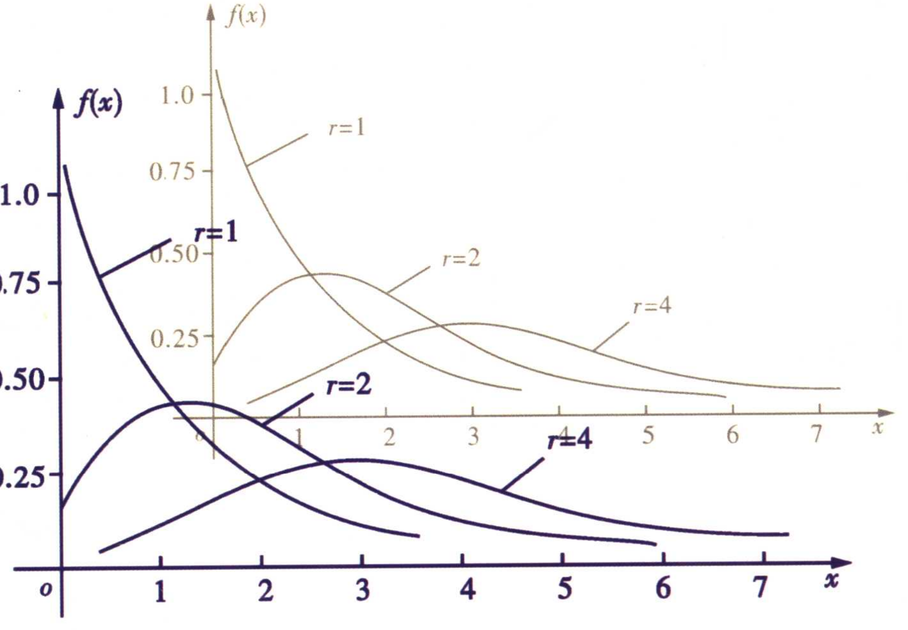
★高等院校十一·五系列核心教材★

概率论与数理统计

(理工类)

郭运瑞　谭德俊　主编



人民出版社

★高等院校十一·五系列核心教材★

概率论与数理统计

（理工类）

主　编　郭运瑞　谭德俊
副主编　张明亮　李乃雄
编　委　赵武超　葛　立　王莉萍　李乃雄
　　　　谭德俊　张明亮　郭运瑞
总主编　郭运瑞

人民出版社

责任编辑:辛春来

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计(理工类)/郭运瑞　谭德俊主编. 一北京:人民出版社,2006.8
(高等院校十一·五系列核心教材丛书)
ISBN 7-01-005782-6

Ⅰ.概…　Ⅱ.①郭…②谭…　Ⅲ.①概率论-高等学校-教材 ②数理统计-高等学校-教材　Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 101052 号

概率论与数理统计(理工类)

GAILVLUN YU SHULI TONGJI

郭运瑞　谭德俊　主编

人民出版社 出版发行
(100706　北京朝阳门内大街 166 号)

尚艺印装有限公司印刷　新华书店经销

2006 年 8 月第 1 版　2006 年 8 月北京第 1 次印刷
开本:787 毫米×1092 毫米 1/16　印张:18
字数:330 千字　印数:0,001-4,000 册

ISBN 7-01-005782-6　定价:26.00 元

邮购地址 100706　北京朝阳门内大街 166 号
人民东方图书销售中心　电话 (010)65250042　65289539

内 容 提 要

本书是“高等院校十一·五系列核心教材”之一,是根据高等院校理工类专业概率论与数理统计课程教学大纲和教学基本要求,结合编者多年的教学实践经验和研究成果编写而成的。内容包括:随机事件与概率、随机变量及其分布、随机向量及其分布、数字特征、大数定律和中心极限定理、抽样分布、参数估计、假设检验、方差分析、回归分析。每章都配有习题,书末附有参考答案。在例题和习题中有选择性的收录了历届研究生考试试题,便于教学,有利于考试复习。

