高中数学竞赛专题讲座

丛书策划　李胜宏
丛书主编　陶平生　苏建一
　　　　　刘康宁　边红平

FUSHU YU DUOXIANGSHI

复数与多项式

本书主编　岑爱国

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

高中数学竞赛专题讲座

★ 数学结构思想及解题方法
★ 初等数论
★ 复数与多项式
★ 组合问题
★ 平面几何
★ 函数与函数方程
★ 不等式
★ 排列组合与概率
★ 数列与归纳法
★ 集合与简易逻辑
★ 三角函数
★ 立体几何
★ 解析几何

ISBN 978-7-308-05379-2

9 787308 053792 >

定价：13.00 元

高中数学竞赛专题讲座

复数与多项式

本书主编　岑爱国

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学竞赛专题讲座．复数与多项式/陶平生等主编．—杭州：浙江大学出版社，2007.6
ISBN 978-7-308-05379-2

Ⅰ．高…　Ⅱ．陶…　Ⅲ．数学课—高中—教学参考资料　Ⅳ．G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 082230 号

高中数学竞赛专题讲座(复数与多项式)

本书主编　岑爱国

责任编辑　沈国明
封面设计　刘依群
出版发行　浙江大学出版社
(杭州天目山路 148 号　邮政编码 310028)
(E-mail：zupress@mail.hz.zj.cn)
(网址：http://www.zjupress.com)
排　　版　杭州大漠照排印刷有限公司
印　　刷　富阳市育才印刷有限公司
开　　本　787mm×960mm　1/16
印　　张　10
字　　数　190 千
版 印 次　2007 年 6 月第 1 版　2007 年 6 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-05379-2
定　　价　13.00 元

版权所有　翻印必究　印装差错　负责调换

浙江大学出版社发行部邮购电话(0571)88072522

丛书编委会

丛书策划 李胜宏

丛书主编 陶平生　苏建一　刘康宁　边红平

编委名单

陶平生(江西科技师范学院)　苏建一(东北育才中学)

刘康宁(陕西铁路第一中学)　边红平(武汉钢铁厂第三中学)

黄军华(深圳中学)　王建中(长沙第一中学)

岑爱国(武汉钢铁厂第三中学)　韦吉珠(华南师大附中)

张　雷(东北育才中学)　王俊明(吉林市第一中学)

李世杰(衢州市教研室)　沈虎跃(镇海中学)

斯理炯(诸暨中学)　虞金龙(绍兴第一中学)

马洪炎(北仑中学)

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

编写说明

影响最大、级别最高的中学生“国际数学奥林匹克”(简称IMO)由来已久。自第1届IMO于1959年在罗马尼亚举行以来,有近60年的历史,其影响越来越广泛。在国际数学奥林匹克的推动下,世界各地的数学竞赛活动如火如荼。目前,我国数学竞赛逐步形成了从全国联合竞赛、全国中学生数学冬令营到国家集训队一个完整的竞赛选拔体系。

数学竞赛作为一项智力活动,吸引了无数数学爱好者积极参与,也为那些对数学有浓厚兴趣和有数学天赋的学生提供了一个展示自我的平台,是发现和培养数学人才的一条有效渠道。我们欣喜地看到,通过这项活动,发现了一批数学苗子,培养了一批数学人才,许多参与竞赛的优秀选手后来都成了杰出的数学家。

总体看来,我国的数学竞赛体制日趋完善,它的一些功能和作用也日益凸显。随着高校招生制度的改革,各种学科竞赛,尤其是数学竞赛的选拔功能越来越被广大高校所认可。事实上,学科竞赛已经成为高校自主招生和选拔人才的重要途径之一。

我们本着为数学竞赛的普及、提高做点有益事情的愿望,在全国范围内组织一批长期从事数学竞赛且做出杰出成绩的一线专家编写了一套“高中数学竞赛专题讲座丛书”。丛书包括《初等数论》、《函数与函数方程》、《复数与多项式》、《不等式》、《组合问题》、《排列组合与概率》、《数列与归纳法》、《集合与简易逻辑》、《三角函数》、《立体几何》、《平面几何》、《解析几何》和《数学结构思想及解题方法》13种。

