入抽象概念,例题丰富且针对性强,注重定理和基本公式的应用,重点培养学生的动手应用能力、基本运算能力。

本书适合作为高职院校、大专院校在校学生的教材以及工程技术人员的参考用书。

中国科学技术出版社出版

北京市海淀区中关村南大街 16 号　邮政编码:100081

策划编辑	林　培　孙卫华	**责任校对**	林　华
责任编辑	林　培　符晓静	**责任印制**	安利平

电话:010-62103210　传真:010-62183872

http://www.kjpbooks.com.cn

科学普及出版社发行部发行

北京蓝空印刷厂印刷

*

开本:787 毫米×1092 毫米　1/16　印张:7.875　字数:200 千字

2007 年 8 月第 1 版　2007 年 8 月第 1 次印刷　定价:14.20 元

ISBN 978-7-5046-4794-8/O·134

前　言

本教材是针对高职院校各专业高等数学课程的具体情况，按照“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则，以“理解基本概念、掌握运算方法及应用”为依据，结合数学课程教学改革的实际情况和教学经验编写的。

本书切合当前职业教育的特点，起点较低，以平缓的教学进度，逐步提升学生的数学文化素质与数学感悟能力，在对教材内容的处理上，注意精简数学理论，避免冗长的论证，强调对基本概念的理解，注重用实例引入抽象概念；力求深入浅出，把握好推理和运算能力的深度；立足“好教、好学”。

本书由黄振波同志主编，副主编为赵振杰、许旼、侯爱华。费妮娜、刘睿琼等同志参与编写，林敏先生进行了审阅并提出了宝贵意见，对本书的顺利出版给予了极大的帮助，在此表示感谢。限于编者的水平，书中难免有欠妥之处，敬请读者批评、指正。

西安理工大学数学系唐平教授主审本书并提出了许多宝贵意见，在此谨致谢忱。

编　者

2007 年 5 月

目　录

第一章　极限 …… 1
　第一节　数列及其极限 …… 1
　第二节　函数的极限 …… 2
　第三节　无穷大量与无穷小量 …… 4
　第四节　极限存在准则　两个重要极限 …… 4
　第五节　函数极限的四则运算 …… 5
　第六节　无穷小的比较 …… 6
　第七节　函数的连续与间断 …… 7
　第八节　闭区间上连续函数的性质 …… 8
　习题一 …… 8
第二章　一元函数微分学 …… 11
　第一节　导数的概念 …… 11
　第二节　导数的运算法则 …… 16
　第三节　隐函数的导数　由参数方程所确定的函数的导数 …… 19
　第四节　函数的微分 …… 21
　习题二 …… 25
第三章　导数的应用 …… 29
　第一节　罗必塔法则 …… 29
　第二节　函数的单调性与极值 …… 31
　第三节　曲线的凹凸性与拐点　函数图形的描绘 …… 37
　习题三 …… 41
第四章　一元函数积分学 …… 44
　第一节　不定积分的概念与性质 …… 44
　第二节　不定积分的换元积分法 …… 47
　第三节　不定积分的分部积分法 …… 49
　第四节　定积分的概念 …… 51
　第五节　定积分的基本性质 …… 54
　第六节　微积分基本公式 …… 56
　第七节　定积分的换元积分法 …… 59
　第八节　定积分的分部积分法 …… 60
　习题四 …… 61
第五章　积分的应用 …… 66
　第一节　定积分的元素法 …… 66
　第二节　平面图形的面积 …… 67

第三节　体积 …… 69
第四节　常微分方程简介 …… 72
习题五 …… 79
第六章　多元函数微分法及应用 …… 81
第一节　空间解析几何简介 …… 81
第二节　多元函数的基本概念 …… 85
第三节　偏导数 …… 89
第四节　多元复合函数的求导法则 …… 92
第五节　隐函数的求导公式 …… 93
第六节　多元函数的极值 …… 94
习题六 …… 96
第七章　多元函数积分法 …… 100
第一节　二重积分的概念与性质 …… 100
第二节　直角坐标系中二重积分的计算法 …… 103
习题七 …… 106
第八章　级　数 …… 108
第一节　常数项级数的概念和性质 …… 108
第二节　常数项级数的审敛法 …… 109
第三节　幂级数 …… 112
第四节　傅立叶级数 …… 115
习题八 …… 119