本书可作为综合性大学、高等理工科院校、高等师范院校(非数学专业)的教材或参考书。也可供各类成人教育的师生使用。

序

龙永红

近年来,对于非数学专业的数学的各种形式、各种层次的改革从研究到实践都开展得如火如荼,不仅受到数学教师们而且受到学生和相关专业的教师们的广泛关注。归结起来,教学改革的内容不外乎教学手段和形式的改革以及教学内容的改革。其中教学内容的改革则主要集中在适应学生专业学习与发展的要求(包括知识和能力)以及适应学生自身条件和发展目标的个性化需求,前者表现在必要的教学内容的选择上,后者则体现在分层次教学上。无论如何,教学改革的基础和核心是教材建设。

在我国高等教育发展的历程中,曾涌现出一些优秀教材,这些教材对我国非数学专业的数学教育起了示范性和推动作用。但近年来,我国高等教育的发展和各学科的发展对数学教育提出了许多新的更加多样化的需求,而且近年来的许多教学改革的成果和经验也有必要吸收到教材中来。总体上,人们普遍认为传统的教材存在下列一些缺陷:

其一,过多地从数学学科内部考虑教学内容和体系,从一定意义上是数学专业相关课程教材的简写本,学生学习起来显得枯燥乏味。

其二,教学内容与学生所学专业之间联系不够紧密,与专业对数学的要求不相适应。

其三,教材过多地强调题型和解题技巧,有沦为题解之嫌,这影响学生对主要内容的把握而且导致学生对数学课程的恐惧感。

其四,对学生应用数学能力的培养不够。

这些认识是人们教育实践的切身体会,也是教育改革研究的成果。但认识问题只是第一步,解决问题则要有一个过程,需要广大第一线教师在教学实践中进行探索,这种探索过程是渐进的、长期的。我们的教材要不断地吸收这些实践经验。我们欣喜地看到非数学专业教材目前呈现出百花齐放的局面,这为适应大众化教育时代学生和学科对数学的多样化需求提供了条件。本套教材就是这一新环境下的产物,是参加本套教材编写,奋斗在教学和教学改革实践第一线教师实践和研究成果。

本套教材的特点在于它适应大众化教育时代教师们所在高校的学生和学科特点和要求;其编写简繁得当,叙述简洁明了到位,前后衔接自然,对学生把握知识间的联系十分有益;同时本套教材注意到对教材主线内容的适当延伸,这有助于开拓学生的思路和眼界,加强数学与其他学科和实践之间的联系。数学作为一门基础课,其改革是十分重要的,但也需要十分谨慎,因而教学改革必须是渐进的、承前启后的。本套教材吸收了传统教材的优点,是根据教学需要对传统教材的一种改良。

于中国人民大学

2006年3月10日

目 录

第一章　随机事件与概率

在自然界及人类社会活动中,可观察到的现象多种多样,有一类现象是具有确定性的.例如:同性电荷必然互相排斥;一个平面三角形的内角和一定等于180°;在一个标准大气压下纯净的水加热到100℃时必然沸腾.这类现象,只要在一定条件下进行观察或试验,其结果必然发生,是人们可以预知的.另有一类现象,在一定条件下有多种可能的结果,但到底出现哪一种结果是带有偶然性的,事先并不能确定.例如:掷同一枚质地均匀的硬币,硬币落地后的结果可能是正面朝上也可能是反面朝上;在城市交通的某一路口,记录一段时间内经过的车辆数目可能较多也可能较少;在一大批同类产品中任意抽取一件,抽到的可能是合格品也可能是次品.诸如此类现象,只有在进行观察和试验后才能知道它的结果,事先不能预知这种现象的具体结果,这类现象称为**随机现象**.

对于随机现象的一次具体观察或试验,事先并不能预知其结果,但在大量重复观察和试验中,它的结果却呈现某种客观规律性(统计规律性).比如就掷一枚硬币而言,出现正面朝上或反面朝上完全是偶然的.但在相同条件下多次掷同一枚质地均匀的硬币,就会发现“出现正面朝上”或“出现反面朝上”的次数大约各占总抛掷次数的1/2左右;又如就投一次篮球而言,NBA球星和非职业球员都有可能投进也可能投不进,但在相同条件下各多次投篮,几乎肯定是NBA球星进球的比例高.