丛书的起点是高中阶段学生必须掌握的数学基本知识和全国数学竞赛大纲要求的一些基本数学思想、方法,凡是对数学爱好的高中学生都有能力阅读。丛书的特点是:

1. 充分吸收了世界各地的优秀数学竞赛试题,通过对典型例题的解剖,

传授数学思想方法，侧重培养学生的逻辑思维能力，不唯解题而解题；

2. 本着少而精的原则选择材料，不搞题海战术，不追求大而全，而是以点带面，举一反三；

3. 以数学修养和能力培养为立意，通过深刻剖析问题的数学背景，挖掘数学内涵，培养学生的数学品格和解决实际问题的能力；

4. 在注重基础知识训练同时，有适当程度的拔高，对参加冬令营甚至是更高层次的竞赛都有一定的指导作用和参考价值。

丛书由浙江大学数学系教授、博士生导师、全国数学奥林匹克竞赛领队李胜宏策划；丛书由陶平生、苏建一、刘康宁、边红平主编；参加编写的成员是：陶平生、苏建一、刘康宁、边红平、黄军华、王建中、岑爱国、韦吉珠、张雷、王俊明、李世杰、沈虎跃、斯理炯、虞金龙、马洪炎。

鉴于我们的水平有限，书中的不妥之处敬请读者批评指正。

目 录

第1讲　复数的概念与运算

知识点金

1. 复数的概念

复数有四种表示形式：

代数形式：$z = a + b\mathrm{i}$，$a, b \in \mathbf{R}$；

几何形式：复数 $z = a + b\mathrm{i}\,(a, b \in \mathbf{R})$ 与复平面内的点 $Z(a, b)$ 或由原点发出的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 一一对应；

三角形式：$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$，$r \geqslant 0$，$\theta \in \mathbf{R}$；

指数形式：$z = re^{\mathrm{i}\theta}$，$r \geqslant 0$，$\theta \in \mathbf{R}$.

其中，$e^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$，角 θ 为复数 z 的辐角. 这就是著名的欧拉(Euler)公式.

通过这四种形式来表达复数，使复数的概念更加清晰、直观、形象、深刻. 这四种形式所蕴含的实际意义，沟通了代数、三角、几何等学科间的联系. 由它们所建立起来的复数的运算法则，都具有各自的特点，通过它们之间的彼此转化，我们能灵活地分析问题和解决问题.

2. 复数的运算法则

加、减法：$(a + b\mathrm{i}) \pm (c + d\mathrm{i}) = (a \pm c) + (b \pm d)\mathrm{i}$；

乘法：$(a + b\mathrm{i})(c + d\mathrm{i}) = (ac - bd) + (bc + ad)\mathrm{i}$，

$$r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1) \cdot r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2) = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1 + \theta_2)]；$$

除法：$\dfrac{a + b\mathrm{i}}{c + d\mathrm{i}} = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2}\mathrm{i}\,(c + d\mathrm{i} \neq 0)$，

$$\frac{r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1 - \theta_2)]；$$

乘方：$[r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta)\,(n \in \mathbf{N}^*)$；

开方：复数 $r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 的 n 次方根是 $\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$，$k=0,1,\cdots,n-1$.

3. 复数的模与共轭复数

共轭复数的性质：

(1) $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$；

(2) $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$，$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}(z_2\neq 0)$；

(3) $\mathrm{Re}(z)=\frac{1}{2}(z+\bar{z})$，$\mathrm{Im}(z)=\frac{1}{2\mathrm{i}}(z-\bar{z})$；

(4) z 是实数的充要条件是 $\bar{z}=z$，z 是纯虚数的充要条件是 $\bar{z}=-z$ 且 $z\neq 0$；

(5) $z\cdot\bar{z}=|z|^2=|\bar{z}|^2$.