第一章　极　限

第一节　数列及其极限

一、预备知识

1. 邻域

设 a 与 ε 是两个实数，且 $\varepsilon>0$，则满足不等式 $|x-a|<\varepsilon$ 的全体实数 x 叫做点 a 的 ε 邻域，点 a 叫做该邻域的中心，ε 叫做该邻域的半径. 显然 $|x-a|<\varepsilon$ 等价于 $a-\varepsilon<x<a+\varepsilon$，即开区间 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$. 故点 a 的 ε 邻域是以为 a 中心，长度为 2ε 的开区间. 满足不等式 $0<|x-a|<\varepsilon$ 的实数 x 的全体叫做点 a 的去心 ε 邻域.

2. 复合函数

定义：如果 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，且 $\varphi(x)$ 的函数值全部或部分落在 $f(u)$ 的定义域内，那末 y 通过 u 的联系也是 x 的函数，称此函数是由 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 复合而成的函数，简称复合函数，记为 $y=f[\varphi(x)]$，u 称为中间变量.

例如 $y=(\sin x)^2$ 可看成 $y=u^2$ 及 $u=\sin x$ 复合而成，且复合函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，它也是 $u=\sin x$ 的定义域. 又例如 $y=\sqrt{1-x^2}$ 可看成是 $y=\sqrt{u}$ 及 $u=1-x^2$ 复合而成，其定义域为 $[-1,1]$，它只是 $u=1-x^2$ 的定义域的一部分.

必须注意，不是任何两个函数都能复合，例如：$y=\sqrt{u}$，$u=-x^2-1$ 是不能复合的，因为 $u=-x^2-1$ 的值域都在 $y=\sqrt{u}$ 的定义域之外. 此外，也可以由两个以上的函数构成复合函数. 例如：$y=\sqrt{u}$，$u=\cot v$，$v=\dfrac{x}{2}$ 可复合成 $y=\sqrt{\cot\dfrac{x}{2}}$，这里的 u，v 都是中间变量.

又如 $y=[\cos(x^2+1)]^2$ 可分解为 $y=u^2$，$u=\cos v$，$v=x^2+1$. 复合函数的拆分是以后学习复合函数导数的基础.

3. 初等函数

指数函数、对数函数、幂函数、三角函数、反三角函数及常数函数统称为基本初等函数.

由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个解析式子表示的函数，称为初等函数，一般在高等数学中用到的绝大部分函数都是初等函数.

二、数列的极限

我们在中学已经学过数列的描述性定义：设有数列 $\{x_n\}$，当 n 无限增大（用 $n\to\infty$ 表示）时，对应的 $\{x_n\}$ 都能无限接近于某一个常数 A，则 A 称为数列 $\{x_n\}$ 的极限. 现在进一步说明其中无限接近的数学含义，从而得出数列的极限更精确化的定义.

例 分析数列 $2,\frac{1}{2},\frac{4}{3},\cdots,\frac{n+(-1)^{n-1}}{n},\cdots$ 与数 1 的接近程度.

解 因 $|x_n-1| = |1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}-1| = |\frac{1}{n}| = \frac{1}{n}$，由此可见当 n 越来越大时，$\frac{1}{n}$ 越来越小，从而 x_n 就越接近 1，而接近程度可以用变量 Xn 与常量 1 的距离来衡量. 例如：距离小于 $\frac{1}{100}$，即 $|x_n-1| = \frac{1}{n} < \frac{1}{100}$，则 $n > 100$ 即可，即从第 101 项 x_{101} 开始，后面的一切项 $x_{102},\cdots,x_n,\cdots$ 均使不等式 $|x_n-1| < \frac{1}{100}$ 成立. 同理可讨论距离小于 $\frac{1}{1000}$，$\frac{1}{10000}$ 时的情况.

