

技工學習叢書

機械工人基本數學

第二分冊

何以編著



机械工业出版社



技工學習叢書

機械工人基本數學

第二分冊

何以編著



機械工業出版社

出版者的話

本書專為機械工人學習數學基本知識而編寫的。內容包括算術、代數、幾何和三角，算術部分講解得比較詳細，其他部分只講解一些最基本的知識和計算方法。但其特點，是把代數、幾何、三角與算術摻合在一起，使讀者便於以算術的知識來學懂其他數學知識。本書文字淺顯、例題豐富，此外，在每個章節後面都有習題，書後還附有答案，適合具有初小到高小文化程度的讀者自修。

本書分三冊出版，這是第二分冊。

NO. 0471

1954年12月第一版 1959年6月第一版第二次印刷

787×1092¹/₃₂ 87千字 4³/₁₆印張 21,001—51,100冊

機械工業出版社(北京阜成門外百萬莊)出版

北京五三五工廠印刷

新華書店發行

北京市書刊出版業營業許可證出字第008號 定價(9)0.47元

編著者的話

這本書是專為機械工人學習數學基本知識而編的。

編者假定讀者的文化水平是初小畢業的程度，對數學懂得很少，雖然也學會一些計算的方法，卻不懂得為什麼要這樣算，或者要那樣算。這本書準備幫助這些讀者，在比較短的時間里，進行一次較有系統的學習，搞清楚數學計算的一些基本道理，同時學會作為一個機械工人所必需的數學知識。

這本書是預備給成人讀者進行學習或自修用的。成人學習有一個特點，就是理解力比較強，因此本書把每一種計算的道理，說得比較詳細。一個讀者只要粗通文字，耐心地自修這本書，是可以看得懂，學得會的。如果有教員講授，採用這本書作短期訓練班或文化班課本，那麼書上講解比較詳細，對學員溫習功課是有很大的幫助的。因為一般成人學習數學，常常是在課堂上都懂得，下了課，自己溫習功課和做習題的時候，又不懂得了。這時去看課本，課文如果太簡單就會感到困難。本書講解較多，目的就在幫助讀者克服這個困難，因此篇幅也就比較多一些。

一個機械工人，如果只懂得「算術」，在工作上是不夠應用的，他還必須有一些代數、幾何和三角的知識。但是，如果要把初等代數、初等幾何以及三角術等全部學一遍，那要化相當多的時間。一個機械工人，如果要在較短的時間以內，學會一些必要的數學知識，以適應工作上的需要，編者認為可以先學代數、幾何和三角中的某些部分，至於全面的學習則留到以後

4

有机会时再学。因此，本書內容除了包括全部算术之外，还包括一部分代数、几何和三角。算术部分講得比較詳細，其他的都只講最必要的一部分知識和計算方法。在編輯的体例上，并不把算术跟代数、几何跟三角等严格分开，而是适当地摻合在一起，使讀者自然地領会到算术、代数、几何、三角这些数学知識，都是互相有关联的，这样也就便于以算术知識为基础，来了解其他的数学知識。

一个机械工人，在工作中是需要很多实际計算的知識的，拿一个車工來說，要懂得挂輪計算、車拔梢計算等等，本書虽然是以机械工人為对象，書中例題、習題也舉了很多跟工作有关的計算問題，但本書的主要目的还是帮助讀者学会基本的数学知識。有了这些基本知識，讀者再进一步學習那些工作上直接应用的計算方法，就事半功倍，輕而易舉了。因此，比較專門的实用的計算方法，本書就不講了，这些知識留給那些專講应用数学的書來講。也因此，我們把這本書叫做「机械工人基本数学」，使它与專講应用数学的書有所区别。

本書的例題是比較多的。同时很多道理是用不同例題的对照来帮助讀者了解，因此讀者對本書的每个例題必須仔細研究它的道理，同时把各个例題加以比較比較看，这样對計算方法的了解就会更深入一些。

以上所談的，都是編者主觀上的一些願望和想法。由于編者数学水平不高，同时对机械工人实际工作的情形和需要了解得很不够，本書的实际內容，一定会存在着很多缺点和錯誤；在說理方面，为了通俗，可能会說出一些不合数学原理的說法；在例題和習題上，可能舉出一些不合实际情况的例子；