复数的模的性质：

(1) $\max\{|\mathrm{Re}(z)|,|\mathrm{Im}(z)|\}\leqslant|z|\leqslant|\mathrm{Re}(z)|+|\mathrm{Im}(z)|$；

(2) $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$，$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}(z_2\neq 0)$；

(3) $||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$，当 z_1 或 z_2 中有一个为零时，上述不等式等号成立；当 $z_1z_2\neq 0$ 时，当且仅当 $|\arg z_1-\arg z_2|=\pi$ 时，左边取等号；当且仅当 $\arg z_1=\arg z_2$ 时，右边取等号.

类似地，还有 $||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1-z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$.
这两个不等式称为三角不等式.

4. 两个复数相等的充要条件是它们的实部、虚部对应相等，或者它们的模与辐角主值对应相等(非零复数). 利用复数相等的充要条件，可以把复数问题转化为实数问题，从而获得解决问题的一种途径.

复数的模也是将复数问题实数化的有效方法之一. 善于利用模的性质，是模运算中的一个突出方面.

例题精析

例 1 设复数 α，β 满足 $|\alpha|=|\beta|=1$，$\alpha+\beta+1=0$. 求证：α，β 都是 1 的立方根.

分析 复数表示形式的多样化为我们求解复数问题提供了多角度的思维方式.

证法 1 运用代数形式. 设 $\alpha=a+b\mathrm{i}$，$\beta=c+d\mathrm{i}$，$a,b,c,d\in\mathbf{R}$，则由 $|\alpha|=|\beta|=1$ 得 $a^2+b^2=1$，$c^2+d^2=1$. ①

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

再由 $\alpha+\beta=-1$，根据复数相等的充要条件得 $a+c=-1$，$b+d=0$. ②

将上述①，②中四式联立，解得 $a=c=-\frac{1}{2}$，$b=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$，$d=\mp\frac{\sqrt{3}}{2}$.

所以 $\alpha=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，$\beta=-\frac{1}{2}\mp\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$. 故 $\alpha^3=\beta^3=1$.

证法 2 运用三角形式. 由 $|\alpha|=|\beta|=1$，可设 $\alpha=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$，$\beta=\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi$ $(\theta, \varphi\in\mathbf{R})$. 再由 $\alpha+\beta=-1$，得 $\begin{cases}\cos\theta+\cos\varphi=-1\\ \sin\theta+\sin\varphi=0\end{cases}$.

由此求得 $\cos\theta=-\frac{1}{2}$，$\sin\theta=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$，从而 $\cos\varphi=-\frac{1}{2}$，$\sin\varphi=\mp\frac{\sqrt{3}}{2}$. 所以 $\alpha=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，$\beta=-\frac{1}{2}\mp\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

证法 3 考虑几何意义. 由 $\alpha+\beta=-1$ 及 $|\alpha|=|\beta|=1$，可设 $\overrightarrow{OA}=\alpha$，$\overrightarrow{OB}=\beta$，$\overrightarrow{OC}=-1$，如图 1-1. 根据复数加法的几何意义，可知四边形 $OACB$ 是平行四边形，且各边相等，从而 $\angle xOA=120^\circ$，$\angle xOB=120^\circ$. 因此 $\alpha=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，$\beta=-\frac{1}{2}\mp\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

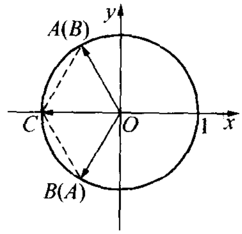

图 1-1

证法 4 运用共轭复数的运算技巧. 由 $\alpha+\beta=-1$，知 $|\alpha+\beta|^2=1$，即 $(\alpha+\beta)(\bar{\alpha}+\bar{\beta})=1$. 展开上式，并利用 $\alpha\bar{\alpha}=|\alpha|^2=1$，$\beta\bar{\beta}=|\beta|^2=1$ 进行化简，得 $\alpha\bar{\beta}+\bar{\alpha}\beta+1=0$. 将 $\beta=-\alpha-1$，$\bar{\beta}=-\bar{\alpha}-1$ 代入上式并化简，得 $\alpha+\bar{\alpha}+1=0$. 将上式两边同乘以 α，得 $\alpha^2+\alpha+1=0$. 所以 $\alpha^3=1$. 同理 $\beta^3=1$.

