


量子信息之 量子隐形传态

苏晚琴 著
郭光灿 审

LIANGZI
YINXING
CHUANTAI



 中国科学技术出版社

量子信息之
量子隐形传态

苏晓琴 著
郭光灿 审

中国科学技术出版社

· 北 京 ·

图书在版编目(CIP)数据

量子信息之量子隐形传态 / 苏晓琴著. —北京: 中国
科学技术出版社, 2007.5
ISBN 978-7-5046-4656-9

I. 量… II. 苏… III. 量子力学 — 信息技术 — 研究
IV. 0413.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 055894 号

自 2006 年 4 月起本社图书封面均贴有防伪标志, 未贴防伪标志的为盗版图书。

中国科学技术出版社出版

北京市海淀区中关村南大街 16 号 邮政编码: 100081

电话: 010-62103210 传真: 010-62183872

<http://www.kjpbooks.com.cn>

科学普及出版社发行部发行

北京长宁印刷有限公司印刷

*

开本: 787 毫米 × 1092 毫米 1/16 印张: 11.5 字数: 250 千字

2007 年 5 月第 1 版 2007 年 5 月第 1 次印刷

定价: 25.00 元

(凡购买本社的图书, 如有缺页、倒页、
脱页者, 本社发行部负责调换)

内 容 提 要

本书简单介绍了量子信息的量子力学基础及量子信息理论的基本原理和研究的主要成果,系统地介绍了量子隐形传态的基本理论和涉及的相关概念、不同量子态传送的具体过程、实现量子隐形传态的量子电路、实验装置以及理论与实验的研究进展及最新成果。

本书既可作为读者了解量子信息学及相关专业的入门读物,又可供相关专业大学高年级学生和研究生参考,对相关领域的科研人员也有很大的参考价值。

责任编辑：张楠
封面设计：谢成
责任校对：杨京华
责任印制：安利平

序

我们的时代是信息时代,信息科学与技术已经深入到社会的各个方面。信息科学的飞速发展,使经典信息系统受到巨大的挑战,从而诞生了由量子力学和信息科学形成的一门新兴交叉学科——量子信息学。量子信息学主要包括量子通信和量子计算。量子信息基于量子特性而具有独特的信息功能,在提高运算速度、确保信息安全、增大信息容量和提高检测精度等方面,具有突破现有经典信息系统极限的能力。由于量子信息学潜在的巨大应用价值及重大的科学意义,正引起各方面越来越多的关注,因而量子信息科学作为目前最有吸引力的前沿领域之一,已经成为国际学术界研究的热点,量子信息技术将为人类带来难以估量的影响。

近 20 年来,人们对量子信息学这一跨学科的综合性的理论和实验的研究取得了长足的进展。从 1985 年量子图灵机模型的提出、1994 年 Shor 算法的提出、1996 年 Grover 算法的提出,到它的核磁共振(NMR)的实验演示;从 1984 年基于两种共轭基的四态方案即 BB84 量子加密协议的提出,到它的实验的实现;从 1993 年量子隐形传态方案的提出,到 1997 年首次实验的实现,即可窥见一斑。而其中量子隐形传态是目前量子信息中最引人注目的课题之一,它是量子信息理论的重要组成部分,也是量子计算的基础,又是一种典型的量子通信技术。

本书简要介绍了量子信息理论的基本原理和研究的主要成果,重点介绍量子隐形传态的基本理论和涉及的相关概念、实现量子隐形传态的量子电路、实验装置、不同量子态传送的具体过程以及理论与实验研究的进展。书中大部分章节是作者及导师多年来的研究成果,同时介绍了国内外学者在此领域内所做的研究及目前达到的水平。

全书内容共分八章。第一章量子信息的量子力学基础,采用基于线性代数的公理化体系,介绍一些量子信息中涉及的非常重要的量子力学概念,目的是给读者提供一些数学形式工具和记号,使读者比较容易地理解量子信息的基本理论和应用。

第二章量子信息基本理论简介,简单介绍了量子信息论所涉及的主要方面,包括基础理论、量子通信、量子计算、量子信息的物理实现等,旨在使读者对量子信息的全貌有一个初步的、系统的了解。