如果讀者和採用本書作教本的教員同志們，發現有這些毛病，或有其他的錯誤，都希望能隨時向編者提出（來信請寄機械工業出版社轉）。同時希望採用本書作教本的教員同志們，能把使用本書進行教學的效果和意見，也告知編者，以便在重版時依據大家的意見加以修訂。本書因限於篇幅，習題選得比較少一些，也希望教員同志們能結合學員的實際情況加以補充。自修的讀者如嫌習題太少，也可從其他類似的書或其他課本里找些補充，本書就着重於講解計算的道理了。

本書分為三冊出版，內容如下：

第一冊：數和單位，整小數四則，乘方與開方，簡單代數；

第二冊：有關整數性質的一些計算，分數，百分法，比和比例；

第三冊：圖形的認識和画法，面積與體積的計算，簡單三角，簡單計算。

本書在編著中第一、二兩冊由何以執筆，第三冊由林家燊執筆，並承天津大學許壽山先生予以校訂，並提供許多寶貴意見，使本書內容更加充實，謹在此表示衷心的感謝。

編著者 1953年1月4日

第二冊 目次

編著者的話.....	3
------------	---

五 有關整數性質的一些計算.....	9
--------------------	---

1 整數的性質.....	9
--------------	---

一、什麼是整數——二、約數和倍數——三、公約數和公倍數——四、
因數和質因數

習題17

2 因數分解.....	14
-------------	----

一、因數分解的道理——二、幾個質因數的簡單檢驗法——三、質因
數分解法——四、把一個數分解成預定的幾個因數

習題18

3 求最大公約數.....	22
---------------	----

一、合除法——二、輾轉相除法

習題19

4 求最小公倍數.....	27
---------------	----

一、合除法——二、輾轉相除法

習題20

六 分數.....	31
-----------	----

1 分數的性質.....	31
--------------	----

一、什麼是分數——二、分數的特性——三、分數的種類——四、分數
的化法

習題21

2 約分和通分.....	42
--------------	----

一、約分——二、通分

習題22

3 分數的加減法.....	48
---------------	----

一、同分母的分數加減法——二、不同分母的分數加減法——三、帶
分數的加減法——四、整數和分數的加減法

習題23

- 4 分數的乘除法.....55

一、分數乘法——二、分數除法

習題24

- 5 分數四則的混合算法和繁分數.....62

一、分數四則的混合算法——二、繁分數

習題25

- 6 分數的應用.....67

習題26

- 7 分數的變形和求近似值的分數.....70

一、分數的變形

習題27

二、求近似值的分數

習題28

- 8 分數和小數.....81

一、整數、分數和小數——二、化分數為小數——三、化有盡小數為分數——四、化循環小數為分數

習題29

七 百分法89

- 1 百分法的意義.....89

- 2 百分法的各種算法.....91

一、求百分率——二、求子數

- 3 求基數.....95

習題30

八 比和比例.....98

- 1 什麼是比.....98

一、比的意義——二、比的特性和化法——三、正比和反比——四、單比和復比——五、連比

習題31

2 比例和比例的解法..... 108

一、什么是比例——二、比例的解法——三、正比例和反比例

習題32

3 複雜比例..... 123

一、複比例——二、連環比例——三、配分比例——四、混合比例

習題33

習題答案..... 137

五 有关整數性質的一些計算

1 整數的性質

一、什麼是整數 我們在第一章裏已經說過：整數是由許多個 $[-1]$ 組成的數。 $[-1]$ 是最小的整數，其他的整數可以說都是由 $[-1]$ 組成的，這就是整數的一個基本特點。由於這個特點，使各個整數的組成，整數和整數之間的關係，出現了一些特殊的性質。分析研究這些性質，是一門專深的學問，我們在這一章裏所要說的，只是有關整數性質的一部分計算方法，包括因數分解，最大公約數和最小公倍數的求法等。這些計算方法是我們工作中經常用到的，同時也是進一步學習分數等計算所必須的知識。

現在，首先讓我們弄明白下面這些有關整數性質的名詞含義，然後我們才可能來說明有關整數性質的一些計算方法。

二、約數和倍數 整數和整數之間，有一個重要的可能發生的關係，就是整除的關係。約數和倍數是說明整除關係的一對名詞。

什麼是整除關係呢？這個問題在除法裏面已經談過：整除就是用一個數去除另一個數，除的結果得整數商數，也就是沒有餘數。這樣，我們就說這個數可以 $[-1]$ 整除 $[-1]$ 另一個數。例如 $12 \div 4 = 3$ ，我們就說4可以整除12。 $12 \div 5 = 2 \cdots \cdots$ 餘2（或 $\equiv 2.4$ ），我們說5不能整除12。