评注 本例中采用的 4 种证明方法是处理复数问题的基本方法和技巧.

例 2 求证：$[(2a-b-c)+(b-c)\sqrt{3}\mathrm{i}]^3=[(2b-c-a)+(c-a)\sqrt{3}\mathrm{i}]^3$.

分析 如果将等式的两边展开，则运算太繁. 可以考虑用 1 的三次单位虚根 w 来简化运算.

证明 左边 $=[2a+b(-1+\sqrt{3}\mathrm{i})+c(-1-\sqrt{3}\mathrm{i})]^3=(2a+2bw+2cw^2)^3$，

其中 $w=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，$w^2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

$$\begin{aligned}\text{右边}&=[a(-1-\sqrt{3}\mathrm{i})+2b+c(-1+\sqrt{3}\mathrm{i})]^3=(2aw^2+2b+2cw)^3\\&=[(2a+2bw+2cw^2)w^2]^3=(2a+2bw+2cw^2)^3=\text{左边}.\end{aligned}$$

故等式成立.

例 3 给定实数 a，b，c. 已知复数 z_1，z_2，z_3 满足 $\begin{cases}|z_1|=|z_2|=|z_3|=1 & ①\\ \frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_3}+\frac{z_3}{z_1}=1 & ②\end{cases}$，

求 $|az_1+bz_2+cz_3|$ 的值.

分析 1 由①得 $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\left|\frac{z_2}{z_3}\right|=\left|\frac{z_3}{z_1}\right|=1$，利用复数的三角形式或指数形式，可设 $\frac{z_1}{z_2}=e^{i\alpha}$，$\frac{z_2}{z_3}=e^{i\beta}$，则 $\frac{z_3}{z_1}=e^{-i(\alpha+\beta)}$，代入②，并利用复数相等的充要条件求解.

解法 1 由条件①可设 $\frac{z_1}{z_2}=e^{i\alpha}$，$\frac{z_2}{z_3}=e^{i\beta}$，则 $\frac{z_3}{z_1}=e^{-i(\alpha+\beta)}$. 代入条件②，有 $e^{i\alpha}+e^{i\beta}+e^{-i(\alpha+\beta)}=1$.

由欧拉公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，对上式两边取虚部，得

$$0=\sin\alpha+\sin\beta-\sin(\alpha+\beta)=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}.$$

所以 $\alpha=2k\pi$ 或 $\beta=2k\pi$ 或 $\alpha+\beta=2k\pi$，从而 $z_1=z_2$ 或 $z_2=z_3$ 或 $z_3=z_1$.

若 $z_1=z_2$，代入条件②，即 $1+\frac{z_1}{z_3}+\frac{z_3}{z_1}=1$，故 $\left(\frac{z_3}{z_1}\right)^2=-1$，$z_3=\pm iz_1$，

这时 $|az_1+bz_2+cz_3|=|z_1|\cdot|a+b\pm ci|=\sqrt{(a+b)^2+c^2}$.

类似地，若 $z_2=z_3$，则 $|az_1+bz_2+cz_3|=\sqrt{(b+c)^2+a^2}$；若 $z_3=z_1$，则 $|az_1+bz_2+cz_3|=\sqrt{(c+a)^2+b^2}$. 因此，$|az_1+bz_2+cz_3|$ 的值为 $\sqrt{(a+b)^2+c^2}$ 或 $\sqrt{(b+c)^2+a^2}$ 或 $\sqrt{(c+a)^2+b^2}$.

分析 2 由条件①及共轭复数的性质可得 $\overline{z_1}=\frac{1}{z_1}$，$\overline{z_2}=\frac{1}{z_2}$，$\overline{z_3}=\frac{1}{z_3}$，再利用代数恒等变形(因式分解)求解.

解法 2 由 $\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_3}+\frac{z_3}{z_1}=1$ 得 $z_1^2z_3+z_2^2z_1+z_3^2z_2=z_1z_2z_3$ ③

及 $\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}+\frac{\overline{z_2}}{\overline{z_3}}+\frac{\overline{z_3}}{\overline{z_1}}=1$ ④.

