实分析与泛函分析

戴牧民 陈武华 张更容 编著

科学出版社
www.sciencep.com

实分析与泛函分析

戴牧民　陈武华　张更容　编著

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书共分为13章,内容包括实变泛函的基本内容,如度量空间、测度和测度的扩张、可测函数、Banach空间的几个基本定理,共轭空间与共轭算子,Hilbert空间上有界线性算子的谱分解,遍历定理与保测变换的遍历性等.另外还补充了一些对于扩大视野和进一步深入研究很有意义的内容,如应用Baire定理给出处处不可导的连续函数的证明、Weierstrass定理的推广、有限测度空间上的保测变换的Poincaré回归定理以及一般测度空间上可测变换的回归性、复测度和无限个测度空间的乘积、保测变换的遍历性定理证明等.

本书适合高校数学类专业本科学生、研究生,以及教师、科研人员阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

实分析与泛函分析/戴牧民,陈武华,张更容编著.—北京:科学出版社,2007

ISBN 978-7-03-018774-1

Ⅰ.实… Ⅱ.①戴…②陈…③张… Ⅲ.①实分析②泛函分析 Ⅳ.017

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第041019号

责任编辑:张 扬/责任校对:赵桂芬

责任印制:赵德静/封面设计:陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2007年5月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2007年5月第一次印刷 印张:14 3/4

印数:1—3 500 字数:278 000

定价:32.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

序　　言

本书根据作者多年来给研究生讲授实分析与泛函分析课程的教学心得整理而成. 从作者所在高校获得基础数学与应用数学硕士学位授权点开始,就把实分析与泛函分析作为学位课程列入了两个专业的培养计划,课程设置从未间断过,但是课程的学时数,采用的教学用书等却经历了一些变化,先后使用过W. Rudin的《实分析和复分析》一书的实分析部分,复旦大学编的《实变函数与泛函分析》一书中的泛函分析部分,吉田耕写作的《泛函分析》,南京大学郑维行、王声望编著的《实变函数与泛函分析》等. 课时数有时候分成两个学期各72学时,有一段时期曾改为一个学期,80～90学时. 学时数的差异固然很大,而学生入学时的情况差异也很大,所以在教学内容的取舍上很难找到一本合适的书能恰好满足教学的需要. 几年前作者根据自身的教学需要编写了一本课时数约为80～90的讲义. 现在这本书就是在原有讲义的基础上加以扩充而成的.

我们的编写原则是基于以下两点:一是生源的实际情况. 他们来自不同的院校,不同的专业,有的在大学本科阶段系统学过实分析与泛函分析课程,有的只学过少量的实变函数,个别的两门都没有学过. 二是作为硕士生应当掌握的实分析与泛函分析基本知识和应当受到的数学逻辑严谨性的训练. 本书的内容取舍以及论述方式应当在这两者之间权衡. 因此在编写这本书时作了如下的考虑:

1. 基础性和自容性. 教材从集的基本知识和度量空间开始,直接衔接本科阶段的数学分析,不要求预先掌握任何实变函数、泛函分析及拓扑学方面的知识.

2. 基本内容部分讲述务求详细,并交代清楚思路,论证上尽量做到删繁就简(比如直线上的 Lebesgue 测度就不讲由内、外测度构成的方式,而直接引出由半开区间生成的环上的测度,再用 Carathéodory 扩张的方式).

3. 除基本内容外,我们还安排了一些非基本的内容(书中打上 * 号的章节). 第 2 章安排了处处不可导的连续函数存在性的证明,Korovkin 定理的证明及 Weierstrass 定理的推广等;第 3 章安排了广义测度与复测度;第 4 章安排了可测变换与回归定理;第 5 章安排了无限多个测度空间的乘积测度;第 7 章安排了三角函数系的完备性、Radon-Nikodym 定理、Lebesgue 分解定理以及关于复测度的积分;第 9 章安排了 L^p 空间的有界线性泛函表示定理的证明. 另外我们还补充了 4 章内容,即第第 10 章紧算子理论简介. 11 章 Hilbert

空间上有界线性算子的谱分解，第 12 章遍历定理与保测变换的遍历性，第 13 章 $C_0(X)$ 上有界线性泛函的 Riesz 表示定理. 这些内容有的比较艰深，有的或多或少游离课程的主线，但是它们在扩大视野，启迪思维，增进兴趣等方面还是有积极意义的. 如果课时允许，可以从中选取某些部分讲授.

