21世纪高等理工科重点课程辅导丛书

线性代数学习指导与MATLAB编程实践

邵建峰　刘彬　主编

化学工业出版社

21世纪高等理工科重点课程辅导丛书

线性代数学习指导与MATLAB编程实践

邵建峰　刘　彬　主编

化学工业出版社

·北京·

线性代数是大学数学教育中的重要基础课程。本书是为了给学生在学习线性代数的过程中提供适当的学习指导而编写的。

本书从第一章到第七章主要是关于行列式、矩阵的概念与运算，n维向量空间，线性方程组解的结构与求解方法，矩阵的特征值与特征向量，以及矩阵的对角化，二次型及其标准化，线性空间与线性变换等课程内容的学习指导。在前六章各章中给出了用MATLAB编程方法去解决线性代数课程中的各种计算问题的例子。

本书可作为大学理工科与经济、管理等学科线性代数课程的学习指导书，也可作为工程技术人员的自学参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数学习指导与MATLAB编程实践/邵建峰，刘彬主编. —北京：化学工业出版社，2007.8
21世纪高等理工科重点课程辅导丛书
ISBN 978-7-122-00955-5

Ⅰ.线… Ⅱ.①邵…②刘… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教学参考资料②计算机辅助计算-软件包，MATLAB-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.0151.2 TP391.75

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第118529号

责任编辑：唐旭华　　文字编辑：王淑燕
责任校对：宋　夏　　装帧设计：华审视觉

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街13号　邮政编码100011）
印　　装：北京市彩桥印刷有限责任公司
720mm×1000mm　1/16　印张12¼　字数229千字　2007年8月北京第1版第1次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899
网　　址：http://www.cip.com.cn
凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：19.00元

前　言

线性代数是大学数学教育中一门主要基础课程，是用数学知识解决实际问题的一个强有力的工具。在工科与经济管理等学科线性代数课程的教学过程中，由于学时不多，学生对课程中一些重要的基本概念与理论难以深入理解，对有关的基本方法往往难以熟练地掌握。本书就是着眼于这两个方面，同时考虑到在线性代数课程的学习过程中，如何将课程学习与MATLAB软件的使用，以及用编程方法解决实际问题结合起来，从线性代数课程教学的实际需要出发编写而成。

在本书各章的编写中，我们首先将线性代数各章的基本概念、理论与基本方法等教学内容做了简要的概述。在此基础上，通过不同层次、不同题型的例题来深化对这些概念与方法的理解。每章的例题包括基本题（45%左右）、综合题（30%左右）、提高题（15%左右）、编程题（10%左右）。基本题、综合题是面向课堂教学要求的复习题，提高题主要指像研究生入学考试这样水平层次的题；在例题求解中，我们注重对典型方法进行适当的归类，对较难的题，在解题前后则作比较详细的分析。

为了增强学生应用数学知识与数学软件的能力，在前面的六章中，每章安排了两道左右的编程例题。本指导书通过编程解题，是希望把数学实验的思想引入到数学基础课程教学中，逐步培养学生应用数学知识、结合计算机方法和使用已有的软件来解决实际问题的能力。通过编程实践，相信学生能在MATLAB编程方面打下初步的基础，对用数学软件求解线性代数等学科与工程领域中的实际问题产生更加浓厚的兴趣。

在书后的附录部分，安排了两份完整的练习与测试试题，并给出了详细的解答。

需要本书各章中源程序的读者可以联系：shaojianf@163.com。

本书第一章、各章编程应用问题等由邵建峰编写，第二章由王成编写，第三章由丁建东编写，第四章、第五章由石岿然编写，第六章、第七章与附录（练习与测试）由刘彬编写。全书由邵建峰、刘彬等做了较系统、仔细的修改、审定工作。由于编者水平有限，书中若有不妥或错漏之处，还望使用本书的读者批评指正。

编　者

2007年6月

目　　录

第一章 行 列 式

第一节 内 容 提 要

1. n 阶行列式的归纳式定义

定义 1 由 $n\times n$ 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的具有 n 行 n 列的式子

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=|a_{ij}|_{n\times n}$$

叫做 n 阶行列式，并且规定其值为：

(1) 当 $n=1$ 时，$D=|a_{11}|=a_{11}$；

(2) 当 $n\geqslant 2$ 时，$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}$ (1.1)

其中 $A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}$

$$M_{1j}=\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3j-1} & a_{3j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

并称 M_{1j} 为行列式 D 的元素 a_{1j} 的余子式，A_{1j} 为行列式 D 的元素 a_{1j} 的代数余子式。

定理 1 n 阶行列式 D 等于它的任一行（列）元素与它们所对应的代数余子式乘积之和，即

$$D=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in},\forall i=1,2,\cdots,n$$