由于 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$，所以 $\overline{z_1}=\frac{1}{z_1}$，$\overline{z_2}=\frac{1}{z_2}$，$\overline{z_3}=\frac{1}{z_3}$，

于是④式可化为 $\frac{z_2}{z_1}+\frac{z_3}{z_2}+\frac{z_1}{z_3}=1$，

即 $z_2^2z_3+z_3^2z_1+z_1^2z_2=z_1z_2z_3$ ⑤.

由③、⑤，得 $z_1^2z_3+z_2^2z_1+z_3^2z_2=z_2^2z_3+z_3^2z_1+z_1^2z_2$，

即 $(z_1-z_2)(z_2-z_3)(z_3-z_1)=0$，所以 $z_1=z_2$ 或 $z_2=z_3$ 或 $z_3=z_1$.

以下同解法 1.

例 4 方程 $x^{10}+(13x-1)^{10}=0$ 的 10 个复数根分别为 r_1，$\overline{r_1}$，r_2，$\overline{r_2}$，r_3，$\overline{r_3}$，r_4，$\overline{r_4}$，r_5，$\overline{r_5}$. 求代数式 $\dfrac{1}{r_1\overline{r_1}}+\dfrac{1}{r_2\overline{r_2}}+\cdots+\dfrac{1}{r_5\overline{r_5}}$ 的值.

分析 注意到 $x\neq 0$，于是原方程可化为 $\left(13-\dfrac{1}{x}\right)^{10}=-1$. 令 $y=13-\dfrac{1}{x}$，将问题转化为研究方程 $y^{10}=-1$ 的复数根.

解 显然 $x\neq 0$，于是原方程可化为 $\left(13-\dfrac{1}{x}\right)^{10}=-1$. 令 $y=13-\dfrac{1}{x}$，则有 $y^{10}=-1$. 设方程 $y^{10}=-1$ 的 10 个复数根分别为 ε_k，$\overline{\varepsilon_k}(k=1,2,3,4,5)$，其中 $\varepsilon_k=\cos\dfrac{(2k-1)\pi}{10}+\mathrm{i}\sin\dfrac{(2k-1)\pi}{10}$，$k=1,2,3,4,5$. 不妨设 $13-\dfrac{1}{r_k}=\varepsilon_k$，则 $\dfrac{1}{r_k}=13-\varepsilon_k$，$k=1,2,3,4,5$. 于是，有 $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}\dfrac{1}{r_k\overline{r_k}}=\sum_{k=1}^{5}(13-\varepsilon_k)(13-\overline{\varepsilon_k})=\sum_{k=1}^{5}[170-13(\varepsilon_k+\overline{\varepsilon_k})]$

$$=850-26\left(\cos\frac{\pi}{10}+\cos\frac{3\pi}{10}+\cos\frac{5\pi}{10}+\cos\frac{7\pi}{10}+\cos\frac{9\pi}{10}\right)=850.$$

即所求代数式的值为 850.

例 5 若 z 是复数，$|z|=1$ 且 $u=z^4-z^3-3z^2\mathrm{i}-z+1$. 求 $|u|$ 的最值，并求取得最值时的复数 z.

分析 u 的次数较高，使得进一步运算成为障碍. 由 $|z|=1$，得 $\dfrac{1}{z}=\bar{z}$，再结合复数的模的性质，有 $|u|=\left|z^2\left(z^2-z-3\mathrm{i}-\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z^2}\right)\right|=|(z^2+\bar{z}^2)-(z+\bar{z})-3\mathrm{i}|$，这为进一步的运算提供了可能.

解 由 $|z|=1$，得 $\bar{z}=\dfrac{1}{z}$，所以 $|u|=\left|z^2\left(z^2-z-3\mathrm{i}-\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z^2}\right)\right|=|(z^2+\bar{z}^2)-(z+\bar{z})-3\mathrm{i}|$.