什麼是約數和倍數呢？假定有 a 和 b 兩個數，用 a 除 b 能整除，那末 a 就是 b 的約數， b 就是 a 的倍數。拿上面 12 和 4 兩數為例， $12 \div 4 = 3$ 能整除，我們就可以說 4 是 12 的約數，12 是 4 的倍數。再舉一些例：

$$156 \div 6 = 26, \quad 6 \text{ 是 } 156 \text{ 的約數, } 156 \text{ 是 } 6 \text{ 的倍數;}$$

$$112 \div 16 = 7, \quad 16 \text{ 是 } 112 \text{ 的約數, } 112 \text{ 是 } 16 \text{ 的倍數;}$$

$$121 \div 11 = 11, \quad 11 \text{ 是 } 121 \text{ 的約數, } 121 \text{ 是 } 11 \text{ 的倍數.}$$

兩個數有了整除關係，一個數是另一個數的約數，另一個數就是這個數的倍數。因此約數和倍數是同時存在的。

一個數常常可以被許多個數所整除，因此一個數也就可以有好幾個約數。拿 12 來說，能整除它的數就有 1, 2, 3, 4, 6, 12 等六個數：

$$12 \div 1 = 12; \quad 12 \div 4 = 3;$$

$$12 \div 2 = 6; \quad 12 \div 6 = 2;$$

$$12 \div 3 = 4; \quad 12 \div 12 = 1.$$

因此，12 的約數有六個。

一個數可以有許多個約數，但也可能只有 1 和本數是約數，除開這兩個數字以外，沒有任何其他的約數。這種數我們把它叫做「質數」。例如 $\{1, 2, 3, 5, 7, 11\} \dots$ 等都是質數。這些數，除了 1 和它本數之外，沒有任何其他的數可以整除它。在 100 以內的質數有下面這些：

$$1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23,$$

$$29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61,$$

$$67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.$$

一個數雖然可以有許多個約數，但畢竟還是有限的，比方 12 的約數頗不少，連 1 和本數在內一共有六個；但一共也就只有六個，沒有更多的了。一個數的倍數，却有很多個，而且多到：

無限的程度。我們還是拿 12 這個數來看吧，它的約數只有六個，它的倍數呢？却有無數個：

$$12 \text{ 的 } 1 \text{ 倍是 } 12 \times 1 = 12;$$

$$12 \text{ 的 } 2 \text{ 倍是 } 12 \times 2 = 24;$$

$$12 \text{ 的 } 3 \text{ 倍是 } 12 \times 3 = 36;$$

$$12 \text{ 的 } 4 \text{ 倍是 } 12 \times 4 = 48;$$

$$12 \text{ 的 } 5 \text{ 倍是 } 12 \times 5 = 60;$$

$$12 \text{ 的 } 6 \text{ 倍是 } 12 \times 6 = 72;$$

因此[12, 24, 36, 48, 60, 72]……等都是 12 的倍數。最小的倍數是 12 本數，最大的倍數是無限大的數。12 的倍數究竟一共有多少個呢？有無數個倍數，要多少個，就有多少個。

這是倍數跟約數不相同的地方。

三、公約數和公倍數 一個數既然可以有許多個約數。兩個數或幾個數就可能有共同的約數。這些共同的約數就叫做這幾個數的[公約數]。

我們試拿 12 和 18 這兩個數為例，看它們是否有公約數：

$$\begin{array}{ccc} \text{12的約數} & & \text{18的約數} \\ \hline 12, 6, 4, 3, 2, 1 & & 18, 9, 6, 3, 2, 1 \\ & & \hline & \text{12和18的公約數} & \\ & \hline & 6, 3, 2, 1 & \end{array}$$

6, 3, 2, 1 這四個數是 12 和 18 的公約數，其中 6 是最大的公約數，1 是最小的公約數。

因為 1 是整數的基礎，可以整除任何一個整數，所以它是所有整數的公約數，也是所有整數的最小公約數。因此，我們說最小公約數是沒有什麼意義的，因為最小公約數永遠都是

1; 兩數或幾個數如果只有1是公約數, 除1之外沒有別的公約數, 實際上也沒有什麼意義, 因為1可以是任何數的公約數。如果把1這個公約數除開不算, 那麼兩數之間就不一定都有公約數了。比方12和35, 18和55之間就沒有公約數:

12的約數

6, 4, 3, 2, 1

35的約數

35, 7, 5, 1

12和35除1之外沒有公約數。

18的約數

18, 9, 6, 3, 2, 1

55的約數

55, 11, 5, 1

18和55除1之外沒有公約數。

任何一個數既然都可以有無數個倍數, 兩個數或幾個數之間就可能有許多共同的倍數。這些共同的倍數叫做這幾個數的[公倍數]。

我們拿6和8這兩個數來看, 它們各有無數個倍數, 把這些倍數從最小的起, 逐一列出, 就會出現許多個共同的倍數, 即這兩數的公倍數:

6的倍數

6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, ……

8的倍數

8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, ……

6和8的公倍數

24, 48, ……

這裏已出現的公倍數有24和48, 但由於各數的倍數都是無限的, 因此公倍數也是無限的。6和8的最小的公倍數是24, 而最大的公倍數呢? 最大公倍數並不是48, 各個數的倍數有無限多, 因此公倍數也是無限多, 最大公倍數是一個無限大的數。因此, 我們說最大公倍數是沒有什麼意義的。兩數或幾個數的最小公倍數是一定有的, 而且只有一個。

四、因數和質因數 一個數是幾個數連乘而得的積數, 這

幾個數就都是這個數的因數。假設 a, b, c 三個數連乘得 d ，就是 $a \times b \times c = d$ ，那末，我們說 a, b, c 這三個數都是 d 的因數。

例題 $2 \times 3 \times 7 = 42$ ， $2, 3, 7$ 是 42 的因數；

$2 \times 3 \times 8 = 48$ ， $2, 3, 8$ 是 48 的因數；

$5 \times 7 = 35$ ， $5, 7$ 是 35 的因數。

因數和約數實際上是一個東西， $2, 3, 7$ 是 42 的因數，也可說是 42 的約數。這裏為什麼要用因數這個名稱呢？因數是專門用在一個數由幾個數連乘起來的場合上，而約數一般是跟倍數相對而用的，兩者多少還有一些區別。比方 42 這個數，它的約數除 1 和本數之外，還有 $2, 3, 6, 7, 14, 21$ 等，但我們不能說 42 的因數是 $2, 3, 6, 7, 14, 21$ 等六個，因為 $2 \times 3 \times 6 \times 7 \times 14 \times 21$ 的結果不是 42 。我們要說因數就只能這樣說： 42 的因數是 $2, 3, 7$ （因為 $2 \times 3 \times 7 = 42$ ），或說 42 的因數是 6 與 7 （因為 $6 \times 7 = 42$ ），或者說 42 的因數是 2 和 21 （因為 $2 \times 21 = 42$ ），也可以說 42 的因數是 3 和 14 （因為 $3 \times 14 = 42$ ）。

一個因數如果是個質數，那末，這個因數就叫做「質因數」。例如我們把 42 分解成 6 和 7 兩個因數，其中 7 就是個質因數（因為除了 1 和 7 本數可整除外，沒有其他數可整除）， 6 不是質因數（因為除了 1 和 6 本數可整除外，還有 $2, 3$ 也能整除）。

習題 17

1. 下面這幾個數，除 1 之外有哪些約數？又這些約數中，哪幾個是質數？

$12, 13, 14, 15, 16, 25, 26, 27, 28, 29$ 。

2. 下面這幾組數，各組有哪些公約數（ 1 除外）？

① $12, 15$ ，

② $16, 24$ ；

③ $12, 15, 27$ ；

④ $12, 24, 48$ 。

3. 下面這幾組數，各組有哪些公倍數？（各找出三個較小的公倍數）

① 2, 3, 4;

② 6, 4;

③ 5, 3;

④ 2, 7。

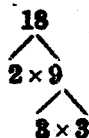
4. 下面這幾個數包含有哪些質因數？

4, 15, 12, 18, 10。

2 因數分解

一、因數分解的道理 任何一個整數，只要不是質數，它總是由兩個或幾個因數連乘的積。我們分析一個數，看它是由哪些因數連乘起來的，或者說：看它包含有哪些因數，這種分析的演算就叫做「因數分解」，或者叫做「析因數」。