最后，我们要感谢广西大学数学与信息科学学院对本书出版所给予的支持，同时，也借此机会衷心感谢本学院同仁多年来对我们的支持与帮助。

作 者

2007 年 1 月

目　　录

第 1 章　点集的基本知识

§1　有关集的基本概念和基本运算

1.1.1　在朴素的意义下，我们无法给集下一个精确的定义，因为它太基础了，而我们给某个概念下一个精确的定义时，通常总是要用比它更基础的概念来陈述的，所以在这里不给集的概念下定义. 大体上说，一个集是一些东西（被称为该集的元素）组成的总体. 构成这个集的诸元素可以由某种共同的特征来予以标定或刻画. 而这种标定或刻画所用的语言必须是明确的，使我们能根据这种刻画判定任何一个事物要么属于该集，要么不属于该集，绝不许模棱两可，含混不清.

设 $P(x)$是关于事物 x 的含义清楚的一个命题. 对于一个具体的事物 x，$P(x)$可能是个真命题，也可能是一个假命题. 由使 $P(x)$成为真命题的 x 构成的集 A 我们可以记为 $A=\{x: P(x)$是真命题$\}$. 例如，设 $P(x)$表示“x 是自然数”，N 表示全体自然数，则 $N=\{x: P(x)$为真$\}=\{x: x$ 是自然数$\}$. 单就这个例子看，我们仿佛是在做同语反复的无聊事，但以后我们会看出，有了集的这种表示方法，将会为我们从一些集产生新的集提供很大的方便.

设 A 是一个集，x 是某个事物. 我们用 $x\in A$ 表示 x 是 A 的元素，$x\overline{\in} A$ 表示 x 不是 A 的元素.

由于我们所讨论的是数学对象，所以在我们所讨论的范围内，用以刻画一个集的语言通常都是数学语言，即 $P(x)$是用一些数学符号来表示的关于 x 的语句.

在本书中，我们约定记号 N,Z,Q,R,K 分别表示自然数集、整数集、有理数集、实数集和复数集.

1.1.2　由于集的概念并不按严格的方式来定义，而是按朴素的意义来理解. 在历史上曾经出现了一些严重的问题. 一个典型的事例就是 20 世纪初由 Russel 提出来的“Russel 悖论”.

Russel 悖论：设 $X=\{M: M\overline{\in} M\}$.

1. 若 $X\in X$，则由 X 的刻画，应有 $X\overline{\in} X$；

2. 若 $X\overline{\in} X$，则由 X 的刻画，应有 $X\in X$. 总之都导致矛盾.

它说明，我们在确定一个集时不能太过随便，而需要作出某些必要的限制. 为了澄清诸如 Russel 悖论等所带来的混乱和给数学造成的困境，数学家

们对数学基础和集论公理化进行了深入研究，其目的是希望把集论乃至整个数学按公理化和形式化的思路建立在一个坚实的基础上，以避开可能导致的逻辑矛盾. 这项工作迄今已取得了基本满意的结果，形成了集论的 ZFC 公理系统（即 Zermelo-Frankel 公理系统＋选择公理（AC）），并已得到大多数数学家的承认.

1.1.3　集的两个基本关系，子集、空集和全集

集的两个基本关系是相等和包含. 设 A,B 是两个集，规定

$A=B$（A 等于 B）当且仅当 $x\in A\Leftrightarrow x\in B$. 即 A,B 含有完全相同的元素.

$A\subset B$（A 包含于 B）当且仅当 $x\in A\Rightarrow x\in B$. 即 A 的每个元素也都是 B 的元素. 当 $A\subset B$ 时，我们也称 A 是 B 的一个子集.

容易看出，$A=B$ 等价于 $A\subset B,B\subset A$ 同时成立. $A\subset B,B\subset C$ 蕴涵 $A\subset C$.

不含任何元素的集称为空集，用 $\varnothing$ 表示. 就一个具体问题而言，我们考虑的所有可能的对象的总体称为全集.