设 $z=x+y\mathrm{i}$，x，$y\in\mathbf{R}$，则 $x^2+y^2=1$，且 $z^2=x^2-y^2+2xy\mathrm{i}=(2x^2-1)+2xy\mathrm{i}$，于是 $|u|=|2(2x^2-1)-2x-3\mathrm{i}|=|(4x^2-2x-2)-3\mathrm{i}|$.

记 $t=4x^2-2x-2$. 由 $x\in[-1,1]$，易知 $t\in\left[-\dfrac{9}{4},4\right]$，且 $|u|=|t-3\mathrm{i}|=\sqrt{t^2+9}$.

故当 $t=0$ 即 $z=1$ 或 $-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ 时，$|u|_{\min}=3$；当 $t=4$ 即 $z=-1$ 时，$|u|_{\max}=5$.

例 6 设 z_1，z_2，…，z_n 为复数，满足 $|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|=1$. 求证：上述 n 个复数中，必存在若干复数，它们的和的模不小于 $\dfrac{1}{6}$.

分析 问题求解的关键是按某一标准对上述复数分类求和.

证明 设 $z_k=a_k+\mathrm{i}b_k$, a_k, $b_k\in\mathbf{R}$, $k=1,2,\cdots,n$.

由复数的模的性质,得 $|z_k|\leqslant|a_k|+|b_k|$, $k=1,2,\cdots,n$.

从而 $$1=\sum_{k=1}^{n}|z_k|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|a_k|+\sum_{k=1}^{n}|b_k| \quad ①$$

又 $$\left|\sum_{k=1}^{n}z_k\right|=\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2+\left(\sum_{k=1}^{n}b_k\right)^2}\geqslant\max\left\{\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\right|,\left|\sum_{k=1}^{n}b_k\right|\right\} \quad ②$$

比较 ①, ②,为了便于沟通,可将 ① 式右边改写为

$$\sum_{a_k\geqslant0}|a_k|+\sum_{a_k<0}|a_k|+\sum_{b_k\geqslant0}|b_k|+\sum_{b_k<0}|b_k|=\left|\sum_{a_k\geqslant0}a_k\right|+\left|\sum_{a_k<0}a_k\right|+\left|\sum_{b_k\geqslant0}b_k\right|+\left|\sum_{b_k<0}b_k\right|.$$

于是,上述四项中必有一项不小于$\frac{1}{4}$,不妨设 $\left|\sum_{a_k\geqslant0}a_k\right|\geqslant\frac{1}{4}$.

从而 $$\left|\sum_{a_k\geqslant0}z_k\right|\geqslant\left|\sum_{a_k\geqslant0}a_k\right|\geqslant\frac{1}{4}>\frac{1}{6}.$$

评注 以下我们从另一角度出发思考问题:用直线 $y=x$ 及 $y=-x$ 将复平面分成四个区域,由于 $|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|=1$,所以在上述四个区域中,至少有一个区域中的所有复数的模的和不大于$\frac{1}{4}$. 为了简化问题,不妨设此区域为包含 x 轴正方向的区域(由于是取模,若不是此区域可进行旋转).

我们设这些复数为 z_{k_t},且 $z_{k_t}=a_t+\mathrm{i}b_t$, $t=1,2,\cdots,m(1\leqslant m\leqslant n,m\in\mathbf{N}^*)$,则 $a_t>0$,且 $\sum_{t=1}^{m}|z_{k_t}|\geqslant\frac{1}{4}$. 于是

$$\left|\sum_{t=1}^{m}z_{k_t}\right|=\sqrt{\left(\sum_{t=1}^{m}a_t\right)^2+\left(\sum_{t=1}^{m}b_t\right)^2}\geqslant\left|\sum_{t=1}^{m}a_t\right|=\sum_{t=1}^{m}|a_t|\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{t=1}^{m}\sqrt{a_t^2+b_t^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{t=1}^{m}|z_{k_t}|\geqslant\frac{1}{4\sqrt{2}}>\frac{1}{6}.$$ 从而使问题彻底解决.