或

$$D=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj},\forall j=1,2,\cdots,n$$

这个性质也称之为行列式的**拉普拉斯展开**。

2. n 阶行列式的性质

设 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

把 D 中的行与列互换，所得到的行列式记为 D'（或 D^{T}），即

$$D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称行列式 D'为行列式 D 的**转置行列式**。

性质 1 行列式与它的转置行列式相等。

性质 1 说明，行列式中行和列的地位是对称的，行列式关于行成立的性质对于列也同样成立。反之亦然。

性质 2 互换行列式中两行（列），行列式变号。

推论 1 如果行列式中有两行（列）元素对应相等，则此行列式为零。

性质 3 行列式中的某一行（列）中所有的元素都乘以同一数 k，等于用数 k 乘此行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论 2 行列式中某一行（列）中所有元素的公因数，可以提取到行列式符号的前面。

推论 3 如果行列式中某行（列）的元素全为零，则此行列式为零。

推论 4 如果一个行列式的两行（列）元素对应成比例，则此行列式为零。

性质 4 如果行列式中某行（列）的各元素都是两数之和，则这个行列式等于两个行列式之和。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & \cdots & b_n+c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 5 把行列式的某一行(列)的元素的 $k(k\in\mathrm{R})$倍加到另一行(列)上去，

行列式的值不变。即

$$\begin{vmatrix} \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ i\text{ 行} \\ \\ j\text{ 行} \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{vmatrix}$$

这一性质是在计算行列式时，将行列式中元素化归为零的依据。

性质 6 行列式 D 的某一行（列）的元素与另一行（列）对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0,\quad \forall\, i \neq j$$

或

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0,\quad \forall\, i \neq j$$

定理 1 与性质 6 的结论可以合并为统一的一个式子：

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \delta_{ij}D \tag{1.2}$$

其中

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{当 } i=j \\ 0, & \text{当 } i\neq j \end{cases}$$

对行列式的列来说也有同样的性质成立。上述结论非常重要，它是证明许多其它命题的基础。

另外，像上（下）三角行列式等特殊行列式的值

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

及

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1}$$

在行列式计算时也常常用到。

3. 克莱姆(Cramer)法则

对有 n 个未知量 n 个方程的线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \tag{1.3}$$

称之为 **n 元线性方程组**。若右端的常数 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 不全为零，则称(1.3)为**非齐次线性方程组**；而当 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 全为零，则称其为**齐次线性方程组**。记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为**线性方程组的系数行列式**，又记

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad j=1,2,\cdots,n$$

D_j 是用方程右端的常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 来替换系数行列式 D 中的第 j 列的元素而得到的行列式。

定理 2(克莱姆法则) 如果前述线性方程组(1.3)的系数行列式 $D\neq0$，则方程组有惟一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D}$$

如果前述线性方程组(1.3) 为齐次线性方程组，而且其系数行列式 $D\neq0$，则方程组有惟一零解；**克莱姆法则的另一个推广性结论是**：对应于 (1.3) 的齐次线性方程组有非零解的充要条件是，该齐次线性方程组的系数行列式 $D=0$。对此将在第四章中作进一步的讨论。

第二节 典型例题

行列式计算是本章主要问题之一。行列式计算有以下方法：

1. 按行列式的定义或定理 1 的结论展开计算

【例 1】 计算 4 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$$

解法一 将该行列式按定义展开

$$D=a\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{vmatrix}+b\cdot(-1)^{1+4}\cdot\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ 0 & c & d \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

再把两个三阶行列式分别按第三行展开，得

$$D=ad\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}-bc\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=(ad-bc)^2$$

本题利用行列式的性质 2 来计算也是可以的。

解法二

$$D\xlongequal[r_3\leftrightarrow r_2]{r_4\leftrightarrow r_3}(-1)^2\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 & d \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 0 \end{vmatrix}\xlongequal[c_3\leftrightarrow c_2]{c_4\leftrightarrow c_3}(-1)^2\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{vmatrix}$$

这样得到的是一个**分块对角行列式**，由分块对角矩阵的性质（参见教材第二章矩阵），有

$$D=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=(ad-bc)^2$$

【例 2】 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} \alpha & \beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha & \beta \\ \beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{vmatrix}$$

