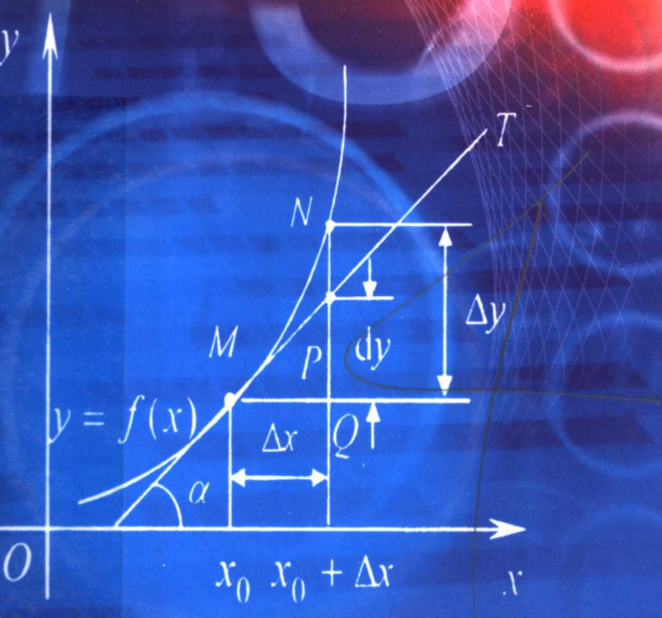
21世纪全国高校数学规划教材

数学分析选讲

SHUXUE FENXI XUANJIANG

舒斯会 编 著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

21 世纪全国高校数学规划教材

数学分析选讲

舒斯会　编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

本书对数学分析的主要的基本概念、重要思想、证明方法和计算技巧进行了归纳和总结，对其重点、难点内容进行了深入细致的讨论，较系统地总结、归纳了这些内容的解题方法和技巧。

本书精心选择的例题很具有代表性，且包含了一些新颖有趣的问题。有一部分是编者在教学过程中创编的典型新题。本书还配有一定数量的习题。

本书解题方法归纳和总结系统、合理，内容由浅入深，重点突出，对提高数学分析的水平和能力都有很大的帮助。

本书可作为学完《数学分析》课程后进一步开设的《数学分析选讲》教材或参考书，也可作为报考数学各专业硕士研究生数学分析的复习参考书和讲授数学分析课程的教师及学习数学分析的学生的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

数学分析选讲/舒斯会编著. —北京：北京大学出版社，2007.12

(21 世纪全国高校数学规划教材)

ISBN 978-7-301-12819-0

Ⅰ. 数… Ⅱ. 舒… Ⅲ. 数学分析—高等学校—教材 Ⅳ. 017

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 155341 号

书　　名：数学分析选讲

著作责任者：舒斯会　编著

责 任 编 辑：胡伟晔

标 准 书 号：ISBN 978-7-301-12819-0/O・0732

出　版　者：北京大学出版社

地　　　址：北京市海淀区成府路 205 号　100871

电　　　话：邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62765013　出版部 62754962

网　　　址：http://www.pup.cn

电 子 邮 箱：xxjs@pup.edu.cn

印　刷　者：河北滦县鑫华书刊印刷厂

发　行　者：北京大学出版社

经　销　者：新华书店

787 毫米×980 毫米　16 开本　12.5 印张　273 千字

2007 年 12 月第 1 版　　2007 年 12 月第 1 次印刷

定　　　价：25.00 元

前　言

数学分析是数学专业本科生的一门重要课程，也是数学专业及相关专业研究生入学考试必考的课程之一。该课程具有课时长、内容多、综合性强、难度大且与其他科目联系广的特点，能使学生对数学分析基本理论、基本方法和技巧有较系统的了解和认识，进一步提高学生分析问题和解决问题的能力。本书根据作者多年从事数学分析和数学分析选讲教学实践中积累的经验和体会编写，它对数学分析的主要内容、难点内容、解题方法和技巧进行了深入和系统的归纳和总结，本书非常注重方法和技巧的总结及归纳，同时给出了大量典型的习题并作了详细的分析和解答。主要内容如下：