概率论(Probability Theory)与数理统计(Mathematical Statistics)是研究随机现象内部蕴含的数量规律性的一门数学学科,也是现代数学的一个重要分支.它的思想、理论和方法在自然科学、社会科学、工农业生产实践、工程技术等领域有着广泛的应用.

§1.1　随机事件

1.1.1　随机试验与样本空间

为研究客观现象的规律,常常需要进行大量的观察或实验.我们把这种对客观现象进行的一次观察或一次科学实验统称为**一个试验**.

如果一个试验满足下述条件:

(1) 可以在相同条件下重复进行(**可重复性**);

(2) 所有可能结果是明确知道的,并且不止一个(**确定性**);

(3) 每次试验总是恰好出现这些可能结果中的一个,但在试验之前却不能肯定究竟出现哪一个(**随机性**).

则称它为**一个随机试验**,为方便起见,也简称为**试验**,用字母 E 表示.

以后,如无特别说明,我们所提到的试验都是指随机试验.

随机试验的每一个可能的不可分割的结果称为**基本事件**,也称为**样本点**,常用 ω 表示.由所有基本事件组成的集合称为**样本空间**,常用 Ω 表示.

每一个试验都有一个观测的目的,根据这个目的,试验被观测到有多个不同的不可分割的可能结果,这些可能的结果便是基本事件,它们组成的集合便是样本空间.

例1　抛掷一枚质地均匀的硬币,目的是观察它哪一面朝上,这时只有"正面"、"反面"两种不同的结果,至于硬币落在哪一个位置,朝哪一个方向滚动以及滚动的距离等都不在观察的目的之列,不能看做试验的结果. 因此这一随机试验的基本事件为:ω_1 ="正面",ω_2 ="反面",样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$.

例2　麻将游戏中抛掷一枚骰子的目的是观测向上一面出现的点数,因此有六个不同的结果:"出现的点数为 $i,i=1,2,\cdots,6$". 于是,这一随机试验的基本事件为:ω_i ="出现的点数为 $i,i=1,2,\cdots,6$",样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$.

1.1.2　随机事件

(一)随机事件

在一定的条件下可能出现也可能不出现的结果,称为这一条件下的**随机事件**,简称**事件**. 随机事件常用大写字母 A、B、C 等表示,如果属于随机事件 A 的某一个基本事件 ω 在随机试验中出现,则称 A 发生,否则,称 A 没发生.

由随机事件的定义可得:随机试验的每一个可能的结果都是随机事件,因此基本事件必为随机事件,除此以外,还有一类随机事件它是由若干基本事件组合而成的,我们称这类随机事件为**复合事件**.

例3　在 $0,1,2,\cdots,9$ 十个数中任意选取一个,所有不同的结果有十个:"取得的数是 $i,i=0,1,2,\cdots,9$",因此基本事件为:ω_i ="取得的数是 $i,i=0,1,2,\cdots,9$",A ="取得的数是奇数"、B ="取得的数大于6"都是复合事件. 事实上,$A=\{\omega_1,\omega_3,\omega_5,\omega_7,\omega_9\}$,$B=\{\omega_7,\omega_8,\omega_9\}$.

(二)必然事件与不可能事件

在一定的条件下,一定出现的结果称为这一条件下的**必然事件**,用字母 Ω 表示. 在一定的条件下,一定不出现的结果称为这一条件下的**不可能事件**,用字母 $\varnothing$ 表示.

对于例3,我们有 C ="取得的数不大于10"是必然事件,D ="取得的数大于10"是不可能事件.

由于每一次随机试验,必然有该随机试验的样本空间 Ω 中的一个基本事件出现,因此样本空间在每一次试验中必然发生,因而样本空间作为一个事件,是必然事件.

必然事件和不可能事件都是在试验之前可以准确预言的,因而本质上它们不是随机事件. 但为了方便起见,以后将它们均看做随机事件.

1.1.3　事件的关系和运算

我们引进了样本空间,并建立了事件和集合间的联系,于是事件的关系和运算完全可以运用集合间的关系和运算来处理. 为方便起见,我们假设 A、B、C 等为同一个试验中的事件.

(一)事件的包含与相等

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称**事件 A 包含于事件 B**(或**事件 B 包含事件 A**),记作 $A\subset B$(或 $B\supset A$).