解 行列式的第一列仅有的两个非零元素，它们的余子式均为上（下）三角行列式，所以将这个行列式按第一列展开，有

$$D=\alpha\cdot\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{vmatrix}+\beta\cdot(-1)^{n+1}\cdot\begin{vmatrix} \beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha & \beta \end{vmatrix}$$

$$=\alpha^n+(-1)^{n-1}\beta^n$$

当然，将行列式按最后一行展开，效果是一样的。

【例 3】 求 x 的 4 次多项式函数 $f(x)=\begin{vmatrix} x & x & 1 & 0 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ 2 & 3 & x & 2 \\ 1 & 1 & 2 & x \end{vmatrix}$ 中 x^3 的系数。

解 若将函数 $f(x)$ 的定义式中的 4 阶行列式按行列式定义展开，则第一行第一个元素 x 的代数余子式 $\begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ 3 & x & 2 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix}$ 是 x 的三次式，而且这个代数余子式的展开式中没有 x 的二次项；行列式第一行第二个元素 x 的代数余子式 $(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & x & 2 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix}$ 是 x 的二次式，x^2 项的系数为 -1；又行列式第一行的其它两个元素（是常数）的代数余子式中显然均不含 x^3 项，所以由行列式定义可知，$f(x)$ 的展开式中 x^3 项的系数为 -1。

【例 4】 设行列式

$$A=\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -2 & 6 \\ 21 & 31 & 51 & 11 \end{vmatrix}$$

求 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$

解法一 如果直接计算 4 个 3 阶的代数余子式，计算量比较大。现在利用行列式性质 6，用它的第二行元素乘第四行元素的代数余子式，应有

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}+2A_{44}=0$$

于是

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=-A_{44}=-(-1)^{4+4}\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3+(-1)r_2]{r_1+(-1)r_2}-\begin{vmatrix} 0 & -6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} -6 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}=15$$

解法二 先作一个新的行列式

$$B=\begin{vmatrix}1&-5&2&3\\1&1&1&2\\1&4&-2&6\\1&1&1&1\end{vmatrix}$$

与原行列式相比，只是将其第四行元素换为要计算式子 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$ 的系数。因为改变行列式的第四行元素并不影响该行元素的代数余子式，于是按照行列式的展开性质，若将行列式 B 按照最后一行展开，则有

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=B$$

$$\xlongequal[i=2,3,4]{r_i+(-1)r_1}\begin{vmatrix}1&-5&2&3\\0&6&-1&-1\\0&9&-4&3\\0&6&-1&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6&-1&-1\\9&-4&3\\6&-1&-2\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3+(-1)r_1}\begin{vmatrix}6&-1&-1\\9&-4&3\\0&0&-1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}6&-1\\9&-4\end{vmatrix}=15$$

2. 用行列式的性质 5，将行列式化为特殊形式来计算

【例 5】 计算 4 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}4&-3&1&2\\-3&1&-1&0\\5&-1&0&3\\1&-1&2&1\end{vmatrix}$$

解 对低阶的数字行列式，通常利用行列式的性质 5，将它化为上三角形式。

$$D\xlongequal{c_1\leftrightarrow c_3}-\begin{vmatrix}1&-3&4&2\\-1&1&-3&0\\0&-1&5&3\\2&-1&1&1\end{vmatrix}\xlongequal[r_4+(-2)r_1]{r_2+r_1}-\begin{vmatrix}1&-3&4&2\\0&-2&1&2\\0&-1&5&3\\0&5&-7&-3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{vmatrix}1&-3&4&2\\0&-1&5&3\\0&-2&1&2\\0&5&-7&-3\end{vmatrix}\xlongequal[r_4+5r_2]{r_3+(-2)r_2}\begin{vmatrix}1&-3&4&2\\0&-1&5&3\\0&0&-9&-4\\0&0&18&12\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+2r_3}\begin{vmatrix}1&-3&4&2\\0&-1&5&3\\0&0&-9&-4\\0&0&0&4\end{vmatrix}=1\times(-1)\times(-9)\times4=36$$

【例 6】 计算 $n(n\geqslant2)$ 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & x & \cdots & x \\ 1 & x & 0 & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x & x & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

解 将第一行元素的 $-x$ 倍加到从第二行到第 n 行的每一行上去

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -x & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -x & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -x \end{vmatrix}$$

这个行列式通常称为**爪型行列式**。当 $x=0$ 时，$D=0$；而当 $x\neq 0$ 时，再将上述行列式从第二列到第 n 列每一列的 $\frac{1}{x}$ 倍都加到第一列上去，有

$$D=\begin{vmatrix} \frac{n-1}{x} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -x & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x \end{vmatrix}$$

$$=\frac{n-1}{x}\cdot(-x)^{n-1}=(-1)^{n-1}(n-1)x^{n-2}$$

【例 7】 计算 $n(n\geqslant 2)$ 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 1 & x & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ 1 & x & x & 1 & \cdots & n-3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x & x & x & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