1.1.4　集的基本运算

设 A,B 是两个集，X 是全集. 规定

1. A,B 的并　$A\cup B=\{x: x\in A$ 或 $x\in B\}$；
2. A,B 的交　$A\cap B=\{x: x\in A$ 同时 $x\in B\}$；
3. A,B 的差　$A-B=\{x: x\in A$，但 $x\notin B\}$；
4. A 的余集　$A'=X-A$；
5. A 的幂集　$\mathbf{P}(A)=\{E: E\subset A\}$.

容易验证这些运算满足下列规律.

1. 交换律：$A\cup B=B\cup A$；$A\cap B=B\cap A$.
2. 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.
3. 分配律：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；
   $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.
4. 对偶律：$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$；
   $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$.

作为特例，由 4 可得到 De Morgan 公式.

5. $(A\cup B)'=A'\cap B'$；$(A\cap B)'=A'\cup B'$.

今后我们还会经常用到 $A-B=A\cap B'$ 这个公式.

1.1.5　集族的概念及其运算

有时候，讨论的问题涉及的不只是一个集或有限个集而是无限个集. 这些

以集为元素构成的集称为集族. 通常用黑体字或花体字母表示. 例如 $\mathbf{P}(A)$就是一个集族. $\mathscr{I}=\{(a,b):a,b\in R,a<b\}$就是直线上全体开区间组成的集族.

在集族或集的表示中,我们有时采用同一个字母来表示它的元素而用下标来区分其中不同的元素. 例如 $\mathscr{E}=\{E_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$, $\mathscr{A}=\{A_i:i\in I\}$, $A=\{a_n:n\in N\}$等等. 例中的 A,I,N 是指标集.

集族的运算:设 $\mathscr{A}=\{A_i:i\in I\}$是集族. 规定

$$\bigcup\mathscr{A}=\bigcup\{A_i:i\in I\}=\{x:\exists i\in I,x\in A_i\}.$$

$$\bigcap\mathscr{A}=\bigcap\{A_i:i\in I\}=\{x:\forall i\in I,\ x\in A_i\}.$$

为了方便,在不致发生混淆的情况下,可以省略指标集,简记成$\bigcup\limits_i A_i$, $\bigcap\limits_i A_i$.

不难验证 1.1.4 中的运算律对于集族的并和交运算也是满足的.

1.1.6 集合序列的上、下极限

设$\{E_n:n\in N\}$是一个集合序列. 定义

$$\overline{\lim}E_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}E_k,$$

$$\underline{\lim}E_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}E_k.$$

它们分别称为$\{E_n:n\in N\}$的上、下极限. 从直观看,$x\in\overline{\lim}E_n$ 表示,不论 n 多大,总有一个比 n 更大的 k 使 $x\in E_k$,亦即有无限多个 E_n 包含 x. 反之亦然,于是

$$\overline{\lim}E_n=\{x:\{n:x\in E_n\}\text{ 是无限集}\}.$$

类似地,$x\in\underline{\lim}E_n$ 表示至少有一个 n 使 $x\in\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}E_k$. 反之亦然,于是

$$\underline{\lim}E_n=\{x:\{n:x\overline{\in}E_n\}\text{ 是有限集}\}.$$

因此显然有$\underline{\lim}E_n\subset\overline{\lim}E_n$. 当它们相等时就称$\{E_n:n\in N\}$有极限,并记为$\lim E_n$. 特别

若 $E_n\uparrow$(即 $E_n\subset E_{n+1}$恒成立),则$\lim E_n=\bigcup\limits_n E_n$.

若 $E_n\downarrow$(即 $E_{n+1}\subset E_n$恒成立),则$\lim E_n=\bigcap\limits_n E_n$.