如果事件 A、B 满足:$A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称**事件 A 与事件 B 相等**,或称**事件 A 与 B 等价**,

记作 $A=B$.

（二）事件的和（并）

事件 A 与事件 B 至少有一个发生（事件 A 发生或事件 B 发生）仍是一个事件，称此事件为 **A 与 B 的和（并）**，记作 $A\cup B$（或 $A+B$），即 $A\cup B=\{\omega|\omega\in A$ 或 $\omega\in B\}$.

类似地，事件“$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生”称为 **n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和（并）**，记作 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$. 事件“$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 中至少有一个发生”称为**可列无穷多个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的和（并）**，记作 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

（三）事件的积（交）

事件 A 与 B 同时发生仍是一个事件，称此事件为**事件 A 与事件 B 的积（交）**，记作 $A\cap B$（或 AB），即 $A\cap B=\{\omega|\omega\in A$ 且 $\omega\in B\}$.

类似地，事件“$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生”称为 **n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积（交）**，记作 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$. 事件“$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 同时发生”称为**可列无穷多个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的积（交）**，记作 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

（四）事件的差

事件 A 发生但事件 B 不发生仍是一个事件，称此事件为**事件 A 与事件 B 的差**，记作 $A-B$，即 $A-B=\{\omega|\omega\in A$ 且 $\omega\notin B\}$.

（五）互不相容（互斥）事件

若事件 A 与 B 不能同时发生，则称**事件 A 与 B 互不相容（或互斥）**，记作 $A\cap B=\varnothing$.

例如在例 3 的取数试验中，若设 $A=$“取到数 2”，$B=$“取到奇数”，则事件 A 与 B 互不相容，即 $A\cap B=\varnothing$.

（六）对立（逆）事件

若事件 B 等于 Ω 与事件 A 的差 $\Omega-A$，则称事件 B 为**事件 A 的对立（逆）事件**，记作 $B=\bar{A}$.

显然，这里 A、B 满足关系：$A\cup B=\Omega$，且 $A\cap B=\varnothing$，即就每次试验而言，A 与 B 有且仅有一个发生. 如果 B 为 A 的对立事件，则 A 也是 B 的对立事件，故也称 A 与 B 互为对立（逆）事件.

仍以例 3 中的取数试验为例，若设 $A=$“取到小于 7 的数”，$B=$“取到不小于 7 的数”，则 A 与 B 互为对立事件.

显然，如果 A 与 B 互为对立事件，则 A 与 B 一定互不相容. 但是，如果 A 与 B 互不相容，则 A 与 B 不一定是对立事件.

关于对立事件，有下列关系成立：

(1) $\bar{\bar{A}}=A$;　　(2) $A\bar{A}=\varnothing, A\cup\bar{A}=\Omega$;

(3) $A\bar{B}=A-B=A-AB$;　　(4) 若 $A\subset B$，则 $\bar{A}\supset\bar{B}$;

(5) $\overline{\varnothing}=\Omega$,　$\bar{\Omega}=\varnothing$.