第 1 章对极限理论和方法进行了归纳和总结，对罗必达法则、利用 Stolz 定理求数列极限、形如 $x_n = f(x_{n-1})$ 的数列极限方法、求极限的其他方法以及极限的定义和性质等进行了全面的分析和总结。第 2 章对连续函数的概念、闭区间连续函数的性质及应用和一致连续函数的概念和性质等进行了全面的分析和总结。第 3 章对微分理论、方法及应用进行了归纳和总结，对导数和微分的概念、性质及应用、罗尔定理、拉格朗日中值定理、柯西中值定理和泰勒公式的运用等内容进行了系统的分析和总结。第 4 章对积分理论和方法进行了归纳和总结，对定积分的定义和性质、积分中值定理应用、定积分方法、积分不等式方法、不定积分的一些特殊方法、广义积分及性质和含参变量积分等内容进行了系统的分析和总结。第 5 章归纳和总结了级数理论及应用，对级数的定义与性质、级数柯西收敛准则、级数求和、幂级数与傅立叶级数理论、序列的一致收敛性、函数项级数的一致收敛性等重要内容进行了系统的分析和总结。第 6 章对多元函数微积分理论包括多元函数极限与连续、多元函数的微分、多元函数积分等重要内容进行了系统的分析和总结。并给出了许多典型例证。

本书对数学分析中的一些重点、难点问题进行了系统分析和总结，例如对各种求极限的方法、技巧进行了全面的归纳，对这些极限方法的应用范围、注意事项进行了详尽的阐述。总结归纳了证明积分不等式的 10 种方法。为证明积分不等式提供了很好的参考。对一致连续函数、函数序列的一致收敛性、函数项级数的一致收敛性、含参变量积分一致收敛性等难点问题进行了详细的分析。

本书精心选择的例证很具有代表性，且包含了一些新颖有趣的问题。有一部分是编者在教学过程中创编的典型新题，这些新题对开发读者的解题思路、丰富解题方法有一定的

参考作用。

本书的 550 多道例题基本上适合数学及相关专业中、高年级学生的能力和水平，只有极少量难题，初学者可以不必接触这些题目，它不影响本书的连续性。

本书注重数学分析中主要内容的关联，对读者全面了解和掌握这些内容、把握内容的实质，提高读者的解题综合能力有非常好的作用。

在本书的编写过程中，王亚辉、万重杰同志提出了很多宝贵意见，易云飞、过静、樊陈、刘珊等同志帮助阅读了书稿，并提出了一些意见，对此表示衷心的感谢。

由于本人水平有限，书中差错在所难免，欢迎提出批评意见和建议。

本书的出版获江西科技师范学院教材出版基金资助。

舒斯会

2007 年 12 月

目　　录

第 1 章 极　　限

1.1 极限的定义和性质

1.1.1 极限定义

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$（$a$为常数）$\Leftrightarrow$ 对任意的 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，当 $n>N$ 时，成立 $|x_n-a|<\varepsilon$。

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a \Leftrightarrow$ 对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，成立 $|f(x)-a|<\varepsilon$。

上面是两个主要的极限定义，其他一些极限如 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$，$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$，$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)=a$，$\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)=a$ 等的定义同理可得。

例 1. 用极限定义（$\varepsilon-\delta$ 语言）证明

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{25x^2-9}}=\frac{1}{4}。$$

证明： 先假设 $|x-1|<\frac{1}{4}$，则 $\frac{3}{4}<x<\frac{5}{4}$，$|x+1|<2\frac{1}{4}<3$，