1.1.7 集的笛卡儿积

设 X,Y 是不空的集,对任意 $x\in X,y\in Y$,可以组成一个序对(x,y). 规定两个序对$(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$当且仅当 $x_1=x_2,y_1=y_2$ 同时成立 . 由 A 的元素和 B 的元素组成的序对的全体称为 X 和 Y 的笛卡儿积,记作 $X\times Y$. 即

$$X\times Y=\{(x,y):x\in X,y\in Y\}.$$

类似地,可以定义集族$\{X_1,\cdots,X_n\}$的笛卡儿积为

$$\prod_{i=1}^{n} X_i = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) : x_1 \in X_1, \cdots, X_n \in X_n\}.$$

对任意的集族$\{X_\alpha : \alpha \in A\}$，定义它的笛卡儿积为$\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha = \{f : f$ 是函数，$\mathrm{dom} f = A, \forall \alpha \in A, f(\alpha) \in X_\alpha\}$特别当 $A = N$ 时，

$$\prod_{n=1}^{\infty} X_n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) : \forall n \in N, x_n \in X_n\}.$$

另外，规定当其中有一个因子是空集$\varnothing$时，它们的笛卡儿积就是$\varnothing$. 例如$\varnothing \times B = A \times \varnothing = \varnothing$.

1.1.8　映射

设 X, Y 是不空的集，如果对 X 中任意一个元素 x，相应有 Y 中唯一一个确定的元素 y 与之对应．这个对应关系就称为由 X 到 Y 的一个映射(或称函数). 用字母 f 表示这个映射，$f(x)$表示与 x 对应的y. 通常可写成 $y = f(x)$或 $f : X \to Y$ 的形式. $\mathrm{dom} f = X$ 称为 f 的定义域，$\mathrm{ran} f = \{f(x) : x \in \mathrm{dom} f\}$ 称为 f 的值域.

f 称为单射，如果它满足如下条件：$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. f 称为满射，如果 $\mathrm{ran} f = Y$. 如果 f 同时是单射和满射，则 f 称为X 到Y 的双射，或 X 到 Y 上的一一对应.

设 $A \subset X, B \subset Y, x \in X$. 我们把 $f(x)$ 称为 x(在映射 f 下)的像，集 $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$称为 A 的像，$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$称为 B 的原像.

当 f 是单射时，对任一 $y \in \mathrm{ran} f$，仅有唯一一个 x 在 f 之下与 y 对应. 我们把 y 对应于这个 x 的映射称为 f 的逆映射，记作 f^{-1}，即 $x = f^{-1}(y)$. 注意 $\mathrm{dom} f^{-1} = \mathrm{ran} f$，而且 f 是 X 到 $\mathrm{ran} f$ 上的双射. 当 $x \in X, y \in \mathrm{ran} f$ 时，恒有 $f^{-1}(f(x)) = x, f(f^{-1}(y)) = y$.

容易从有关的定义验证下列命题的正确性.

$$f(\bigcup_\alpha A_\alpha) = \bigcup_\alpha f(A_\alpha),$$

$$f(\bigcap_\alpha A_\alpha) \subset \bigcap_\alpha f(A_\alpha),$$

$$f^{-1}(\bigcup_\alpha B_\alpha) = \bigcup_\alpha f^{-1}(B_\alpha),$$

$$f^{-1}(\bigcap_\alpha B_\alpha) = \bigcap_\alpha f^{-1}(B_\alpha).$$

注意第 2 式通常不能成为等式，例如 $f(X) = x^2, A_1 = [0, \infty), A_2 = (-\infty, 0]$，则 $f(A_1 \cap A_2) = \{0\}$而 $f(A_1) \cap f(A_2) = [0, \infty)$.

1.1.9　映射的复合、限制与扩张

设 f 是 X 到 Y 的映射，g 是 Y 到 Z 的映射，则可由下式：$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g}$

$g(f(x))$确定一个由 X 到 Z 的映射 $h:z=h(x)=g(f(x))$，称为 g 与 f 的复合，记作 $h=g\circ f$.

记 id_X 为 X 上的恒等映射(即 $\forall x\in X, id_X(x)=x$). 容易看出，若逆映射存在，则有 $f^{-1}\circ f=id_X, f\circ f^{-1}=id_{\mathrm{ran}f}$.

设 f,g 是两个映射，如果 $\mathrm{dom}g\subset\mathrm{dom}f$，而且 $x\in\mathrm{dom}g\Rightarrow g(x)=f(x)$，则称 g 是 f 的一个限制，而 f 是 g 的一个扩张. 设 $E\subset X=\mathrm{dom}f$，我们用 $f\upharpoonright_E$表示将 f 限制到 E 上所产生的映射.