（七）完备事件组

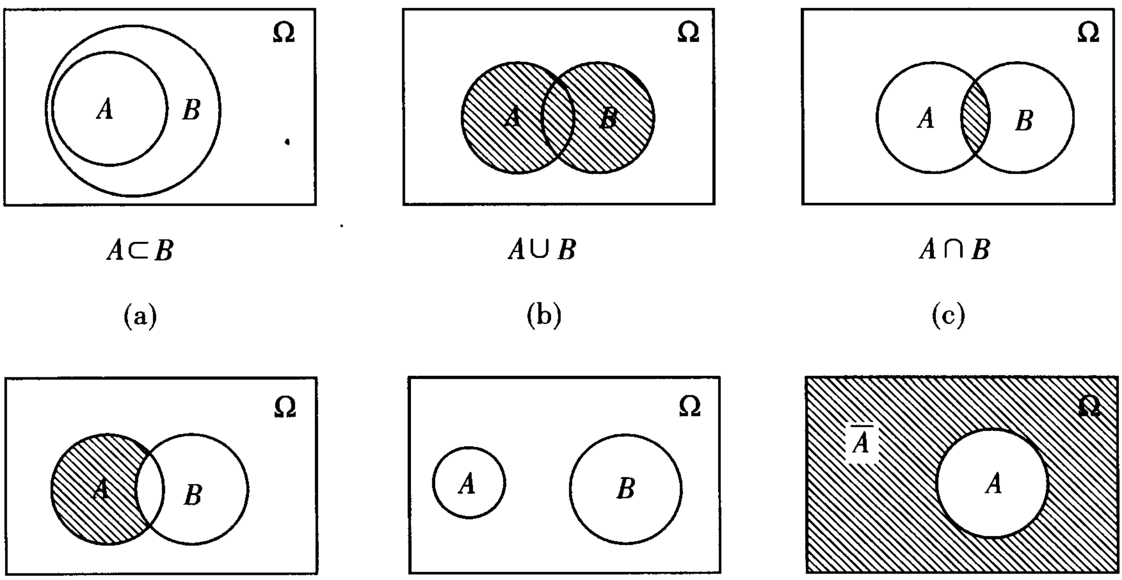
若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 满足：$A_iA_j=\varnothing\,(i\neq j, i,j=1,2,\cdots,n)$，且 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=\Omega$，即在每次试验中，

事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中有且仅有一个发生,则称 $\boldsymbol{A_1,A_2,\cdots,A_n}$ **构成一个完备事件组**,或称它是样本空间 Ω 的一个**划分**.

类似地,对于可列无穷多个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$,如果满足 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j,i,j=1,2,\cdots)$,且 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i=\Omega$,则称 $\boldsymbol{A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots}$ **构成一个完备事件组**,或称它是样本空间 Ω 的一个**划分**.

特别地,若 A 与 B 为对立事件,则 A、B 也构成一个完备事件组. 也称 A、B 是样本空间 Ω 的一个划分.

事件间的各种关系和运算,可用文氏图表示(如图 1－1 所示):



$A\subset B$　(a)　　$A\cup B$　(b)　　$A\cap B$　(c)

$A-B$　(d)　　$AB=\phi$　(e)　　$\overline{A}$　(f)

图 1－1

1.1.4　事件的运算性质

随机事件的运算具有以下基本性质:

(一)交换律

$$A\cup B=B\cup A$$
$$A\cap B=B\cap A$$

(二)结合律

$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$$
$$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$$

(三)分配律

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$
$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

(四)德·摩根律

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$
$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

分配律和德·摩根律均可推广到有限个或可列无穷多个事件的情形. 如

$$(\bigcup_i A_i) \cap B = \bigcup_i (A_i \cap B)$$
$$(\bigcap_i A_i) \cup B = \bigcap_i (A_i \cup B)$$
$$\overline{\bigcup_i A_i} = \bigcap_i \bar{A}_i, \qquad \overline{\bigcap_i A_i} = \bigcup_i \bar{A}_i$$

例 4　设 A,B,C 为三个事件,用 A,B,C 的运算式表示下列事件:

(1) A 发生而 B 与 C 都不发生:$A\bar{B}\bar{C}$ 或 $A-B-C$ 或 $A-(B\cup C)$.

(2) A,B 都发生而 C 不发生:$AB\bar{C}$ 或 $AB-C$.

(3) A,B,C 至少有一个事件发生:$A\cup B\cup C$.

(4) A,B,C 至少有两个事件发生:$(AB)\cup(AC)\cup(BC)$.

(5) A,B,C 恰好有两个事件发生:$(AB\bar{C})\cup(AC\bar{B})\cup(BC\bar{A})$.

(6) A,B,C 恰好有一个事件发生:$(A\bar{B}\bar{C})\cup(B\bar{A}\bar{C})\cup(C\bar{A}\bar{B})$.

(7) A,B 至少有一个发生而 C 不发生:$(A\cup B)\bar{C}$.