所以 $\sqrt{25x^2-9}>\sqrt{25\frac{9}{16}-9}>4$，则

$$\left|\frac{1}{\sqrt{25x^2-9}}-\frac{1}{4}\right|=\left|\frac{\sqrt{25x^2-9}-4}{4\sqrt{25x^2-9}}\right|=\left|\frac{25(x+1)(x-1)}{4\sqrt{25x^2-9}(\sqrt{25x^2-9}+4)}\right|$$

$$\le 75\left|\frac{(x-1)}{4\times 4(4+4)}\right|\le|x-1|，$$

故 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\min\{\frac{1}{4},\varepsilon\}$，当 $|x-1|<\delta$ 时，有

$$\left|\frac{1}{\sqrt{25x^2-9}}-\frac{1}{4}\right|\le|x-1|<\varepsilon，$$

即

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{25x^2-9}}=\frac{1}{4}。$$

注：用极限定义证明 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$ 时，必要时可限制在 x_0 的某个邻域内讨论，即先假设在条件 $0<|x-x_0|<\alpha$ 下讨论，目的是便于对式子 $|f(x)-a|$ 进行放大，使之满足 $|f(x)-a|<\beta|x-x_0|$。同理，用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，也可先假设在条件 $n>N_1$ 下讨论。

例 2. 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A\,(a\ge 0)$，证明 $\lim\limits_{x\to\sqrt{a}}f(x^2)=A$。

证明：由 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A\,(a\ge 0)$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta'>0$，当 $0<|x-a|<\delta'$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$。

取 $\delta=\min\left\{1,\dfrac{\delta'}{1+2\sqrt{a}}\right\}>0$，则当 $0<|x-\sqrt{a}|<\delta$ 时，这时有 $|x+\sqrt{a}|<|x-\sqrt{a}+2\sqrt{a}|<|x-\sqrt{a}|+2\sqrt{a}<1+2\sqrt{a}$，于是有 $0<|x^2-a|=|(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})|<\delta'$，从而 $|f(x^2)-A|<\varepsilon$，因此 $\lim\limits_{x\to\sqrt{a}}f(x^2)=A$。

例 3. 证明若 $a_n>0$（$n=1,2,\cdots$），且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=a$。

证明：由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=a$，有 $\forall\varepsilon>0\,(\varepsilon<1)$，$\exists N$，当 $n>N$ 时有 $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}-a\right|<\varepsilon$，即当 $n>N$ 时有 $a-\varepsilon<\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<a+\varepsilon$，所以当 $n>N$ 时有

$$\frac{\sqrt[n]{a_1\cdot\dfrac{a_2}{a_1}\cdot\cdots\cdot\dfrac{a_{N+1}}{a_N}}}{\sqrt[n]{(a-\varepsilon)^N}}(a-\varepsilon)<\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{a_1\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot\cdots\cdot\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}}<\frac{\sqrt[n]{a_1\cdot\dfrac{a_2}{a_1}\cdot\cdots\cdot\dfrac{a_{N+1}}{a_N}}}{\sqrt[n]{(a+\varepsilon)^N}}(a+\varepsilon),$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{a_1\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot\cdots\cdot\frac{a_{N+1}}{a_N}}}{\sqrt[n]{(a-\varepsilon)^N}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{a_1\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot\cdots\cdot\frac{a_{N+1}}{a_N}}}{\sqrt[n]{(a+\varepsilon)^N}}=1$，所以当 $n>N_1$ 时有

$$\frac{\sqrt[n]{a_1\cdot\dfrac{a_2}{a_1}\cdot\cdots\cdot\dfrac{a_{N+1}}{a_N}}}{\sqrt[n]{(a-\varepsilon)^N}}<1+\varepsilon,\quad \frac{\sqrt[n]{a_1\cdot\dfrac{a_2}{a_1}\cdot\cdots\cdot\dfrac{a_{N+1}}{a_N}}}{\sqrt[n]{(a+\varepsilon)^N}}>1-\varepsilon,$$

故当 $n>\max\{N,N_1\}$ 时有

$$(1-\varepsilon)(a-\varepsilon)<\sqrt[n]{a_n}<(a+\varepsilon)(1+\varepsilon),$$

即有

$$\left|\sqrt[n]{a_n}-a\right|<(a+2)\varepsilon,$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=a。$$

例 4. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=A$。

证明： 由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $X>0$，当 $x>X$ 时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