1.1.10 设 $E\subset X$，定义

$$\chi_E(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x\in E,\\ 0, & \text{当 } x\in X-E.\end{cases}$$

χ_E 称为集 E 的特征函数. 易见有

$$\chi_{E\cap F}=\chi_E\cdot\chi_F=\min\{\chi_E,\chi_F\}.$$
$$\chi_{E\cup F}=\max\{\chi_E,\chi_F\}=\chi_E+\chi_F-\chi_{E\cap F}.$$

1.1.11 集的等势，势的比较

集 X 与 Y 称为等势的，记作$|X|=|Y|$(或 $X\approx Y$)，如果存在 X 到 Y 上的双射. 称 X 的势小于 Y 的势，记作$|X|<|Y|$，如果存在 X 到 Y 的某个子集的双射，但不存在 Y 到 X 的任何子集上的双射. $|X|\leqslant|Y|$表示或者$|X|=|Y|$或者$|X|<|Y|$，它也等价于存在 X 到 Y 的单射.

从定义看出

1. 若 $A\subset B$，则$|A|\leqslant|B|$(id_A 是 A 到 B 的一个单射).
2. 等势关系是一个等价关系.
3. $|A|\leqslant|B|$，$|B|\leqslant|C|$，则$|A|\leqslant|C|$.
4. 对任何映射 $f: X\to Y, A\subset X$，有$|f(A)|\leqslant|A|$.($\forall y\in f(A)$，$f^{-1}(y)\cap A\neq\varnothing$，任取其中一个元素 $x(y)$，则 $A_f=\{x(y): y\in f(A)\}\subset A$[①]，而$f\upharpoonright_{A_f}=\varphi$就是 A_f 到 $f(A)$上的一个双射.)

1.1.12 定理(Cantor-Bernstein)

若 A 与 B 的一某子集等势，同时 B 又与 A 的某子集等势，则 A 与 B 等势.

证明* 设 f 是 A 到 B 的一个单射，g 是 B 到 A 的单射，记 $C_0=A-$

---

① 由 $x(y)$构造出 A 的子集A_f 时，我们用到了选择公理(AC). 由于我们无条件承认 AC，以后凡用到 AC 的地方都不再指出.

$\operatorname{ran} g$，$C_{n+1}=g(f(C_n))$. 若 $C_0=\varnothing$，则 g 就是 B 到 A 上的一一对应；若 $C_0\neq\varnothing$，则每个 $C_n\neq\varnothing$，记 $C=\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}C_n$. 作 A 到 B 的一个映射 h 如下

$$h(x)=\begin{cases}f(x), & 若 x\in C,\\ g^{-1}(x), & 若 x\in A-C.\end{cases}$$

(1) h 是单射. 设 $x\neq x'$. 若 $x,x'\in C$，则 $f(x)\neq f(x')$. 从而 $h(x)\neq h(x')$. 若 $x,x'\in A-C$，则 $h(x)=g^{-1}(x)\neq g^{-1}(x')=h(x')$. 若 $x\in C,x'\in A-C$，设 $x\in C_n$，则 $h(x)=f(x)\in f(C_n)$，$g(h(x))\in C_{n+1}\subset C$. 但 $x'\in A-C$. 所以 $h(x')=g^{-1}(x')$. 于是 $g(h(x'))=x'\overline{\in}C$. 这样 $g(h(x))\neq g(h(x'))$，从而 $h(x)\neq h(x')$.

(2) h 是满射. 设 $y\in B-h(C)=B-f(C)$，则对任意 n，$y\overline{\in}f(C_n)$，$g(y)\overline{\in}g(f(C_n))=C_{n+1}$. 又显然有 $g(y)\overline{\in}C_0$. 于是 $g(y)\in\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}C_n=C$. 记 $x=g(y)$. 于是 $x\in A-C$. 从而 $h(x)=g^{-1}(x)=y$. 所以 $B=\operatorname{ran}h$. 这就证明了 h 是 A 到 B 上的一一对应，$|A|=|B|$. □

1.1.13　定理(Cantor)　对任何集 X，$|X|<|P(X)|$.