第三章量子态的制备,分别介绍了光场量子态的制备、纠缠态的制备、原子纠缠态和光场纠缠态的制备、EPR 态的制备,为下章的量子态的隐形传送做了铺垫。

第四章量子隐形传态,首先介绍了量子隐形传态的基本理论,然后介绍了各种量子态利用不同的方案隐形传送的具体过程。

第五章概率量子隐形传态,在介绍概率量子隐形传态基本理论的基础上,分别介绍了几种量子态的概率隐形传送过程。

第六章量子隐形传态的量子电路和实验方案,首先介绍加拿大计算机科学家 Gilles Brassard 设计的一个进行隐形传态的量子电路,然后介绍奥地利小组和意大利小组的实验方案。

第七章基于量子信道观点的隐形传态的保真度,从量子隐形传态与量子信道的关系,提出对量子隐形传态的一种新认识,最后给出量子隐形传态的保真度。

第八章量子隐形传态的理论与实验研究进展,介绍了近年来国际国内这方面的理论与实验的研究动态和发展前景。

该书由苏晓琴教授执笔。中国科学院院士、博士生导师、中国科学技术大学量子信息重点实验室主任郭光灿教授对全书进行了认真的审阅。

由于量子信息学涉及经典信息论、计算机科学、量子物理学的许多方面,其中还用到概率论、数论、群论等数学知识,是一个典型的多学科交叉。而其中最典型的量子通信技术之一——量子隐形传态,又是一个涉及经典信道、量子信道、纠缠源、bell 基测量、么正变换、各种量子态的制备等诸多方面的繁杂过程,而且作为量子信息学的一个主要分支,同量子信息学领域一样,其发展也是非常迅速的,要概括出该论题的全貌,达到所希望的深度,对于作者确实是非常困难的。另外,为了能够以通俗易懂的方式向读者介绍量子信息及量子隐形传态的相关内容,书中通俗化了许多量子力学的概念,加之本书是在较短的时间内仓促完成的,作者学识、水平有限,书中错误、不妥之处在所难免,敬请读者批评指正。在书稿的撰写过程中,我的导师郭光灿院士给予了有益的指点;中国科学院中国科学技术大学量子信息重点实验室的肖云峰博士、高洁博士、吴青林博士、杨勇博士为作者搜集了许多文献资料,尤其是肖云峰博士就全书的整体构思、所涉及内容的深度与广度、大小标题的确定等方面,与作者做了多次的商榷,使作者获益匪浅,运城学院及物理与电子工程系的领导也给予了作者大力的支持和帮助,在此一并表示衷心的感谢。

作者

2007年3月

导 言

毋庸置疑,我们正生活在一个信息时代。在这样的时代,随着信息技术的进步,信息已经和物质、能量一起构成现代社会赖以生存和发展的三大基本要素。如果说物质是社会基础,能量使社会具有活力,那么信息则是促进社会进步的主要因素。随着现代社会变革和进步的加快,信息的作用越来越突出。信息科学在改善人类生活质量和推进社会文明发展中发挥着令人惊叹的作用,呈现出无可比拟的优越性。这就是人们把当今社会称为信息社会的原因。

研究信息本身的理论是**信息论 (Information theory)**。信息论研究:信息的本质,信息的产生,信息存储和传输,信息编码、译码;传输信道对信息传输有效性、可靠性的影响;在噪声信道中如何保证信息传输质量等问题。虽然有人类活动就有信息获取、传输和利用,但作为一门定量科学,“信息论”则诞生于20世纪40年代。1948年,美国工程师C. E. Shannon发表了“通信的数学理论”的文章,给信息以定量的科学描述,标志着信息论作为一门科学的建立。50多年来,以Shannon理论为核心的经典信息理论经历了一个发展和成熟的过程,这个理论对通信技术和理论的发展起到了重要的推动作用。

第一代电子计算机几乎是在Shannon(香浓)信息论出现的同时诞生的。计算机是信息处理的工具,它是20世纪最重大的发明,给我们的世界带来了巨大的变化。计算机充分显示了人类的智慧。但是,传统的计算机体系结构在人类探索世界奥妙的雄心壮志面前却显得力不从心。于是从Von Neumann(冯诺曼)结构出发,人类就不断地提出各种新型结构的计算机。**量子计算机 (quantum computer)**在这个“角逐”中脱颖而出。随着计算机技术的进步,信息存储、显示、处理和利用发生了根本性的变化。信息在当代社会进步中的重大作用和广泛影响与计算机技术的进步有密不可分的联系。