例 7 任给 8 个非零实数 a_1, a_2, $\cdots$, a_8. 求证:下面六个数 $a_1a_3+a_2a_4$, $a_1a_5+a_2a_6$, $a_1a_7+a_2a_8$, $a_3a_5+a_4a_6$, $a_3a_7+a_4a_8$, $a_5a_7+a_6a_8$ 中,至少有一个是非负的.

分析 所给的六个数中,a_1, a_2; a_3, a_4; a_5, a_6; a_7, a_8 成对出现,可把它们构造成四个复数 $z_1=a_1+a_2\mathrm{i}$, $z_2=a_3+a_4\mathrm{i}$, $z_3=a_5+a_6\mathrm{i}$, $z_4=a_7+a_8\mathrm{i}$,每两个复数差的模中有对应的六个数的形式出现.

证明 设 $z_1=a_1+a_2\mathrm{i}$, $z_2=a_3+a_4\mathrm{i}$, $z_3=a_5+a_6\mathrm{i}$, $z_4=a_7+a_8\mathrm{i}$,则

$|z_1-z_2|^2=(a_1-a_3)^2+(a_2-a_4)^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2-2(a_1a_3+a_2a_4)$,

于是 $|z_1|^2+|z_2|^2-|z_1-z_2|^2=2(a_1a_3+a_2a_4)$.

同理，有 $|z_1|^2+|z_3|^2-|z_1-z_3|^2=2(a_1a_5+a_2a_6)$，

$$|z_1|^2+|z_4|^2-|z_1-z_4|^2=2(a_1a_7+a_2a_8),$$

$$|z_2|^2+|z_3|^2-|z_2-z_3|^2=2(a_3a_5+a_4a_6),$$

$$|z_2|^2+|z_4|^2-|z_2-z_4|^2=2(a_3a_7+a_4a_8),$$

$$|z_3|^2+|z_4|^2-|z_3-z_4|^2=2(a_5a_7+a_6a_8).$$

余下的只需证明复数 z_1，z_2，z_3，z_4 所对应的四个向量$\overrightarrow{OZ_1}$，$\overrightarrow{OZ_2}$，$\overrightarrow{OZ_3}$，$\overrightarrow{OZ_4}$中至少有两个向量之间的夹角小于或等于$\frac{\pi}{2}$. 而这是显然成立的，故原命题得证.

例 8 已知实数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的各项均不为 0，且 $a_n=a_{n-1}\cos\theta-b_{n-1}\sin\theta$，$b_n=a_{n-1}\sin\theta+b_{n-1}\cos\theta$，且 $a_1=1$，$b_1=\tan\theta$，θ 为已知数. 求 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的通项公式.

分析 构造复数 $z_n=a_n+b_n\mathrm{i}(n\in\mathbf{N}^*)$ 求解.

解 构造复数 $z_n=a_n+b_n\mathrm{i}(n\in\mathbf{N}^*)$，则

$$\frac{z_n}{z_{n-1}}=\frac{(a_{n-1}\cos\theta-b_{n-1}\sin\theta)+(a_{n-1}\sin\theta+b_{n-1}\cos\theta)\mathrm{i}}{a_{n-1}+\mathrm{i}b_{n-1}}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta.$$

所以 $\{z_n\}$ 是以 $z_1=1+\mathrm{i}\tan\theta$ 为首项，$\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$ 为公比的等比数列，于是

$$z_n=(1+\mathrm{i}\tan\theta)(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^{n-1}=\sec\theta(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\sec\theta(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta).$$

故 $a_n=\sec\theta\cos n\theta$，$b_n=\sec\theta\sin n\theta$.

评注 本题也可以用“归纳—猜想—证明”的方法处理，但计算量较大. 最后，我们看两道与二项式定理有关的问题.

例 9 证明三角恒等式 $\cos^n\theta=\frac{1}{2^n}\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k\cos(n-2k)\theta$，$n\in\mathbf{N}^*$.

分析 由复数的指数形式易知 $\cos^n\theta=\left(\frac{e^{\mathrm{i}\theta}+e^{-\mathrm{i}\theta}}{2}\right)^n$，利用二项式定理展开上式右边即证.