证明　(1) $\forall x\in X$，$x\to\{x\}$ 是 X 到 $\mathbf{P}(X)$ 的一个单射，因此 X 与 $\{\{x\}:x\in X\}\subset\mathbf{P}(X)$ 等势.

(2) 假定存在 X 到 $P(X)$ 的满射 f. 记

$$E=\{x\in X: x\overline{\in}f(x)\},$$

则 $E\in\mathbf{P}(X)$. 由假设，存在 $x\in X$，使 $f(x)=E$. 若 $x\in E$，则由 E 的定义有 $x\overline{\in}f(x)=E$. 若 $x\overline{\in}E$，则 $x\in f(x)=E$. 总之都是矛盾的. 所以不可能存在 X 到 $P(X)$ 的满射，更不存在 $\mathbf{P}(X)$ 到 X 的子集上的双射了. □

§2　可数集及其性质

1.2.1　定义　与自然数集 N 等势的集称为可数无限集. 有限集与可数无限集统称可数集.

所谓集 A“可数”的含义就是可以把这个集的全部元素按自然数从小到大的顺序排列出来，即把 A 写成 $A=\{a_n:n\in N\}$ 或 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$（A 是有限集的情形）. N 的势通常用 ω 表示.

1.2.2　定理　可数集的任意子集仍是可数集.

证明　设 $A=\{a_n:n\in N\}$ 是可数(无限)集，$E\subset A$. 若 E 只有有限个元素，显然 E 是可数集. 现设 E 是无限集. 记 $M_1=\{n:a_n\in E\}$，则 $M_1\subset N$ 是无

限集. 设 $n_1=\min M_1$ 是 M_1 中最小的自然数，则 $n_1\geqslant 1$. 记 $M_2=M_1-\{n_1\}$，设 $n_2=\min M_2$，则 $n_2>n_1$，从而 $n_2\geqslant 2$. 假设 $n_1,n_2,\cdots,n_k$ 已选出，满足 $M_i=M_{i-1}-\{n_{i-1}\}$，$n_i=\min M_i(i=1,\cdots,k)$. 因为 M_1 是无限集，所以每个 M_i 也是无限的. 于是 $M_{k+1}=M_k-\{n_k\}$是无限的. $n_{k+1}=\min M_{k+1}$存在. 这样可得出一个严格递增的序列$\{n_k : k\in N\}\subset M_1$. 对任意 $m\in M_1$，因为 $n_m\geqslant m$，所以存在 $k\leqslant m$ 使 $m=n_k$，因此 $M_1=\{n_k : k\in N\}$，$E=\{a_{n_k} : k\in N\}$，$\varphi : k\to a_{n_k}$ 就是 N 与 E 之间的一一对应. 证明了 E 是可数集. □

1.2.3 定理 任何无限集 E 都包含有可数无限子集. 从而 $\omega\leqslant|E|$.

证明 设 E 是无限集，任取 $x_1\in E=E_1$，$E_2=E_1-\{x_1\}$仍是无限集，任取 $x_2\in E_2$. 类似于 1.2.2 的证明，可归纳地取 $x_n\in E_n=E_{n-1}-\{x_{n-1}\}$，得出集 $\{x_n : n\in N\}$. 它就是 E 的一个可数的无限子集. □

1.2.4 定理 $N\times N$ 是可数集.

证明 将 $N\times N=\{(m,n) : m,n\in N\}$的元素排成如图 1 所示的表，并依箭头所示顺序给这些元素编号(即作出 $N\to N\times N$ 的映射 φ，例如 $\varphi(1)=(1,1)$，$\varphi(2)=(1,2)$，$\varphi(3)=(2,1)$，$\varphi(4)=(3,1)$，$\cdots$)，则 φ 就是 N 到 $N\times N$ 的一一对应.

$$
\begin{array}{ccccccc}
(1,1) & \rightarrow & (1,2) & & (1,3) \rightarrow\cdots & & (1,n)\cdots \\
 & \swarrow & \nearrow & & \nearrow & & \\
(2,1) & & (2,2) & & (2,3)\cdots & & (2,n)\cdots \\
\downarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
(3,1) & & (3,2) & & (3,3)\cdots & & (3,n)\cdots \\
 & & \cdots\cdots & & & & \\
(m,1) & & (m,2) & & (m,3)\cdots & & (m,n)\cdots \\
 & & \cdots\cdots & & & &
\end{array}
$$

□

图 1

1.2.5 定理 可数个可数集的并是可数集.