一般地，设给定距离是 ε，那么不论这个 ε 是多么小，由 $\frac{1}{n} < \varepsilon$ 可知只须 $n > \frac{1}{\varepsilon}$ 即可，那么只要 $n > N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，则不等式 $|x_n-1| < \frac{1}{\varepsilon}$ 都成立. 这就是当 $n\to\infty$ 时 $\{x_n\}$ 无限接近数 1 这件事的实质. 这个数 1 就称为数列 $\{x_n\} = \{\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}\}$ 当 $n\to\infty$ 时的极限.

将上述思想方式推广至一般数列 $\{x_n\}$，则有以下定义：

定义： 如果对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，总存在正整数 N，当 $n > N$ 时，不等式

$$|x_n - A| < \varepsilon \qquad (\text{其中 } A \text{ 为常数})$$

都成立，则称 A 为数列 $\{x_n\}$ 当 $n\to\infty$ 时的极限，或称 $\{x_n\}$ 当 $n\to\infty$ 时收敛于 A，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = A$ 或 $x_n \to A\ (n\to\infty)$

如果 $\{x_n\}$ 没有极限，就称 $\{x_n\}$ 发散或不收敛.

注意： N 随 ε 的不同而不同，不要求能找到最小的 N，只要它存在即可.

数列极限有以下性质：

1）收敛数列必定有界.

2）若数列的极限存在，则此极限值是唯一的.

3）数列有无极限只与 N 以后的项有关，而与 N 以前的有限项无关，因此可在数列前添加或去掉有限项，不影响数列的敛散性.

第二节　函数的极限

函数的极限比数列的极限复杂一些，数列中 n 只能取正整数趋于无穷大. 而在函数中 $x\to+\infty$，$x\to-\infty$ 或 $x\to\infty$ 或 $x\to x_0$ 都有可能. 我们对此分别作讨论.

一、自变量趋于无穷大时的极限

此时有 $x\to+\infty$，$x\to-\infty$ 或 $x\to\infty$ 3 种情形. $x\to\infty$ 是意味着不需要区分是 $x\to+\infty$ 或是 $x\to-\infty$.

定义： 如果函数 $f(x)$ 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，总存在正整数 X，当 $|x| > X$ 时，恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon\ (\text{其中 } A \text{ 为常数})$$

都成立，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记为

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x)\to A\ (x\to\infty).$$

将上述定义中的 $|x|>X$ 改成 $x>X$ 或 $x<-X$ 则可得 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$ 时 $f(x)$ 以 A 为极限的定义.

例 1　证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

证明　对于任意给定的 $\varepsilon>0$，由 $\left|\dfrac{1}{x}-0\right|=\left|\dfrac{1}{x}\right|<\varepsilon$ 可知，取 $X=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $|x|>X$ 时，恒有 $\left|\dfrac{1}{x}-0\right|<\varepsilon$ 成立，故 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

二、自变量趋向有限值时函数的极限

定义：　如果对于任意给定的数 $\varepsilon>0$，总存在数 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon\text{（其中 }A\text{ 为常数）}$$

成立，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记为

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A\ (x\to x_0)$

由此定义可知，$0<|x-x_0|$ 意味着 $x\neq x_0$，故 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时有无极限，与 $f(x)$ 在 x_0 点是否有定义无关.

例 2　证明 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$

证明　显然，函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 在 $x=1$ 点无定义，但 $f(x)$ 当 $x\to1$ 时的极限与 $f(1)$ 不存在无关.