(8) A,B,C 都不发生:$\overline{A\cup B\cup C}$或 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

例 5　甲、乙、丙三人各向靶子射击一次,设 A_i 表示"第 i 人击中靶子",$i=1,2,3$. 试说明下列各式表示的事件:

(1) $A_1\bar{A}_2A_3$;　　(2) $(A_1\cup A_2)\bar{A}_3$;

(3) $A_1A_2\cup A_2A_3\cup A_1A_3$;　　(4) $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3\cup\bar{A}_1A_2\bar{A}_3\cup\bar{A}_1\bar{A}_2A_3$

解　(1) 仅有乙未击中靶;　　(2) 甲、乙至少一人击中,而丙未击中靶;

(3) 至少两人击中靶;　　(4) 靶上仅中一弹.

§1.2　概率

1.2.1　概率的直观意义

随机事件虽然有偶然性的一面,即在一次试验中可能发生也可能不发生,但在相同条件下进行大量重复试验,人们还是可以发现它有内在统计规律性,即它出现的可能性大小可通过区间[0,1]中的一个数值 p 来度量,这种用来刻画随机事件出现的可能性大小的数值称为事件的概率. 这就是概率的直观意义.

然而,要确定事件的概率并不是一件很容易的事,为此引入描述事件出现的可能性大小的另一个数量指标——频率的概念,进而引入概率的公理化定义.

1.2.2　频率及其性质

定义 1.1　将试验 E 重复进行 n 次,称事件 A 出现的次数 n_A 为**事件 A 出现的频数**,称比值$\frac{n_A}{n}$为**事件 A 在 n 次试验中出现的频率**,记作 $\mu_n(A)$,即

$$\mu_n(A) = \frac{n_A}{n}.$$

频率具有如下性质:

(1) $0 \leqslant \mu_n(A) \leqslant 1$($A$ 为任一事件);

(2) $\mu_n(\Omega)=1$;

(3) 若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 互不相容,则有

$$\mu_n\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \mu_n(A_i)$$

性质(1)、(2)显然成立.

对性质(3),下面仅就 $m=2$ 的情形给出证明:

设在 n 次重复试验中,A_1 出现了 n_1 次,A_2 出现了 n_2 次,则 $\mu_n(A_1)=\frac{n_1}{n}$,$\mu_n(A_2)=\frac{n_2}{n}$,因为 A_1 与 A_2 互不相容,所以 $A_1 \cup A_2$ 出现了 n_1+n_2 次,于是有

$$\mu_n(A_1 \cup A_2) = \frac{n_1+n_2}{n} = \frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n} = \mu_n(A_1) + \mu_n(A_2)$$

为研究事件的概率,人们曾作过投硬币的试验,并将其频率统计列表,如表 1-1、表 1-2 所示,表中 A 表示出现“正面”.

表 1-1

实验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	n_A	$\mu_n(A)$	n_A	$\mu_n(A)$	n_A	$\mu_n(A)$
1	4	0.8	25	0.50	251	0.502
2	2	0.4	21	0.42	249	0.498
3	3	0.6	22	0.44	248	0.496
4	4	0.8	26	0.52	250	0.500
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	25	0.50	261	0.522

表 1-2

试验者	n	n_A	$\mu_n(A)$
德·摩根	2048	1061	0.5181
蒲丰	4040	2048	0.5069
费勒	10000	4979	0.4979
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005
维尼	30000	14994	0.4998

从上述数据不难看出,在相同条件下进行的重复试验,同一个事件出现的频率是不尽相同的,也就是说频率具有波动性. 但是,当试验次数很大时,频率总是在某一个固定的数值 p(上述试验中 $p=0.5$)附近摆动,并且随着试验次数无限增大,频率与数值 p 相差很大的可能性越来越小(这将在第五章有比较详细的描述),也就是说频率具有稳定性,数值 p 便是频率的稳定值. 显然,频率如果稳定于较小的数值,则表明相应事件出现的可能性较小,反之,表明事件出现的概率较大.

大量的随机试验显示：尽管频率具有波动性，然而频率也具有稳定性. 频率的稳定性，正是随机现象的统计规律的体现，频率的稳定值 p 正是相应事件发生的可能性大小的数值度量. 因此，我们将频率的稳定值 p 作为相应事件的概率是合理的.

由于频率的稳定值是客观存在的，因此对于任何一个事件 A，描述它发生的可能性大小的概率值 $P(A)$ 也是客观存在的，由频率的三条性质使人们很自然地认为事件的概率值应具备相应的三条基本性质. 基于此，建立了概率的公理化定义.