由 $f(x)$ 在 $[0,X]$ 上连续，则有界，即存在 $M>0$，使得 $|f(x)|\le M$，所以有

$$\frac{1}{x}\int_0^X|f(t)-A|\mathrm{d}t\le\frac{X}{x}(M+A),$$

又 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{X}{x}(M+A)=0$，所以存在 $X'>0$，当 $x>X'$，使得 $\left|\frac{X}{x}(M+A)\right|<\varepsilon$，故有

$$\frac{1}{x}\int_0^X|f(t)-A|\mathrm{d}t<\varepsilon,$$

因此当 $x>\max\{X,X'\}$ 时，有

$$\left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-A\right|=\left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{x}\int_0^x A\mathrm{d}t\right|=\left|\frac{1}{x}\int_0^x(f(t)-A)\mathrm{d}t\right|$$

$$=\frac{1}{x}\int_0^X|f(t)-A|\mathrm{d}t+\frac{1}{x}\int_X^x|f(t)-A|\mathrm{d}t<\varepsilon+\frac{x-X}{x}\varepsilon<2\varepsilon,$$

故

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=A。$$

例 5. 已知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=b$，证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}=ab。$$

证明： 令 $a_n=a+\alpha_n, b_n=b+\beta_n$，由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=b$，可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=0$，所以存在 $M>0$，使 $|\beta_n|\le M$（$n=1,2,\cdots$），故

$$\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}=ab+\frac{b}{n}\sum_{k=1}^n\alpha_k+\frac{a}{n}\sum_{k=1}^n\beta_k+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\alpha_k\beta_{n-k+1},$$

又 $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^n|\alpha_k\beta_{n-k+1}|\le\frac{M}{n}\sum\limits_{k=1}^n|\alpha_k|$，于是由 Stolz 定理有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^n\alpha_k=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^n|\alpha_k|=0$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^n\beta_k=0$，得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}=ab。$$

注： 利用无穷小量来表示极限式，即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$ 的充分必要条件为 $a_n=a+\alpha_n$，α_n 为无穷小。有时比直接用极限的定义简单得多。

例 6. 设 $x\to a$，$f_1(x)$，$f_2(x)$ 为同阶无穷小，$g_1(x)$，$g_2(x)$ 为等价无穷小，且 $f_1(x)>0$，$f_2(x)>0$，并设 $\lim\limits_{x\to a}f_1(x)^{g_1(x)}=A$，证明：$\lim\limits_{x\to a}f_2(x)^{g_2(x)}=A$。

证明： 因为 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 为同阶无穷小，所以 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f_2(x)}{f_1(x)}=B$ （$B>0$，为常数），因此 $\lim\limits_{x\to a}(\ln f_2(x)-\ln f_1(x))=\ln B$，又 $\lim\limits_{x\to a}\ln f_1(x)=\infty$，所以 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{\ln f_1(x)}=0$，故有 $\lim\limits_{x\to a}(\dfrac{\ln f_2(x)}{\ln f_1(x)}-1)=0$，即 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln f_2(x)}{\ln f_1(x)}=1$。再由 $g_1(x)$，$g_2(x)$ 为等价无穷小，所以 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g_2(x)}{g_1(x)}=1$，因此 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g_2(x)}{g_1(x)}\dfrac{\ln f_2(x)}{\ln f_1(x)}=1$，最后由 $\lim\limits_{x\to a}g_1(x)\ln f_1(x)=\ln A$，与前一式相乘得 $\lim\limits_{x\to a}g_2(x)\ln f_2(x)=\ln A$，即 $\lim\limits_{x\to a}f_2(x)^{g_2(x)}=A$。

例 7. 设数列$\{a_n\}$的任意子列$\{a_{n_k}\}$均满足 $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{k}\sum\limits_{i=1}^{k}a_{n_i}=A$ （A 为常数），证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$。

证明： 反证法。假设数列$\{a_n\}$不以 A 为极限，则存在子列$\{a_{m_j}\}$，使 $\lim\limits_{j\to\infty}a_{m_j}=B\neq A$ （B 可以为 ∞），不妨设 $B>A$，我们取 $\varepsilon>0$ 使得 $B>A+2\varepsilon$，由极限的定义，存在正整数 N，当 $j>N$ 时，有 $a_{m_j}>B-\varepsilon>A+\varepsilon$，若取 $n_1=m_{N+1}$，$n_2=m_{N+2}$，…，$n_i=m_{N+i}$，…则