证明 由复数的指数形式及二项式定理得

$$\cos^n\theta=\left(\frac{e^{\mathrm{i}\theta}+e^{-\mathrm{i}\theta}}{2}\right)^n=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}C_n^k(e^{\mathrm{i}\theta})^{n-k}(e^{-\mathrm{i}\theta})^k$$

$$=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}C_n^k e^{\mathrm{i}(n-2k)\theta}=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cos(n-2k)\theta.$$

最后一步成立是因为由欧拉公式，和是实数，故每一项仅剩下实部. 事实上，由 $C_n^k=C_n^{n-k}$ 及 $\sin(-x)=-\sin x$，虚部都抵消了.

评注 对 $n=2, 3, 4$ 的情形，利用 $\cos(-x)=\cos x$，此恒等式简化为 $\cos^2\theta=\frac{1+\cos2\theta}{2}$，$\cos^3\theta=\frac{3\cos\theta+\cos3\theta}{4}$，$\cos^4\theta=\frac{3+4\cos2\theta+\cos4\theta}{8}$. 这些公式是很有用的.

例 10 求证：对任意 $n\in\mathbf{N}$，数 $\sum\limits_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{2k+1}2^{3k}$ 不能被 5 整除.

分析 由于 $2^3\equiv-2\pmod 5$，问题等价于证明 $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{2k+1}\cdot(-2)^k$ 不能被 5 整除. 用二项式定理展开 $(1+\sqrt{2}\mathrm{i})^{2n+1}$ 即得 S_n，进而获证.

证明 由于 $2^3\equiv-2\pmod 5$，问题等价于证明 $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{2k+1}\cdot(-2)^k$ 不能被 5 整除.

用二项式定理展开 $(1+\sqrt{2}\mathrm{i})^{2n+1}$，并把偶数项与奇数项分开，可得 $(1+\sqrt{2}\mathrm{i})^{2n+1}=R_n+\mathrm{i}\sqrt{2}S_n$，① 其中 $R_n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{2k}\cdot(-2)^k$. ①式两边用各自的共轭复数去乘，可得 $3^{2n+1}=R_n^2+2S_n^2$. 由于 $3^2\equiv-1\pmod 5$，由上式可得 $\pm3\equiv R_n^2+2S_n^2\pmod 5$.

这就证明了结论. 事实上，若 $S_n\equiv0\pmod 5$，就导致 $R_n^2\equiv\pm3\pmod 5$，但由于任意一个完全平方数被 5 除只能余 0，1 或 4，矛盾. 于是 $S_n\equiv0\pmod 5$ 是不可能的.

思考交流

思考题 复数 z_1,z_2,z_3,z_4,z_5 满足：

$$\begin{cases}|z_1|\leqslant1,\ |z_2|\leqslant1\\ |2z_3-(z_1+z_2)|\leqslant|z_1-z_2|\\ |2z_4-(z_1+z_2)|\leqslant|z_1-z_2|\\ |2z_5-(z_3+z_4)|\leqslant|z_3-z_4|\end{cases},$$

求 $|z_5|$ 的最大值.

解 由已知不等式及 $|z_1-z_2|+|z_1+z_2|\leqslant2\sqrt{|z_1|^2+|z_2|^2}$，得

$$\begin{aligned}4|z_5|&=2|2z_5-(z_3+z_4)+(z_3+z_4)|\\&\leqslant2[|2z_5-(z_3+z_4)|+|z_3+z_4|]\\&\leqslant2(|z_3-z_4|+|z_3+z_4|)\\&=|[2z_3-(z_1+z_2)]-[2z_4-(z_1+z_2)]|\\&\quad+|[2z_3-(z_1+z_2)]+[2z_4-(z_1+z_2)]+2(z_1+z_2)|\\&\leqslant|[2z_3-(z_1+z_2)]-[2z_4-(z_1+z_2)]|\\&\quad+|[2z_3-(z_1+z_2)]+[2z_4-(z_1+z_2)]|+2|z_1+z_2|\\&\leqslant2|z_1+z_2|+2\sqrt{|2z_3-(z_1+z_2)|^2+|2z_4-(z_1+z_2)|^2}\end{aligned}$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com