解 从 D_n 的第二行开始，每行的（-1）倍加到前一行，得

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1-x & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-x & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & 1 \\ 1 & x & x & \cdots & x & 1 \end{vmatrix}$$

按第一列展开

$$D_n=(-1)^{n-1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1-x & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1-x & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & 1 \end{vmatrix}$$

对上面的行列式，从第二行开始，再将其以后每行的（-1）倍加到前一行，得

$$D_n=(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1-x & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n+1}x^{n-2}$$

3. 用行列式的性质 4，将行列式拆分开来计算

【例 8】 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ -a & x & a & \cdots & a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a & -a & -a & \cdots & x & a \\ -a & -a & -a & \cdots & -a & x \end{vmatrix} \quad (a\neq 0)$$

解 先将行列式的最后一列变形

$$D_n=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a+0 \\ -a & x & a & \cdots & a & a+0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a & -a & -a & \cdots & x & a+0 \\ -a & -a & -a & \cdots & -a & a+(x-a) \end{vmatrix}$$

由行列式性质 4，依照最后一列行列式可拆分为

$$D_n=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ -a & x & a & \cdots & a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a & -a & -a & \cdots & x & a \\ -a & -a & -a & \cdots & -a & a \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & 0 \\ -a & x & a & \cdots & a & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a & -a & -a & \cdots & x & 0 \\ -a & -a & -a & \cdots & -a & x-a \end{vmatrix}$$

对上式右端第一个行列式，将其最后一列的 1 倍加到前面所有各列上去，行列式化为上三角形式：

$$\begin{vmatrix} x+a & 2a & 2a & \cdots & 2a & a \\ 0 & x+a & 2a & \cdots & 2a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x+a & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$$

其值为 $a(x+a)^{n-1}$；

而对上式右端第二个行列式，可将其按最后一列展开。总之有

$$D_n=a(x+a)^{n-1}+(x-a)\cdot D_{n-1} \tag{1.4}$$

再将原行列式最后一行作一种对称的变形

$$D_n=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ -a & x & a & \cdots & a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a & -a & -a & \cdots & x & a \\ -a+0 & -a+0 & -a+0 & \cdots & -a+0 & -a+(x+a) \end{vmatrix}$$

依照最后一行将行列式拆分，类似地可得到

$$D_n=-a(x-a)^{n-1}+(x+a)\cdot D_{n-1} \tag{1.5}$$

从（1.4）式、（1.5）式两式中不难解得

$$D_n=\frac{(x+a)^n+(x-a)^n}{2}$$

4. 利用递推关系计算

【例 9】 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1+a_0\cdot x \end{vmatrix}$$

解 将它按第一列展开，得

$$D_n=x\cdot\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_2 & a_1+a_0\cdot x \end{vmatrix}+$$

$$(-1)^{n+1}a_n \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}$$

$$= x \cdot D_{n-1} + (-1)^{n+1}a_n \cdot (-1)^{n-1}$$

$$= x \cdot D_{n-1} + a_n$$

注意到这个递推式对任意 $n \geqslant 2$ 均成立，所以

$$\begin{aligned} D_n &= x \cdot (x \cdot D_{n-2} + a_{n-1}) + a_n \\ &= x^2 \cdot D_{n-2} + a_{n-1} \cdot x + a_n \\ &= \cdots\cdots \\ &= x^{n-1} \cdot D_1 + a_2 \cdot x^{n-2} + \cdots + a_{n-2} \cdot x^2 + a_{n-1} \cdot x + a_n \\ &= a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + a_2 \cdot x^{n-2} + \cdots + a_{n-2} \cdot x^2 + a_{n-1} \cdot x + a_n \end{aligned}$$

【例 10】 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a \end{vmatrix}$$

解 此行列式元素的排列结构有显明的特点，所以通常将这种类型的行列式称为**三对角行列式**。现将它按第一列来展开，就得到下面的递推关系

$$D_n = (1-a) \cdot D_{n-1} + (-1)^{2+1}(-1) \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a \end{vmatrix}$$

$$= (1-a) \cdot D_{n-1} + a \cdot D_{n-2} \tag{1.6}$$

又

$$D_1 = 1-a,\ D_2 = \begin{vmatrix} 1-a & a \\ -1 & 1-a \end{vmatrix} = (1-a)^2 + a = a^2 - a + 1 \tag{1.7}$$

由（1.6）式和（1.7）式，有