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}a_{n_i}=B\geq A+\varepsilon\neq A,$$

与题设矛盾，故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$。

注： 数列$\{a_n\}$与其子列$\{a_{m_j}\}$有下列重要的关系：数列$\{a_n\}$以 A 为极限的充分必要条件$\{a_n\}$的任意子列$\{a_{m_j}\}$都有 $\lim\limits_{j\to\infty}a_{m_j}=A$。其逆命题为：数列$\{a_n\}$不以 A 为极限，则存在子列$\{a_{m_j}\}$，使 $\lim\limits_{j\to\infty}a_{m_j}=B\neq A$ （B 可以是无穷大）。

注： 本例与例 5 都用到了一个重要的命题，第 1.2.2 节的推论 1。

1.1.2 单调函数（数列）的极限

例 8. 设 $\{x_n\}$ 是一单调数列，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的充分必要条件是存在 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$ 满足 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=a$。

证明： 必要性显然，现证充分性。不妨设 $\{x_n\}$ 单调增加，由 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=a$，则 $\forall\varepsilon>0$，

$\exists K$，当 $k>K$ 时，$-\varepsilon<x_{n_k}-a\le 0$。取 $N=n_{K+1}$，对任意的 $n>N$，存在 $M>K+1$，使得 $n_{K+1}<n<n_M$，于是由 $\{x_n\}$ 是单调增加数列，有 $-\varepsilon<x_{n_{K+1}}-a\le x_n-a\le x_{n_M}-a\le 0$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$。

注：上例是单调数列极限存在的一个重要结论，特别是上例中关于单调数列极限的证明方法值得借鉴。

例 9. 设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上单调上升，$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=+\infty$，若 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)=A$ 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$。

证明：由 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)=A$，则对任意的 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，当 $n>N$ 时，有

$$|f(x_n)-A|<\varepsilon,$$

对任意的 $x>x_{N+1}$，又由 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=+\infty$，存在正整数 $N_1>N+1$，使得 $x_{N_1}>x>x_{N+1}$，再由 $f(x)$ 的单调性得

$$f(x_{N_1})>f(x)>f(x_{N+1}),$$

所以有

$$\varepsilon>f(x_{N_1})-A>f(x)-A>f(x_{N+1})-A>-\varepsilon,$$

即有 $|f(x)-A|<\varepsilon$， 故 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$。

例 10. 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调增加，且 $f(x)>0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(2x)}{f(x)}=1$，证明对任意 $\alpha>0$，有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(\alpha x)}{f(x)}=1$。

证明：由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(2x)}{f(x)}=1$，递推得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(2^n x)}{f(2^{n-1}x)}=1$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(\frac{x}{2^{n-1}})}{f(\frac{x}{2^n})}=1$，则对任意的 $n\in N^+$

有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(2^n x)}{f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(2^n x)}{f(2^{n-1}x)}\cdot\frac{f(2^{n-1}x)}{f(2^{n-2}x)}\cdot\;\cdots\;\cdot\frac{f(2x)}{f(x)}=1,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{f(\frac{x}{2^n})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(\frac{x}{2^{n-1}})}{f(\frac{x}{2^n})}\cdot\frac{f(\frac{x}{2^{n-2}})}{f(\frac{x}{2^{n-1}})}\cdot\;\cdots\;\cdot\frac{f(x)}{f(\frac{x}{2})}=1,\quad\text{即}\lim_{x\to+\infty}\frac{f(\frac{x}{2^n})}{f(x)}=1。$$

又对任意的 $\alpha>0$，存在 $n_0\in N^+$，使得 $\dfrac{x}{2^{n_0}}\le\alpha x\le 2^{n_0}x$，再由 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调增加有

$$\frac{f(\frac{x}{2^{n_0}})}{f(x)}\le\frac{f(\alpha x)}{f(x)}\le\frac{f(2^{n_0}x)}{f(x)},$$

由收敛性得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(\alpha x)}{f(x)}=1$。

例 11. 设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上定义，$g(x)$ 单调，若 $\lim\limits_{x\to\infty}g(f(x))=\infty$，证明 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$。