1.2.3　概率的数学定义

定义 1.2　设 E 为一个随机试验，Ω 是 E 的样本空间，对于 E 的每一个事件 $A(A\subset\Omega)$，都赋予一个实数 $P(A)$，若 $P(A)$ 满足以下三条公理，则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

公理 1　**非负性**：对于任一事件 A，有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

公理 2　**正则性**：$P(\Omega)=1$.

公理 3　**可列可加性**：若 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 为可列无穷多个互不相容的事件，则

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i) = \sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$$

由上可知，对于试验 E 的任意一个确定的随机事件 A，所谓 A 的概率 $P(A)$，实际上是一个定义在由试验 E 的所有随机事件组成的集合到 $[0,1]$ 上的函数（布尔代数）在自变量取事件 A 时的函数值，如果令 $\mathscr{F}=\{A\mid A\subset\Omega\}$，$D=[0,1]$，则 $P(A)$ 是由 $\mathscr{F}$ 到 D 的函数.

1.2.4　概率的性质

由概率的公理化定义出发，可推出概率的性质：

性质 1　$P(\varnothing)=0$.

证明　因为

$$\varnothing = \varnothing\cup\varnothing\cup\cdots$$

由概率的可加性，得

$$P(\varnothing) = P(\varnothing)+P(\varnothing)+\cdots$$

又由概率的非负性，所以有

$$P(\varnothing) = 0.$$

此性质说明，不可能事件的概率为零. 但需要指出的是，概率为零的事件不一定是不可能事件（见第二章 §2.3 节）.

性质 2　若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为有限个互不相容事件，则有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i) = \sum_{i=1}^{n}P(A_i) \tag{1.1}$$

证明　因为

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n = A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\varnothing\cup\cdots$$

由概率的可列可加性和性质 1，有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i) = \sum_{i=1}^{n}P(A_i)$$

性质 3　对任一事件 A，有

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) \tag{1.2}$$

证明　因为

$$A \cup \bar{A} = \Omega \text{且} A\bar{A} = \varnothing$$

由概率的正则性和性质2,有

$$P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

所以,有

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

性质4　若$A \subset B$,则

$$P(B - A) = P(B) - P(A) \tag{1.3}$$

证明　因为$A \subset B$,所以$B = A \cup (B - A)$,又由于$A \cap (B - A) = \varnothing$,由性质2,有

$$P(B) = P(A) + P(B - A)$$

所以,有

$$P(B - A) = P(B) - P(A)$$

推论　对任意的事件A、B,有

$$P(A - B) = P(A) - P(AB) \tag{1.4}$$

性质5　对于任意两个事件A、B,有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \tag{1.5}$$

证明　因为$A \cup B = A \cup (B - AB)$,又$A \cap (B - AB) = \varnothing$,$AB \subset B$,由性质2与性质4,有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B - AB) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

这一性质可推广到有限个事件的情形,即

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = & \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_i A_j) \\ & + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} P(A_i A_k A_j) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n) \end{aligned} \tag{1.6}$$

此式称为**概率一般加法公式**.

例1　设事件A,B的概率分别分$\frac{1}{3}$,$\frac{1}{2}$.在下列三种情况下分别求$P(B\bar{A})$的值:

(1) A与B互斥;

(2) $A \subset B$;

(3) $P(AB) = \frac{1}{8}$.

解　由概率的性质,可得$P(B\bar{A}) = P(B) - P(AB)$.

(1) 因为A与B互斥,所以$AB = \varnothing$, $P(B\bar{A}) = P(B) - P(AB) = P(B) = \frac{1}{2}$

(2) 因为$A \subset B$;所以$P(B\bar{A}) = P(B) - P(AB) = P(B) - P(A) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

(3) $P(B\bar{A}) = P(B) - P(AB) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

例2　某地共发行A、B、C三种报纸,调查表明居民家庭中订购A报纸的有45%,订购B报纸的有35%,订购C报纸的有30%,同时订购A、B报纸的有10%,同时订购A、C报纸的有8%,同时订购B、C报纸的有5%,同时订购A、B、C报纸的有3%.试求下列事件的概率: