七彩水晶

蓝水晶系列

新课程同步学案

适用普通高中课程标准实验教科书

（人教B版）

专家伴读

ZHUAN JIABANDU

数学 必修5

北京师范大学出版社
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PRESS

专家伴读

数学 5

七彩水晶

蓝水晶系列

新课程同步学案

专家伴读

ZHUAN JIABAN DU

适用普通高中课程标准实验教科书（人教B版）

数学 必修5

北京师范大学出版社
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PRESS

本书编写组：
主　编：万庆炎　尤善培　孔晓燕
编　者：孙旺军　陈君书　金忠祥　钱大伟　孙继勇　陈文献
陈淑玲　黄克宪　欧阳瑞　葛福生　楚忠民　张道亮
祁素英　张　霞　杨恩建　王爱真　孙腾杰　苑玉冰
祝德运　关广金　狄国胜　郭俊清　李艳珍　郭克柱

出版发行：北京师范大学出版社　www.bnup.com.cn
北京新街口外大街19号
邮政编码：100875
印　　刷：北京昌平兴华印刷厂
装　　订：三河文成装订厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：184 mm×260 mm
印　　张：9
字　　数：230千字
版　　次：2007年7月第1版
印　　次：2007年7月第1次印刷
定　　价：9.50元
ISBN 978-7-303-08488-3

责任编辑：董克强　装帧设计：贾　刚
责任校对：陈　民　责任印制：马鸿麟

编者的话

编写目的

普通高中课程标准的颁布和实施以及多样化教材在实验区的选用与推广，给广大师生带来耳目一新的教学材料、丰富多样的学习方式、生动活泼的课堂氛围，同时对于教师的教学行为与学生的学习行为也提出了更高的要求。

为了帮助教师领会和贯彻课程标准中提出的有利于学生“学习方式的转变”“教学方式的转变”和“教学评价的转变”，把学生从繁重琐碎的学业负担中解放出来，为他们提供适当的、优秀的、高效的学习辅助材料，北京师范大学出版社依靠百年名校丰厚的教育资源，聘请国家高中课程标准组各科负责人或核心成员、课程标准实验教科书各科主要编写人员、课改实验省市教研部门专家及一线教师共同组成了新课程教学资源开发专家指导委员会。委员会认真讨论了目前高中新课程改革面临的问题，深入研究了目前高中新课程教材的编写理念，多次召开专题讨论会，并成立学科编写组，精心研制，反复修改，面向全国课改实验区隆重推出高中《新课程同步学案·专家伴读》丛书。

丛书体例

本套丛书力求从实际出发，落实基础，强调能力，突出创新。通过精心设计研讨式的问题、建构系统化的知识结构、提供丰富多彩的互动材料，帮助学生深刻理解所学课程，培养其创新探究意识、实践动手能力，全面提升学生的综合素质。本套丛书根据课程标准的教学理念与新课程教学实施环节，各分册结构基本分为五大板块：单元概览、积累运用、拓展迁移、交流评价、延伸阅读。

【单元概览】主要是对单元内容进行概括提示、对比归类、有序梳理，旨在帮助学生了解本单元的知识体系，建构单元知识框架，达到成竹在胸、纲举目张之目的。

【积累运用】主要是课、节基本知识和基本能力的体现，同时兼顾对重点、难点的提炼。力求通过生动活泼的形式引导学生在轻松愉悦的氛围中获取知识、夯实基础、形成能力、提升素质。

【拓展迁移】着眼于课堂知识的延伸、拓展与深化，一般通过精选的案例作为思维的发散点，引导学生实现新旧知识的整合迁移，通过在多样化的探究和互动学习中，点燃学习热情，体会探究奥妙。

【交流评价】根据教材内容的重点、难点、歧义点设置问题，引发学生的讨论、质疑与思考，同时也希望通过自我或者小组、同伴的评估，使学生逐步养成感悟、反思与总结的习惯，从而纠正错误、调整路径，不断提高学习质量。

【延伸阅读】提供与本课内容相关的史料事实、学科信息或者资料链接，供广大教师与学生的查阅与鉴赏，以便博采众长、登高望远。

每单元后附有单元测试与评价习题，全书提供有模块测试与评价习题，供师生课堂检测或者学生自我检测之用。

此外，各学科分册根据学科特点、模块特色，紧扣课程标准理念，结合教学实际，在上述板块中开辟了专家说课、课堂探究、三维达标、案例精讲、综合跃升、互动实践、小组讨论、自我评价、趣味阅读等富有创意、多姿多彩的二级栏目。

使用建议

高中新课程与以往的高中课程相比较，尤其提出着力于学生学习方式的转变，提倡自主、合作、探究的学习方式。本套丛书的编写意图也力求体现上述课程改革的理念：

我们提倡自主学习。丛书力求避免机械讲解与灌输，提倡对知识进行主动探求、自主学习的学习方式。丛书的课堂探究、案例精讲、自我评价等二级栏目的编写设计，较好地体现了自主学习的理念，希望同学们借助于这些栏目，逐步形成积极主动的学习方式。

我们引导合作学习。合作学习是指在学习过程中，以学习小组为基本形式，师生、生生之间彼此通过协调的活动共同完成学习任务的一种学习方式。丛书的小组讨论、小组评价等栏目都是开展合作学习的良好平台，大家要借助这个平台，积极构建合作学习的模式，互相启迪思维、激发灵感，学会利用集体智慧解决面临的问题。

我们鼓励探究学习。本套丛书试图通过综合跃升、互动实践等栏目，鼓励同学们把自己的眼光和视角不要仅仅局限于书本和课堂，要投向广阔的天地，通过自主、独立或合作地进行调查、试验、交流等活动，拓展学习的深度与广度。

当然，普通高中面临升学任务，高考成绩的优劣决定着每一位学生的未来发展，现行考试方式上多侧重于具体知识的获得、学习方法及应考技能的训练。但是新课程考试选拔制度的改革，必将带来学习方法、应考策略、评价方式的全方位改革，未雨绸缪，方可脱颖而出。本套丛书愿意成为你学习的最好帮手和贴身向导。

由于种种原因，本书的疏漏与错误在所难免，希望大家批评指正。欢迎大家通过电话、传真、信件与我们联系，并随时浏览我们的网站 http://www.bnup.com.cn。

高中《新课程同步学案·专家伴读》编写组

目录

CONTENTS

第一章 解三角形

第二章 数列

目录

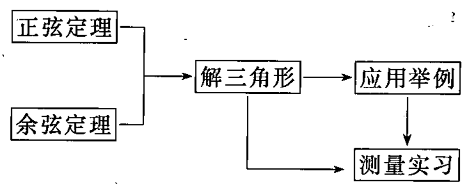
CONTENTS

第三章 不等式

第一章　解三角形

单元概览

本章的知识结构如图所示：



1.1　正弦定理和余弦定理

1.1.1　正弦定理(一)

积累运用

【专家说课】

本节课学习了正弦定理及其推导，介绍了初步运用正弦定理解三角形的知识. 在学习过程中，我们探索了任意三角形的边角关系，并由此得出三角形的边长与角度之间的数量关系，同时感受数学定理的形式美和数学论证的严谨美.

本节课的重点是正弦定理的推导及应用，而难点则是正弦定理的推导.

【课堂探究】

知识点 1　正弦定理及其推导.

1. 引入

如图 1-1，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，则显然有$\frac{a}{c}=\sin A$，$\frac{b}{c}=\sin B$，因而有$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=c$，即$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin C}=\frac{c}{1}$. 注意到 $\sin C=1$，因而有$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

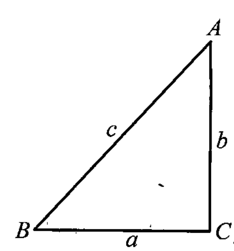


图 1-1

上述结论从形式上看非常对称，体现了数学的一种独特的美，但它依

赖于$\triangle ABC$为直角三角形的前提，如果$\triangle ABC$不是直角三角形，结论是否仍然成立？

2. 探索

可以先看几个非直角三角形的情形：

(1)在正$\triangle ABC$中，$a=b=c$，$A=B=C=60^\circ$，这时有$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

(2)再如图 1-2，在$\triangle ABC$中，$A=120^\circ$，$B=C=30^\circ$，这时，$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$是否成立？

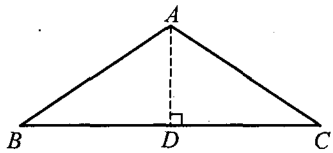


图 1-2

或者说，怎样去研究结论是否仍然成立？我们的思路是想办法将问题转化为直角三角形来思考. 为此，作$AD\perp BC$，D为垂足.

这样易得，$a:b:c=\sqrt{3}:1:1$，显然，$\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin B=\sin C=\frac{1}{2}$.

易验证：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

3. 猜想

对任意$\triangle ABC$，总有$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$成立.

4. 验证

(1)如果$\triangle ABC$是直角三角形，结论成立.

(2)如果$\triangle ABC$为锐角三角形，则作BC边上的高AD，如图 1-3 所示，显然，$AD=b\cdot\sin C=c\cdot\sin B$. 进而有$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$. 同理有$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$.

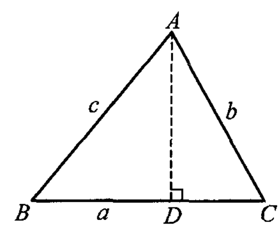


图 1-3

因此，总有$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

(3)如果$\triangle ABC$是钝角三角形，其推理过程请同学们自行完成.

总之，在$\triangle ABC$中，都有$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$成立.

当然，还可以以向量为工具，将三角形的边和角联系起来. 这时只需这样来操作：在等式$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$两边同乘(数量积)一个与三角形某一边垂直的单位向量$\boldsymbol{i}$即可.

问题解决的思路，可这样来概括：

$\boxed{\text{提出问题}}\longrightarrow\boxed{\text{特殊情形提出猜想}}\longrightarrow\boxed{\text{一般性验证}}\longrightarrow\boxed{\text{一般性证明}}$

知识点 2　利用正弦定理解三角形.

剖析：利用正弦定理可以解决以下问题：

(1)已知三角形的两角和任意一边，求三角形其他两边与角；

(2)已知三角形中的两边和其中一边的对角，求三角形其他边与角.

在解答有关三角形问题时，以下的三角关系式经常用到，要记准、记熟，灵活地加以运用：

(1)$A+B+C=\pi$；(2)$\sin(A+B)=\sin C$，$\cos(A+B)=-\cos C$；

(3)$\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2}$，$\cos\frac{A+B}{2}=\sin\frac{C}{2}$；(4)$S_\triangle=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B$.

【三维达标】

1. 已知$\triangle ABC$中，$A=105°$，$B=45°$，$c=\sqrt{2}$，则$\triangle ABC$的面积等于(　　).

A. $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$　　C. $\sqrt{3}+1$　　D. $\sqrt{3}-1$

2. 在$\triangle ABC$中，给出下列命题：①$a\sin B=b\sin A$；②$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$；③$\dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\sin B}{b}=\dfrac{\sin C}{c}$；④$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b+c}{\sin B+\sin C}$，其中正确命题的个数是(　　).

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

3. 在$\triangle ABC$中，若$A:B:C=1:2:3$，则$a:b:c=$________.

4. 在$\triangle ABC$中，已知$A=45°$，$a=2$，$b=\sqrt{2}$，则$B=$________.

5. 在$\triangle ABC$中，已知$b=3$，$c=3\sqrt{3}$，$B=30°$，解此三角形.

拓展迁移

【案例精讲】

例1　在$\triangle ABC$中，若$B=30°$，$AB=2\sqrt{3}$，$AC=2$，求$\triangle ABC$的面积.

分析：为求$\triangle ABC$的面积，可先求AB边上的高，也可以用面积公式$S=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A$，所以应先求$A$，而由正弦定理可先求得$C$.

解：因为$\dfrac{AB}{\sin C}=\dfrac{AC}{\sin B}$，所以$\sin C=\dfrac{AB\cdot\sin B}{AC}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以$C=60°$或$120°$.

当$C=60°$时，$A=90°$，$S=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A=2\sqrt{3}$；

当$C=120°$时，$A=30°$，$S=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A=\sqrt{3}$.

所以$\triangle ABC$面积为$2\sqrt{3}$或$\sqrt{3}$.

总结：确定解的个数可以通过验证求出的两解与已知条件中的角是否矛盾，若不矛盾即有两解；若矛盾则为一解. 也可以通过"大边对大角"先确定另一个角的范围，进而确定解的个数.

例2　$\triangle ABC$中，$A=\dfrac{\pi}{3}$，$BC=3$，则$\triangle ABC$的周长为(　　).

A. $4\sqrt{3}\sin\left(B+\dfrac{\pi}{3}\right)+3$　　B. $4\sqrt{3}\sin\left(B+\dfrac{\pi}{6}\right)+3$

C. $6\sin\left(B+\dfrac{\pi}{3}\right)+3$　　D. $6\sin\left(B+\dfrac{\pi}{6}\right)+3$

解:因为$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{3}{\sin\frac{\pi}{3}}=2\sqrt{3}$,$C=\pi-A-B=\frac{2\pi}{3}-B$,

所以$\frac{a}{\sin A}=\frac{b+c}{\sin B+\sin C}=2\sqrt{3}$,

所以 $b+c=2\sqrt{3}\left[\sin B+\sin\left(\frac{2\pi}{3}-B\right)\right]=2\sqrt{3}\left[\sin B+\sin\frac{2\pi}{3}\cos B-\cos\frac{2\pi}{3}\sin B\right]$

$=3\sqrt{3}\sin B+3\cos B=6\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)$.

所以$\triangle ABC$的周长为 $6\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)+3$.

所以答案为 D.

总结:在比例式中,若$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,则有$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$. 由于正弦定理具有这一比例形式,所以在应用正弦定理解题时,会经常用到这个结论.

例 3 在$\triangle ABC$中,若 $b=2a$,$B=A+60°$,求 A.

解:因为 $b=2a$,所以 $\sin B=2\sin A$.

又因为 $B=A+60°$,所以 $\sin(A+60°)=2\sin A$.

所以 $\sin A\cos 60°+\cos A\sin 60°=2\sin A$,即$\frac{3}{2}\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A$,

所以 $\tan A=\frac{\sqrt{3}}{3}$. 因为 $0°<A<180°$,所以 $A=30°$.

总结:要求角度,首先应想到将边的关系转化为角的三角函数关系.

【综合跃升】

1. 在$\triangle ABC$中,若 $AB=1$,$BC=2$,求角 C 的取值范围.

2. 在$\triangle ABC$中,$a+b=1$,$A=60°$,$B=45°$,求 a 的值.

3. 在$\triangle ABC$中, $\sin A+\cos A=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$AC=2$,$AB=3$,求 $\tan A$ 的值和$\triangle ABC$的面积.

4. $\triangle ABC$ 中，$\tan A=\dfrac{1}{2}$，$\tan B=\dfrac{1}{3}$，且最大边的长为 1.

求：(1)角 C 的大小；(2)最短边的长.

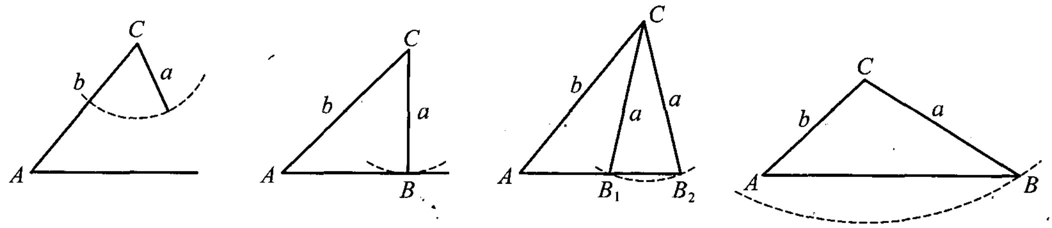
【互动实践】

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，斜边 c 等于 $\text{Rt}\triangle ABC$ 外接圆的直径 $2R$，故有 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$，这一关系对任意三角形也成立吗？试探索并证明你的结论.

交流评价

问题 1：在已知两边 a，b 和其中一边的对角 A，求角 B 时，试分别就 A 为锐角和钝角两种情形讨论可能会出现的结果，并画出草图加以说明.

提示：如图 1-4，A 为锐角时，可能出现以下四种情况.



$a<b\sin A$ 无解　　$a=b\sin A$ 一解　　$b\sin A<a<b$ 两解　　$a\geqslant b$ 一解

图 1-4

问题 2：在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a=x$，$b=2$，$B=45^\circ$，如果利用正弦定理解三角形时有两解，求 x 的范围.

甲、乙两名同学分别给出两种解答，你认为他们的解答正确吗？为什么？

甲：因为 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，所以 $\dfrac{x}{\sin A}=\dfrac{2}{\sin 45^\circ}$，所以 $\sin A=\dfrac{x}{2\sqrt{2}}$.

由 $\sin A\leqslant 1$，得 $x\leqslant 2\sqrt{2}$. 又 $x>0$，故 x 的取值范围是 $(0,2\sqrt{2}]$.

乙：因为$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，所以$\frac{x}{\sin A}=\frac{2}{\sin 45^\circ}$，所以 $\sin A=\frac{x}{2\sqrt{2}}$.

因为在三角形中，大边对大角，若 $A\leqslant B$ 时，只有一解，

所以 $A>B$，则 $a>b$，即 $x>2$.

又因为 $\sin A\leqslant 1$，所以 $x\leqslant 2\sqrt{2}$.

从而 x 的取值范围是$(2,2\sqrt{2}]$.

延伸阅读

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$C=90^\circ$，则 $\sin A=\frac{a}{c}$，$\sin B=\frac{b}{c}$，所以 $c=\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$.

又因为 $\sin C=\sin 90^\circ=1$，所以$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

那么，在任意三角形中，这一关系式是否成立呢？下面我们运用向量来研究这个问题.

(1)如图 1-5，若$\triangle ABC$ 是锐角三角形，过点 A 作单位向量 $\boldsymbol{j}$ 垂直于$\overrightarrow{AC}$，则 $\boldsymbol{j}$ 与$\overrightarrow{AB}$的夹角为$90^\circ-A$，$\boldsymbol{j}$ 与$\overrightarrow{CB}$的夹角为 $90^\circ-C$.

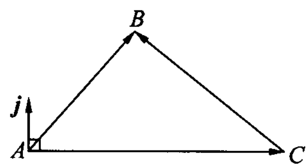


图 1-5

为了与图中有关角的三角函数建立联系，我们在向量等式$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$的两边同取它们与向量 $\boldsymbol{j}$ 的数量积运算，得到 $\boldsymbol{j}\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})=\boldsymbol{j}\cdot\overrightarrow{AB}$，

由分配律，可得 $\boldsymbol{j}\cdot\overrightarrow{AC}+\boldsymbol{j}\cdot\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{j}\cdot\overrightarrow{AB}$.

所以$|\boldsymbol{j}||\overrightarrow{AC}|\cos 90^\circ+|\boldsymbol{j}||\overrightarrow{CB}|\cos(90^\circ-C)=|\boldsymbol{j}||\overrightarrow{AB}|\cos(90^\circ-A)$，

所以 $a\cdot\sin C=c\cdot\sin A$，

所以$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$.

同理，过点 C 作与$\overrightarrow{CB}$垂直的单位向量 $\boldsymbol{j}$，可得$\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}$，

所以$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

(2)当$\triangle ABC$ 为钝角三角形时，不妨设 $A>90^\circ$.

如图 1-6，过点 A 作与$\overrightarrow{AC}$垂直的单位向量 $\boldsymbol{j}$，则 $\boldsymbol{j}$ 与$\overrightarrow{AB}$的夹角为 $A-90^\circ$，$\boldsymbol{j}$ 与$\overrightarrow{CB}$的夹角为 $90^\circ-C$，同样可证得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

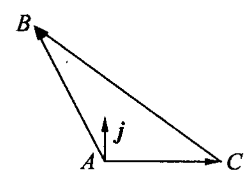


图 1-6

这就是说，对于锐角三角形、直角三角形和钝角三角形，上面的关系式均成立.

关于正弦定理的证明，方法很多，其中比较传统的方法是先导出$\triangle ABC$ 的面积公式：$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$，这样就能轻而易举地得到$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$. 进而我们还可以知道$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$，其中 R 为$\triangle ABC$ 的外接圆的半径，有兴趣的同学可以进一步思考，进行更深入的探求.

1.1.1 正弦定理(二)

积累运用

【专家说课】

本节课进一步学习$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$的实际应用. 着重介绍:(1)利用正弦定理进行边角互化;(2)利用正弦定理判断三角形的形状;(3)利用正弦定理解决几何证明问题;(4)利用正弦定理解决实际问题(如相遇问题,测量问题等). 本节课的重点和难点是正弦定理的"活"用.

【课堂探究】

已知$\triangle ABC$,求证:(1)若$A>B$,则$a>b$;(2)若$a>b$,则$A>B$.

证明:(1)若A为锐角或直角,因为$y=\sin x$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$单调递增,所以$\sin A>\sin B$. 又因为$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$,所以$a>b$;若$A$为钝角,则$\pi-A$为锐角,因为$A+B<\pi$,所以$\pi-A>B$,且$\pi-A,B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. 同理可得$\sin(\pi-A)>\sin B$,即$\sin A>\sin B$. 所以$a>b$.

(2)因为$a>b$,所以$\sin A>\sin B$.

若A,B为锐角,因为$y=\sin x$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增,所以$A>B$;

若A为直角或钝角,则$A>B$,显然成立;

若B为直角或钝角,由(1)中推理可知$\sin B>\sin A$,这与$\sin A>\sin B$矛盾.

综上所述:$A>B$.

【三维达标】

1. 在$\triangle ABC$中,若$(\sin A+\sin B):(\sin A-\sin B)=5:1$,则$a:b=$________.
2. 在$\triangle ABC$中,若$a=b\sin A$,则$\triangle ABC$的形状为________.
3. $\triangle ABC$中,$\tan C=\frac{4}{3}$,边$c=8$,则$\triangle ABC$的外接圆半径$R=$________.
4. 在$\triangle ABC$中,$\frac{a}{\sin\frac{A}{2}}=\frac{b}{\sin\frac{B}{2}}=\frac{c}{\sin\frac{C}{2}}$,试判断$\triangle ABC$的形状.

5. 在$\triangle ABC$中,求证:$\frac{a^2-b^2}{\cos A+\cos B}+\frac{b^2-c^2}{\cos B+\cos C}+\frac{c^2-a^2}{\cos C+\cos A}=0$.

拓展迁移

【案例精讲】

例 1 在$\triangle ABC$中，如果$\lg a-\lg c=\lg\sin B=-\lg\sqrt{2}$，且$B$为锐角，试判断此三角形的形状.

解：因为$\lg\sin B=-\lg\sqrt{2}=\lg\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以$\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

又因为B为锐角，所以$B=45°$.

由$\lg a-\lg c=-\lg\sqrt{2}$，知$\frac{a}{c}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以$\frac{\sin A}{\sin C}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，即$\sin C=\sqrt{2}\sin A$.

因为$A+C=135°$，所以$\sin C=\sqrt{2}\sin(135°-C)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin C+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos C\right)=\sin C+\cos C$.

所以$\cos C=0$，即$C=90°$，所以$A=45°$.

所以$\triangle ABC$是等腰直角三角形.

> 判断三角形的形状是一类重要题型.判断方法有：(1)将边角关系转化为"钝"角、"钝"边的关系进行判断；(2)求出具体的边、角的值，再进行判断.
>
> 专家策略

例 2 $\triangle ABC$中，内角A,B,C所对的边分别为a,b,c，且$c=10$，$\frac{\cos A}{\cos B}=\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$.试判断$\triangle ABC$的形状，并求此三角形的内切圆半径.