证明： 反证法。若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)\neq\infty$，则存在 $M>0$，对任意自然数 n，存在 $|x_n|\geq n$，使 $|f(x_n)|\leq M$，即 $-M\leq f(x_n)\leq M$，再由 $g(x)$ 单调，所以有 $g(-M)\leq g(f(x_n))\leq g(M)$，即 $\{g(f(x_n))\}$ 有界，又 $|x_n|\geq n\to\infty$，这与题设 $\lim\limits_{x\to\infty}g(f(x))=\infty$ 矛盾，故所证等式成立。

1.1.3 极限逆定义的应用

极限逆定义主要包括极限 $\lim f(x)\neq A$ 和柯西收敛准则的逆命题。

先给出数列柯西收敛准则：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在 $\Leftrightarrow$ 对任意的 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，当 $m,n>N$ 时，成立 $|x_m-x_n|<\varepsilon$。

极限逆定义：

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n\neq a\Leftrightarrow$ 存在 $\varepsilon_0>0$，对任意的正整数 N，存在 $n>N$，使 $|x_n-a|\geq\varepsilon_0$。

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq a\Leftrightarrow$ 存在 $\varepsilon_0>0$，对任意的 $\delta>0$，存在 x_1 满足 $0<|x_1-x_0|<\delta$，$|f(x_1)-a|\geq\varepsilon_0$。

柯西收敛准则的逆命题：

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在 $\Leftrightarrow$ 存在 $\varepsilon_0>0$，对任意的正整数 N，存在 $m',n'>N$，使 $|x_{m'}-x_{n'}|\geq\varepsilon_0$。

当我们用反证法证明极限存在的时候，常用到极限逆定义或柯西收敛准则的逆命题。

例 12. 设 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域 I（除 x_0 外）有定义，且对任意的点，列 $\{x_n\}\subset I$，$x_n\to x_0$ $(n\to\infty)$，$0<|x_{n+1}-x_0|<|x_n-x_0|$，都成立 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$，证明 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$。

证明： 记 $I=\overset{o}{U}(x_0,\delta')$，反证，假设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq A$，则存在 $\varepsilon_0>0$，对任意的 $\delta>0$，存在 x_δ，满足 $0<|x_\delta-x_0|<\delta$，$|f(x_\delta)-A|>\varepsilon_0$；于是有

取 $\delta_1=\dfrac{\delta'}{2}>0$，存在 x_1，满足 $0<|x_1-x_0|<\delta_1$，$|f(x_1)-A|>\varepsilon_0$；

取 $\delta_2=\min\{\dfrac{\delta'}{4},|x_1-x_0|\}>0$，存在 x_2，满足 $0<|x_2-x_0|<\delta_2$，（即有 $0<|x_2-x_0|<|x_1-x_0|$，$0<|x_2-x_0|<\dfrac{\delta'}{4}$），$|f(x_2)-A|>\varepsilon_0$；

由归纳法，取 $\delta_n=\min\{\frac{\delta'}{2^n},|x_1-x_0|,|x_2-x_0|,\cdots,|x_{n-1}-x_0|\}>0$，存在 x_n，满足 $0<|x_n-x_0|<\delta_n$，（即有 $0<|x_n-x_0|<|x_{n-1}-x_0|$，$0<|x_n-x_0|<\frac{\delta'}{2^n}$），$|f(x_n)-f(x_0)|>\varepsilon_0$；

继续下去，可得数列 $\{x_n\}$，满足 $x_n\to x_0$ （$n\to\infty$），$0<|x_n-x_0|<|x_{n-1}-x_0|$，$|f(x_n)-A|>\varepsilon_0$，与题设矛盾，故所证等式成立。

例 13．若有界数列 { x_n } 不收敛，则必存在两个子列{ $x_{n_k^{(1)}}$ }与{ $x_{n_k^{(2)}}$ }收敛于不同的极限，即 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k^{(1)}}=a$，$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k^{(2)}}=b$，$a\neq b$。

证明：若{ x_n }不收敛，由柯西收敛准则，$\exists\varepsilon_0>0$，$\forall N$，$\exists m>n>N$，使 $|x_m-x_n|\geq\varepsilon_0$。