证明 设对每个 $m\in N$，E_m 是可数集. 记 $E_m=\{a_{mn} : n\in A_m\subset N\}$，$E=\bigcup\limits_m E_m$，对每个 E 的元素 a_{mn}，令 $\varphi(a_{mn})=(m,n)$，则当$\{E_m : m\in N\}$中 E_m 彼此互不相交时，φ 是 $E\to N\times N$ 的一个单射，$|E|=|\varphi(E)|$，由 1.2.4 及 1.2.3，E 是可数集.

当 E_m 彼此可能有公共元素时，令 $F_1=E_1$，$F_2=E_2-E_1$，$\cdots$，$F_n=E_n-(E_1\cup E_2\cup\cdots\cup E_{n-1})$，则 F_n 彼此不相交，$E=\bigcup\limits_n E_n=\bigcup\limits_n F_n$，仍是可数集. □

1.2.6 定理 全体有理数的集 Q 是可数集.

证明 记 $Q^+=\{x : x$ 是正有理数$\}$，则对任一 $x\in Q^+$，存在唯一一对自

然数(p,q)使$x=\frac{p}{q}$，p,q互素. 令$\varphi(x)=(p,q)$，则φ是$Q^+\to N\times N$的一个单射，由 1.2.4，1.2.3 可知Q^+是可数集. $x\to -x$是Q^+到全体负有理数集Q^-上的一一对应，所以Q^-也是可数的. 从而$Q=Q^+\cup\{0\}\cup Q^-$是可数集. □

1.2.7　推论

(1) 对任何固定的n和可数集A，A^n是可数集.

(2) R中全体代数数的集A是可数集.（$x\in R$称为代数数，如果x是某个整系数n次方程的实根. 不是代数数的实数称为超越数.）

(3) 全体有理系数多项式的集是可数集.

1.2.8　定理　全体实数的集R是不可数集（即R不是可数集）.

证明　假设R是可数集，则$I=(0,1)$也是可数集. 设$I=\{x_n : n\in N\}$，对每个x_n有唯一一种不以 9 为循环节的十进制展开$x_n=0.a_{n1}a_{n2}\cdots a_{nk}\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{nk}}{10^k}$（$a_k\in\{0,1,2,\cdots,9\}$）. 现在，对每个$k$，取$p_k\in\{4,5\}-\{a_{kk}\}$，记$x=0.p_1p_2\cdots p_k\cdots$，则$x\in(0,1)$. 设$x=x_m$，则应有$p_1=a_{m1},\cdots,p_m=a_{mm},\cdots$，这与$p_k\neq a_{kk}$的选法矛盾. 所以$I=(0,1)$是不可数的，$R$也是不可数的. □

R的势称为连续统的势，通常记作2^ω. 可以证明$|R|=|\mathbf{P}(N)|$. 利用φ：$x\to kx+b(k\neq0)$是$R\to R$的双射可以证明任何开区间(a,b)与$(0,1)$都是等势的. 利用$x\to\mathrm{arctg}x$是$R\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$的双射可知，对于任何开区间$I$，$|I|=2^\omega$. 还可以证明，对任意$(a,b)$，$(a,b)$与$[a,b]$也是等势的.

通过比较复杂的证明过程可以得出$R^2=R\times R$与R等势的结论. 进一步的论证还可以证明，对于任何一个无限集X，X^2与X是等势的.

§3　半序集与 Zorn 引理

1.3.1　定义　设$X\neq\varnothing$，$\leqslant$是X上的一个关系，如果它满足

(1) $\forall x\in X$，$x\leqslant x$；(2) 若$x\leqslant y$，$y\leqslant z$，则有$x\leqslant z$；(3) 若$x\leqslant y$，$y\leqslant x$，则$x=y$，则称$\leqslant$是一个半序.（$X,\leqslant$）称为半序集. 如果它还进一步满足(4) $\forall x,y\in X$，$x\leqslant y$和$y\leqslant x$必有一个成立，则$\leqslant$称为X的一个全序，$(X,\leqslant)$称为全序集.