比方 18 這個數，它是由哪些因數連乘起來的呢？我們知道 $3 \times 6 = 18$ ，因此知道 18 可分解出兩個因數，即 3 和 6。這裏 3 是質因數，但 6 不是質因數。6 既然不是質因數，也就可把它再分解：因為 $2 \times 3 = 6$ ，因此知道 6 還可以分解出兩個因數，就是 2 和 3。這兩個因數都是質因數。因此 18 可以分解成三個因數，就是 3, 2, 3。這三個因數都是質因數。



$$18 = 2 \times 9,$$

$$= 2 \times 3 \times 3.$$

一個數的因數分解，分解到所有因數都成為質數（即質因數），這時就不能再分解了。18 分解到最後，得 3, 2, 3 三個質因數，這時就不能再分解下去了。

一個數的數目如果不太大，進行因數分解並不困難；如果

數目較大，就不容易判斷它有沒有因數，或者有哪些個因數。

檢查一個數是否包含有因數，最簡單而直接的辦法是用質數來試除這個數。試除的結果，如果能夠整除，那末除數就是一個因數，同時商數也是一個因數。商數如果還不是質因數，可以用同樣的試除辦法再分解它。

例如 385 這個數，可以用質數 2, 3, 5, ……等 (100 以內的質數，見第 10 頁) 試除它，試除的結果，2 和 3 都不能整除它，5 才能整除它， $385 \div 5 = 77$ ，因此知道 5 和 77 是 385 的兩個因數。

77 還可以繼續分解，同樣也用 2, 3, 5, 7, ……質數試除，試除的結果 2, 3, 5 都不能整除它，7 才能整除它， $77 \div 7 = 11$ ，因此知道 7 和 11 是 77 的兩個因數。這樣，385 就分解為 5, 7, 11 三個因數。這三個因數都已經是質數了，所以不能再分解下去。

$$\begin{array}{rcl}
 & 385 & \\
 & \swarrow \searrow & \\
 5 & 5 \times 77 & \\
 \swarrow \searrow & & \\
 5 & 7 & 11
 \end{array}
 \qquad
 \begin{aligned}
 385 &= 5 \times 77, \\
 &= 5 \times 7 \times 11.
 \end{aligned}$$

用質數試除的辦法來檢查一個數所包含的因數，辦法雖然笨，但却是一個基本的辦法。除了這個辦法之外，還可以採取下面這些比較簡便的檢驗辦法，來幫助我們檢查一個數所包含的質因數。

二. 幾個質因數的簡單檢驗法

(1) 驗 2 法：凡是一個數的末位數是偶數 (即雙數) 或 0，這個數一定有一個質因數 2。

例如: $112 = 2 \times 56$; $110 = 2 \times 55$ 。

(2) 驗 3 法: 凡是一個數, 把它的各位數相加, 再把所得的和的各位數又相加, 這樣繼續各位相加下去, 如果最後得的數是 3 或 3 的倍數, 那末原數至少有一個質因數 3。

例如: 14382

\\//

18

各位數相加($1+4+3+8+2$)得 18。

√

9

各位數再相加($1+8$)得 9。

因此, 我們判斷 14382 含有質因數 3。試以 3 除 14382, $14382 \div 3 = 4794$, 能整除, 證明以上的檢驗法是正確的。

(3) 驗 5 法: 凡是一個數的末位數是 5 或 0, 那末這數至少有一個質因數 5。

例如: $235 = 5 \times 47$; $230 = 5 \times 46$ 。

(4) 驗 7 法: 凡是一個數, 把它的末位去掉, 再減那末位數的兩倍; 得數又用同樣的辦法, 去掉末位和減末位的兩倍(遇到不夠減的情形, 可以反減), 這樣一直繼續下去, 到最後如果得數是 7 或 0, 那末原數至少有一個質因數 7。

例一 檢驗 1106 有沒有質因數 7。

$$\begin{array}{r} 1106 \\ - \quad 12 \\ \hline 98 \\ \text{反}-16 \\ \hline 7 \end{array}$$

去掉末位數 6。

減末位數 6 的兩倍(即 12)。

從得數中去掉末位數 8。

減末位數 8 的兩倍(即 16); 不夠,

反減, 得 7。

因此, 我們判斷 1106 中含有質因數 7。試以 7 除 1106, $1106 \div 7 = 158$, 能整除, 證明以上的檢驗法是正確的。

例二 檢驗 3906 有沒有質因數 7。