取 $N_1=1$，存在 $m_1>n_1>N_1$， 满足 $|x_{m_1}-x_{n_1}|\geq\varepsilon_0$，

取 $N_2=m_1$，存在 $m_2>n_2>N_2$，满足 $|x_{m_2}-x_{n_2}|\geq\varepsilon_0$，

…

取 $N_k=m_{k-1}$，存在 $m_k>n_k>N_k$，满足 $|x_{m_k}-x_{n_k}|\geq\varepsilon_0$，

…

于是得 { x_n } 的两个子列 { x_{n_k} } 与 { x_{m_k} }，它们都是有界数列。首先 { x_{n_k} } 具有收敛子列 { $x_{n_k'}$ }，由于对应的 { $x_{m_k'}$ } 也是有界数列，又具有收敛子列 { $x_{m_k''}$ }。记 $\{n_k''\}=\{n_k^{(1)}\}$，$\{m_k''\}=\{n_k^{(2)}\}$，则得到 { x_n } 的两个收敛子列{ $x_{n_k^{(1)}}$ }与{ $x_{n_k^{(2)}}$ }，且 $|x_{n_k^{(2)}}-x_{n_k^{(1)}}|\geq\varepsilon_0$，所以它们收敛于不同的极限。

1.1.4 利用递推式证明极限

例 14．若 $a_n>0$（$n=1,2,\cdots$），且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l<1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$。

证明：取 $l<r<1$，由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l<1$，可知存在正整数 N，当 $n>N$ 时，有递推式 $\frac{a_{n+1}}{a_n}<r<1$，即有

$$\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}}<r<1,\quad \frac{a_{N+3}}{a_{N+2}}<r<1,\quad \cdots,\quad \frac{a_n}{a_{n-1}}<r<1,\quad \cdots,$$

于是上面各式相乘得

$$0<a_n<a_{N+1}r^{n-N-1},$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{N+1}r^{n-N-1}=0$ 和夹逼定理可知

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0\text{。}$$

例 15. 设 $a_n > 0$，$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}+a_{n+2}} = 0$，证明数列 $\{a_n\}$ 无界。

证明： 反证法。假设 $\{a_n\}$ 有界，即存在 $M>0$ 使得 $0<a_n<M$，则 $0<\dfrac{a_n}{2M}<\dfrac{a_n}{a_{n+1}+a_{n+2}}$，所以由夹逼定理得 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{2M}=0$，即有 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$。

又由 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}+a_{n+2}} = 0$，所以对于给定的 $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$，存在正整数 $N>0$，当 $n>N$ 时，有 $\dfrac{a_n}{a_{n+1}+a_{n+2}} < \dfrac{1}{2}$，即有递推式

$$2a_n < a_{n+1} + a_{n+2} \qquad (n>N),$$

递推得

$$\begin{gathered} 2a_{N+1} < a_{N+2} + a_{N+3}, \\ 2a_{N+2} < a_{N+3} + a_{N+4}, \\ \vdots \\ 2a_{N+K} < a_{N+K+1} + a_{N+K+2}, \\ \vdots \end{gathered}$$

上式相加得

$$2a_{N+1} + a_{N+2} < 2a_{N+K+1} + a_{N+K+2},$$

令 $K\to\infty$ 得　$2a_{N+1} + a_{N+2} \le 0$，与题设矛盾，命题成立。

例 16. 设 $\{a_n\}$ 为一正实数序列，且 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = p$，证明　$a_n = o(\dfrac{1}{n^{p-\varepsilon}})$，其中 ε 为满足 $p>\varepsilon>0$ 的任意数。

证明： 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{p}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^p - 1} = 1$，由题设有 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{a_n}{a_{n+1}}-1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^p - 1} = 1$，

因此对任意 $c\in(0,\varepsilon)$，$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{a_n}{a_{n+1}}-1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{p-c} - 1} = \dfrac{p}{p-c} > 1$，所以存在正整数 N，当 $n\ge N$ 时

$\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1 > \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{p-c} - 1$，即得递推式