例　(1) $(R,\leqslant)$是一个全序集.

(2) 设$\mathbf{C}([a,b])=\{f : f$是$[a,b]$上的连续函数$\}$，

规定$f\leqslant g$当且仅当$\forall x\in[a,b]$，$f(x)\leqslant g(x)$，则$\leqslant$是$\mathbf{C}([a,b])$上的一

个半序.

(3)对坐标平面 R^2 上任意两个点 $P(x_P,y_P),Q(x_Q,y_Q)$,规定 $P\leqslant Q$ 当且仅当 $x_P<x_Q$ 或者 $x_P=x_Q$ 而 $y_P\leqslant y_Q$,则$\leqslant$是一个全序(称为 R^2 的字典式序).

1.3.2 定义 设$(X,\leqslant)$是半序集,$C\subset X$ 称为一个链,如果对任意 $x,y\in C$,或 $x\leqslant y$ 或 $y\leqslant x$,即$(C,\leqslant)$是全序集. 设 $A\subset X$,a 称为 A 的一个上(下)界,如果对任意 $x\in A$,有 $x\leqslant a(a\leqslant x)$. $m\in X$ 称为 X 的一个极大元,如果 $\{x\in X: m<x\}=\varnothing$($x<y$表示 $x\leqslant y$ 但 $x\neq y$).

1.3.3 Zorn 引理 设$(X,\leqslant)$是一个半序集,如果 X 中任何一个链 C 都有上界,则 X 一定存在极大元.

Zorn 引理还有许多与之等价的说法,如 Hausdorff 极大原理等. 它们都是等价于选择公理 AC 的. 我们在此不给出证明.

作为 Zorn 引理的一个应用例子,我们来证明:

1.3.4 命题 任何一个线性空间 X 都存在极大线性无关向量组.

证明 证 $\mathscr{S}=\{S: S$ 是 X 的线性无关向量组$\}$. 当 $S,T\in\mathscr{S}$时,规定 $S\leqslant T$,如果 $S\subset T$,则$(\mathscr{S},\leqslant)$是一个半序集.

验证 Zorn 引理的前提:设 $\mathscr{C}\subset\mathscr{S}$是一个链,定义 $C=\bigcup\mathscr{C}=\bigcup\{S: S\in\mathscr{C}\}$,今证明 $C\in\mathscr{S}$. 假定 $C\overline{\in}\mathscr{S}$,即 C 不是线性无关的,则存在 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in C$ 和不全为零的 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 使 $\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n=\theta$. 设 $x_i\in S_i\in\mathscr{C}(1\leqslant i\leqslant n)$,因为 $\mathscr{C}$ 是个链,$S_1,S_2,\cdots,S_n$ 相比较,一定有一个最大的,记它为 T,则$\{x_i: 1\leqslant i\leqslant n\}\subset T$,这就与 T 是线性无关向量组矛盾. 所以 $C\in\mathscr{S}$,显然 C 是 $\mathscr{C}$ 的一个上界.

于是由 Zorn 引理,$\mathscr{S}$有极大元 S,即 S 是极大的线性无关向量组.

对任意 $x\in X$,由 S 的极大性可知 $S\cup\{x\}$不是线性无关的. 于是存在 $x_1,\cdots,x_n\in S$ 和 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 使

$$x=\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n.$$

这就证明了 X 中的任意向量 x 都可以用 S 中的向量的有限线性组合线性表出. □

后面章节我们还将应用 Zorn 引理来证明内积空间中极大规范正交系的存在和 Hahn-Banach 有界线性泛函延拓定理.

附录 Cantor 树和 $|\mathbf{P}(N)|=2^{\omega}=c$ 的证明

为了证明全体自然数的子集的势等于连续统的势,我们在此介绍 Cantor 树的概念并利用它来给出证明.

Cantor 2 进树是指这样生成的一个图形,它首先有一个根,第一步,从这个根发出两段