解：由$\frac{\cos A}{\cos B}=\frac{b}{a}$，$\frac{\sin B}{\sin A}=\frac{b}{a}$，知$\frac{\cos A}{\cos B}=\frac{\sin B}{\sin A}$，

变形化简得：$\sin 2A=\sin 2B$，所以$2A=2B$，或$2A+2B=\pi$.

因为$a\neq b$，所以$2A+2B=\pi$，即$A+B=\frac{\pi}{2}$.

所以$\triangle ABC$是直角三角形.

又由$\begin{cases}a^2+b^2=10^2,\\ \frac{b}{a}=\frac{4}{3},\end{cases}$ 解得$a=6,b=8$.

所以该三角形的内切圆半径$r=\frac{a+b-c}{2}=2$.

例 3 如图 1-7，等腰$\triangle ABC$中，底边$BC=1$，$\angle ABC$的平分线BD交AC于D，求BD的取值范围.

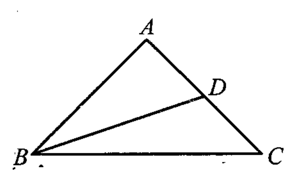


图 1-7

解：因为$\angle ABC=C$，所以$A=180°-2\angle ABC$，

$\angle BDC=A+\angle ABD=180°-2\angle ABC+\frac{\angle ABC}{2}=180°-\frac{3}{2}\angle ABC$.

因为$\frac{BD}{\sin C}=\frac{BC}{\sin\angle BDC}$，所以$\frac{BD}{\sin\angle ABC}=\frac{1}{\sin\left(180^\circ-\frac{3}{2}\angle ABC\right)}$，

$$\text{所以 } BD=\frac{\sin\angle ABC}{\sin\frac{3}{2}\angle ABC}=\frac{2\sin\frac{\angle ABC}{2}\cos\frac{\angle ABC}{2}}{\sin\angle ABC\cos\frac{\angle ABC}{2}+\cos\angle ABC\sin\frac{\angle ABC}{2}}$$

$$=\frac{2\cos\frac{\angle ABC}{2}}{2\cos^2\frac{\angle ABC}{2}+\cos\angle ABC}=\frac{2\cos\frac{\angle ABC}{2}}{4\cos^2\frac{\angle ABC}{2}-1}=\frac{2}{4\cos\frac{\angle ABC}{2}-\frac{1}{\cos\frac{\angle ABC}{2}}}.$$

因为 $0<\angle ABC<90^\circ$，所以$\frac{\sqrt{2}}{2}<\cos\frac{\angle ABC}{2}<1$.

而函数 $y=\frac{2}{4x-\frac{1}{x}}$在$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$上单调递减，

又因为当 $\cos\frac{\angle ABC}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$时，$BD=\sqrt{2}$；当 $\cos\frac{\angle ABC}{2}=1$ 时，$BD=\frac{2}{3}$，

所以 BD 的取值范围是$\left(\frac{2}{3},\sqrt{2}\right)$.

点评：本题着重考查：(1)三角知识、正弦定理，以及利用函数的单调性求值域的方法；(2)数形结合，等价转化的解题思想.

【综合跃升】

1. 在$\triangle ABC$中，若 $\sin A=2\sin B\cos C$，$\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C$，试判断$\triangle ABC$的形状.

2. 已知方程 $x^2-(b\cos A)x+a\cos B=0$ 的两根之积等于两根之和，且 a,b 为$\triangle ABC$的两边，A,B 为 a,b 的对角，试判断$\triangle ABC$的形状.

3. 在$\triangle ABC$中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，若 $\boldsymbol{m}=(b,3a)$，$\boldsymbol{n}=(c,b)$，且 $\boldsymbol{m}\parallel\boldsymbol{n}$，$C-A=\frac{\pi}{2}$，求 B.

4. 在$\triangle ABC$中，已知 $2B=A+C$，$b=4$，$a+c=8$，求证：$\triangle ABC$是等边三角形.