对于任意给定的正数 ε，由 小于 ε 中约去非零因子 $x-1$ 后（$x\to1$ 时 $x\neq1$，故 $x-1\neq0$），就成为 $|x-1|<\varepsilon$，所以取 $\delta=\varepsilon$，有当 $0<|x-1|<\delta$ 时，$|f(x)-2|<\varepsilon$，可得

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$$

在上述极限的定义中，$x\to x_0$ 的方式是任意的. 它们有两种特殊的情况，一种是 x 从 x_0 的右侧趋于 x_0，另一种是 x 从 x_0 的左侧趋于 x_0，这只要将定义中的 $0<|x-x_0|<\delta$ 分别改成 $x_0<x<x_0+\delta$ 和 $x_0-\delta<x<x_0$ 即可得它们的定义. 我们分别称它们为 $f(x)$ 在点 x_0 的右极限和左极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0^+}\mathrm{f(x)}=\mathrm{A}$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^-}\mathrm{f(x)}=\mathrm{A}$，有时也记为 $f(x_0+0)$ 和 $f(x_0-0)$.

左、右极限和极限的关系如下：

定理： $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$. 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^+}\mathrm{f(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\mathrm{f(x)}=A$ 显然，如果 $f(x)$ 左、右极限都存在但不相等，则 $f(x)$ 在该点的极限不存在.

例 3　证明函数 $f(x)=\begin{cases}x-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ x+1, & x>0\end{cases}$ 当 $x\to0$ 时无极限.

证明　$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(x-1)=-1$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x+1)=1$ 即左、右极限存在但不相等，故函数在该点的极限不存在.

第三节　无穷大量与无穷小量

一、无穷小量

定义:如果 $f(x)$ 当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$)时的极限为0,则称 $f(x)$ 是当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$)时的无穷小量.

注意:无穷小量是对变量的变化状态的数学描述,因此,任何一个数,不论它多么小,都不是无穷小量.而0被视为某变量在其变化过程中一直取0,故0是无穷小量,但不是 $x \to \infty$ 时的无穷小量.反之亦然.

无穷小量具有以下性质:

1)有限个无穷小量之和仍是无穷小量.

2)有限个无穷小量之积仍是无穷小量.

3)有界函数与无穷小量之积是无穷小量.

4)常数与无穷小量之积是无穷小量.

二、无穷大量

定义:如果当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$)时 $|f(x)| \to +\infty$,则称 $f(x)$ 是当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$)时的无穷大量,简称无穷大.

极限为无穷大的函数,按通常意义来说,它的极限是不存在的,但为了方便起见,也常说函数的极限是无穷大.

无穷大量与无穷小量有以下关系.

定理:在自变量的同一变化过程中,如果 $f(x)$ 为无穷大量,则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小量,反之,若 $f(x)$ 为无穷小量,且 $f(x) \neq 0$,则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大量.

无穷小量与函数极限的关系:在自变量的同一变化过程中,如果 $\lim f(x) = A$,则 $f(x) = A + \alpha$,其中 α 为无穷小量.反之,如果 $f(x) = A + \alpha$,α 为无穷小量,则 $\lim f(x) = A$(其中 $\lim f(x) = A$ 表示 x 的任何一种变化方式).

第四节　极限存在准则　两个重要极限

准则1(夹逼定理)　如果

1)对于点 x_0 的邻域内的一切 x,但 x_0 点本身可以除外(或对于绝对值大于某一正数的一切 x),有 $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ 成立.

2) $\lim g(x) = A$, $\lim h(x) = A$

则 $\lim f(x) = A$.

准则2　单调有界数列必有极限.

注意:只要单调性和有界性有一条不成立,则上述准则就不一定成立.

例　$1,0,1,0,\cdots,1,0,\cdots$　　有界,不单调,无极限.

$1,2,3,\cdots,n,\cdots$ 单调增加，但无界，无极限.

利用准则 1 和准则 2 可以推出以下两个重要极限：

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^{x}=\mathrm{e}$ (或 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$)

其中 $\mathrm{e}=2.7182818284590\cdots$ 是一个无理数，它在数学研究和工程上应用很广，今后在指数和对数函数上我们经常会用到它.

更一般地，有：

当 $x\to a$ 时，$f(x)\to 0$，$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin f(x)}{f(x)}=1$，$\lim\limits_{x\to a}(1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}}=\mathrm{e}$；

当 $x\to a$ 时，$f(x)\to\infty$，$\lim\limits_{x\to a}(1+\dfrac{1}{f(x)})^{f(x)}=\mathrm{e}$.

第五节　函数极限的四则运算

定理：若 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则

1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$

2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=AB$，特别，$\lim[Cg(x)]=C\lim g(x)$，其中 C 为常数.

以上结论可以推广到有限个的函数的情形.

3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}$ ($B\neq 0$)

函数极限还有以下的性质：

性质 1　若 $f(x)\leqslant g(x)$ 且 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则 $A\leqslant B$.

性质 2

1) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 且 $A>0$ (或 $A<0$)，则存在 x_0 的某一去心邻域，使 $f(x)>0$ (或 $f(x)<0$)；

2) 若 $f(x)\geqslant 0$ (或 $f(x)\leqslant 0$)，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则 $A\geqslant 0$ (或 $A\leqslant 0$).

例 1
$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+2x}{3x^2+x-10}=\lim_{x\to -2}\frac{x(x+2)}{(x+2)(3x-5)}=\lim_{x\to -2}\frac{x}{3x-5}$$
$$=\frac{\lim\limits_{x\to -2}x}{\lim\limits_{x\to -2}(3x-5)}=\frac{2}{11}$$

例 2
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{2}$$

例 3
$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{3x^3-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^3}}{3-\dfrac{5}{x^3}}=0$$

例 4
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin x}{\cos x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=1$$

例 5 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin2x}{x}=2\lim\limits_{2x\to0}\dfrac{\sin2x}{2x}=2$

例 6 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\cdot\sin\dfrac{x}{2}=0$

例 7 $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x}{1+x})^x=\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}})^x=\dfrac{1}{e}$ 或 $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x}{1+x})^x=\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{1}{1+x})^x$

$=\lim\limits_{x\to\infty}[(1-\dfrac{1}{1+x})^{-(1+x)}]^{-1}\cdot(1-\dfrac{1}{1+x})^{-1}=e^{-1}\cdot1=e^{-1}$

例 8 $\lim\limits_{x\to1}(3-2x)^{\frac{3}{x-1}}=\lim\limits_{x\to1}[1+2(1-x)]^{\frac{3}{x-1}}=\lim\limits_{x\to1}\{[1+2(1-x)]^{\frac{1}{2(1-x)}}\}^{-6}=e^{-6}$

例 9 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}=\begin{cases}0, & n<m\\ \dfrac{a_n}{b_m}, & n=m\\ \infty, & n>m\end{cases}$ （其中 $a_n\neq0$ $b_m\neq0$）

此式可以当公式使用.

第六节 无穷小的比较

无穷小量的商的极限情况比较复杂,例如：x 和 x^2 都是 $x\to0$ 时的无穷小量,但 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x^2}=\infty$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x}=1$. 对此,我们引进阶的概念.

设 $\alpha(x)$, $\beta(x)$ 是同一个自变量变化过程中的无穷小量,且 $\alpha\neq0$, $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}$ 是这个变化过程中的极限. 则：

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$, 就称 β 是比 α 更高阶的无穷小量,记为 $\beta=o(\alpha)$.

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$, 就称 β 是比 α 更低阶的无穷小量.

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=C\neq0$, 就称 β 与 α 是同阶的无穷小量.

特别地,若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$, 就称 β 与 α 是等价的无穷小量,记为 $\beta\sim\alpha$.

等价无穷小量有一个重要性质：

设 $\alpha'\sim\alpha$, $\beta'\sim\beta$ 且 $\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在,则 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

这个性质说明,求两个无穷小量之比的极限时,分子分母都可以用等价无穷小量来代替. 如果用来代替的无穷小量选取适当的话,可以使计算简便.

例 因为当 $x\to0$ 时 $\sin ax\sim ax$, $\tan bx\sim bx\,(b\neq0)$

所以 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin ax}{\tan bx}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ax}{bx}=\dfrac{a}{b}$

注意:根据性质,只能用等价无穷小量来代替极限式中的因式,而不能去替换某一项,否则将导致错误.

例 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)\tan x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}\cdot\dfrac{\tan x}{x}=$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cdot(\dfrac{x}{2})^2}{x^2}\cdot\dfrac{x}{x}=\dfrac{1}{2}$

如果将 $\tan x$, $\sin x$ 都用 x 代替,则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x}{x^3}=0$, 这显然是错误的.

当 $x\to 0$ 时,常用等价无穷小量的有

$\sin x\sim x$, $\tan x\sim x$, $\arcsin x\sim x$, $\arctan x\sim x$, $\ln(1+x)\sim x$, $(1+x)^{\frac{1}{n}}-1\sim\dfrac{x}{n}$,

$e^x-1\sim x$, $a^x-1\sim x\ln a$, $1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$.

第七节 函数的连续与间断

自然界中有许多现象,如气温的变化、河水的流动、植物的生长等,都是连续变化的. 这种现象在函数上的反映就是函数的连续性. 连续函数的图形就是一条连续不断的曲线.

定义:如果函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域有定义,且满足

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

则称函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点连续.

利用左、右极限,我们又可得:

若 $f(x)$ 在 $a<x\leqslant b$ 内有定义,且 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=f(b)$, 则称 $f(x)$ 在点 b 左连续. 若 $f(x)$ 在 $a\leqslant x<b$ 内有定义,且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a)$, 则称 $f(x)$ 在点 a 右连续.

定理: $f(x)$ 在 x_0 点连续的充要条件是 $f(x)$ 在 x_0 点既左连续又右连续.

若 $f(x)$ 在 (a,b) 内每一点都连续,就称 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续. 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续,且在点 a 右连续,点 b 左连续,则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 当 $f(x)$ 在区间 I 上连续时,也称 $f(x)$ 是 I 上的连续函数.

若 $f(x)$ 在 x_0 点连续,因为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)=f(\lim\limits_{x\to x_0}x)$, 所以求 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 就非常简单了,只要求出 $f(x_0)$ 就可以了. 此外,由上式还可知,对于连续函数而言,极限符号与函数符号可交换位置

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)]$$

这个性质对计算复合函数的极限非常有用.

例 $\lim\limits_{x\to 0}\arctan\dfrac{1}{x+1}=\arctan\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x+1}\right)=\arctan 1=\dfrac{\pi}{4}$

显然,在连续的定义中,含有这样 3 个条件:

1) $f(x)$ 在 x_0 点有定义,即 $f(x_0)$ 存在.

2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在.

3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

无论哪一条不满足，都会导致函数 $f(x)$ 在 x_0 点不连续. 称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的不连续点或间断点. 通常将间断点分成两类，如果 x_0 是 $f(x)$ 的间断点，但其左右极限都存在，则称 x_0 是 $f(x)$ 的第一类间断点. 其余的间断点均称为第二类间断点.

关于连续函数，有以下结论：

1)有限个连续函数的代数和、积、商在其定义区间内仍是连续函数，但在商的情况下分母不能为零.

2)有限个连续函数的复合函数仍是连续函数.

3)单调连续函数有单调连续的反函数.

4)基本初等函数在它的定义域内都是连续的.

5)一切初等函数在它的定义区间内是连续的.

第八节　闭区间上连续函数的性质

定理 1　(最大值、最小值定理)　闭区间上的连续函数必在该区间上取得最大值和最小值至少各一次(它们可能在区间内部取得，也可能在区间端点处取得).

如果定理的条件不满足，则结论不--定成立.

定理 2　(有界性定理)　在闭区间上连续的函数必在该区间上有界.

定理 3　(介值定理)　在闭区间 $[a,b]$ 上连续的函数，必取得介于区间端点处的两个不同函数值 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任何值至少一次.

推论 1　在闭区间 $[a,b]$ 上连续的函数必取得介于最大值和最小值之间的任何值至少一次.

推论 2　(零点定理) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续的函数 $f(x)$，若 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使 $f(\xi) = 0$.

从几何意义分析，如果 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，则连续曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴至少相交于一点.

例　证明方程 $x^5 - 3x - 1 = 0$ 在 1,2 之间至少有一个实根.

证明　令 $f(x) = x^5 - 3x - 1$，则 $f(x)$ 在$[1,2]$上连续，又

$f(1) = -3$，$f(2) = 25$，由推论 2 可知，至少存在一点 $\xi \in (1,2)$ 使 $f(\xi) = 0$，即 $\xi^5 - 3\xi - 1 = 0$，即方程 $x^5 - 3x - 1 = 0$ 在 1,2 之间至少有一个实根.

习题一

第一节　数列及其极限

一、填空题

1. $y = \sqrt{x^2 - 4}$ 的定义域是________________.

2. 设 $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{8-x^3}}$，则 $f(0)=$ ________；$f(1)=$ ________；$f(1+a)=$ ________.

3. 由 $y=u^2$，$u=\sin t$ 和 $t=e^x$ 复合而成的复合函数是________________.

二、观察下列数列的变化趋势，指出哪些收敛，哪些发散.

1. $\left\{1-\dfrac{(-1)^n}{n^2}\right\}$

2. $\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4},\dfrac{5}{6},\dfrac{7}{8},\cdots$

3. $\{(-1)^n n\}$

第二节 函数的极限

一、填空题

1. 设 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$，则 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ ________；$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$ ________.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}x-1 & x\leqslant0\\ x^2 & x>0\end{cases}$，则 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ ________；$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$ ________.

于是 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ ________________.

二、证明：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{x^2+3}=1$

第三节 无穷大量与无穷小量

一、判断题

1. 无穷小量与无穷小量之和必定是无穷小量. ( )

2. 0 是无穷小量. ( )

3. 无穷大量是指很大很大的数. ( )

4. 在自变量的同一变化过程中，若 $f(x)$ 为无穷小量且 $f(x)\neq0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大量. ( )

二、指出自变量 x 如何变化才能使下列函数为无穷小量.

1. $y=\dfrac{1}{x^3-1}$　　2. $y=e^{-x}$

三、指出自变量 x 如何变化才能使下列函数为无穷大量.

1. $y=\ln(x^2+1)$　　2. $y=2^{\frac{1}{x}}$

第四节 极限存在准则 两个重要极限

填空题

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin kx}{x}=$ ________　　2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin kx}{\tan mx}=$ ________

3. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=$ ________　　4. $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{2}{x})^x=$ ________

5. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{3}{x})^{x+1}=$ ________　　6. $\lim\limits_{x\to0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}=$ ________

第五节　函数极限的四则运算

计算下列极限

1. $\lim\limits_{n\to\infty} 3^n \sin\dfrac{x}{3^n}$　　2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+10)^{10}(x+9)^{50}}{x^{60}+7x^{50}}$

3. $\lim\limits_{x\to 0} x\cot x$　　4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\sqrt{x+1}-1}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x^2-1}\right)^{x^2\cdot 4}$

第六节　无穷小的比较

一、判断题

当 $x\to 0$ 时,以下等价式中哪些正确,哪些错误?

$x^2 \sim \sin^2 x$ (　　), $x^2 \sim \tan x^2$ (　　)

$e^{-\frac{1}{x}} \sim 1+x$ (　　), $\ln(1+x)\sim x$ (　　)

二、求下列各极限

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{\sin x^2}$　　2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^3)}{x^3}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}$　　4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\cos 3x-1}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x-\cos x}{2x^2}$　　6. $\lim\limits_{x\to+\infty} x[\ln 2x-\ln(2x-1)]$

第七节　函数的连续与间断

一、填空题

1. 设 $f(x)=\begin{cases} x-1 & x\leqslant 1 \\ 3-x & x>1 \end{cases}$,则间断点为________;属于第________类间断点.

2. $f(x)=\begin{cases} x^2-2x+1 & x>1 \\ 1 & x=1 \\ x^2-1 & x<1 \end{cases}$,则间断点为________;属于第________类间断点,要使 $f(x)$ 在该点连续,则应补充定义,令 $f(1)=$ ________.

二、求 a , b 的值,使 $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\leqslant 1 \\ ax+b & 1<x<2 \\ x^2-1 & x\geqslant 2 \end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

三、设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 x_0 处均不连续,问 $f(x)+g(x)$ 在 x_0 是否必不连续?试给出实例.

第八节　闭区间上连续函数的性质

一、证明方程 $x^5-3x=1$ 至少有一个介于 1 和 2 之间的实根.

二、证明方程 $x=a\sin x+b\ (a>0,b>0)$ 至少有一个正根,并且不超过 $a+b$.

第二章　一元函数微分学

微分学是微积分学的重要组成部分，它的基本概念是导数与微分，而求函数的导数是微分学中的基本运算．在这一章中，我们主要讨论导数与微分的概念及计算方法．

第一节　导数的概念

一、引例

引例 1　变速直线运动的瞬时速度．

设物体作变速直线运动，以它运动的直线为数轴，则在物体的运动过程中，对于每一个时刻 t，物体的相应位置可以用数轴上的一个点 s 来表示，于是两者之间有函数关系 $s=s(t)$．这个函数称为该物体在上述运动过程中的位置函数．现在考虑物体在 t_0 时刻的瞬时速度．

设在 t_0 时刻物体的位置为 $s(t_0)$，当时间 t 在 t_0 时刻获得增量 Δt 时，位置函数 s 相应地有增量 $\Delta s=s(t_0+\Delta t)-s(t_0)$．于是比值 $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\dfrac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$ 是物体在 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 这段时刻中的平均速度，记为 $\bar{v}$，即 $\bar{v}=\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$．

虽然变速直线运动的速度通常是连续变化的，但在很短的时间 Δt 内，速度的变化不大，可以近似地看成是匀速的，故当 $|\Delta t|$ 很小时，$\bar{v}$ 可以作为物体在 t_0 时刻瞬时速度的近似值．

显然，$|\Delta t|$ 越小，$\bar{v}$ 就越接近 t_0 时刻的瞬时速度，因此，当 $\Delta t\to 0$ 时 $\bar{v}$ 的极限就是物体在 t_0 时刻的瞬时速度，即

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\bar{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$$

引例 2　曲线的切线问题．

设曲线 L 是函数 $y=f(x)$ 的图像，P 是曲线 L 上的一个定点，它的横坐标是 x_0，为了求出 P 点的切线，在 L 上另取一动点 Q，它的横坐标是 $x_0+\Delta x$（Δx 可正可负）．作割线 PQ，以 β 表示它与 x 轴的夹角（见图 2—1），则割线 PQ 的斜率为：

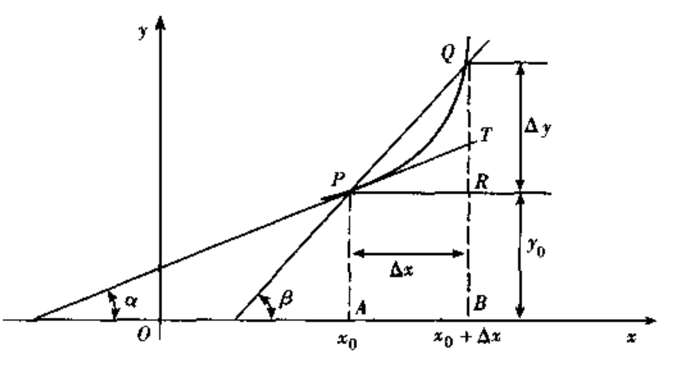

图 2—1

$$\tan\beta=\frac{QR}{PR}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$