20世纪初,科学经历了一场出人意料的革命,物理学遇到了一系列危机,问题在于当时的物理学理论(现在称为经典物理学)作出一些荒唐预言,诸如存在包含无穷能量的“紫外灾”或电子必然旋转着进入原子核内部。起初这些问题是通过在经典物理学中附加特别的假设来解决,但随着人们对原子和辐射更多的了解,这些尝试性的解释越来越让人困惑。经过四分之一世纪的混乱,危机在20世纪20年代早期达到高潮,并导致**量子力学 (Quantum Mechanics)**这一现代理论的创立。这就是20世纪科学史上的另一重大发现——**量子论 (quantum theory)**。量子论揭示了经典物理学对物质世界的描述仅在宏观条件下才是正确的,微观世界遵循的是量子规律,世界本质上是量子的,经典规律只是量子规律在宏观条件下的近似。微观粒子具有波粒二象性,它的运动状态、性质、描述方法、运动规律和经典物理根本不同。对结果的预测不再是Laplace决定论的,而是概率的、统计性的。量子力学就是我们描述微观粒子运动的一个理论框架和数学结构,或者说量子力学是一套构造物理学理论的规则。其实量子力学的规则很简单,但即使是专家有时也会感到违反直观。相关学科的先驱长期以来一直寄希望于使量

量子力学能够更好地被理解。量子力学最著名的批判者 Einstein(爱因斯坦),直到去世都不能接受他帮助发明的这个理论。几代物理学家一直在为使量子力学作出的预言更令人满意而奋斗。然而,尽管量子力学简单的规则很难理解,但这一理论的发现却改变了我们对微观世界的描述方法,加深了我们对物质世界本质的理解。

从 20 世纪 20 年代量子力学诞生至今 80 多年来,量子力学理论取得了巨大的成功。量子力学一出现就成为科学不可缺少的一部分,并已有无数成功应用的例子。这个理论不仅解释了原子、原子核结构、化学键、物体超导电性固体结构、半导体性质、基本粒子产生和湮灭、恒星核聚变、DNA 结构和自然界基本粒子等的几乎所有方面的许多重要物理问题,而且也促成了现代微电子技术、激光技术、新能源技术、新材料科学的出现和发展。尽管人们对量子力学理论的理解和解释还存在着这样或那样不同的看法,但它作为一个成功的物理理论,没有人怀疑过它的正确性。

在 20 世纪 80 年代以前,信息理论、计算机科学和量子力学作为不同的学科互相平行地发展,几乎无人注意到它们之间的交叉和联系。在过去的信息理论、计算机科学中,除去信息存储、信息传输和信息处理需要借助于物理手段进行外,这些科学本身似乎和物理学没有太多联系。经典信息论是 Shannon 等人把数学概率论应用于信息研究创造出来的,而计算机科学则在很大程度上是由 Turing、Church、Post 和 G del 等人依靠思辩和逻辑,凭借灵感和直觉创造出来的。最近 20 多年来,人们越来越清楚地认识到,信息论、计算机科学和物理学存在着深刻的、密切的联系。信息,归根结底是编码在物理系统态中的东西,从物理角度看,信息源于物理态在时空中的变化,信息传输是编码物理态的传输,信息处理是被称为“计算机”的物理系统态的有控制演化,信息的提取则是对编码物理态的测量。信息论、计算机科学和物理学的联系不仅表现在信息需要借助于物理手段存储、传输和处理,而且还表现在这些科学概念、原理都要受到基本物理规律的制约。当对编码信息的态从经典物理解过渡到量子物理解时,由于量子态具有根本不同于经典物理态的性质,对经典物理为基础的信息论和计算机科学不可避免地要重新加以审视。另外,人们为了安全、有效、可靠地分享这些信息,表现出了对于信息交流、存储和处理的需求的日益增加,这样就促使人们不断地致力于信息技术的研究和开发。然而,由于现有的信息系统其信息功能已开拓到接近极限的程度,因此,信息科学的进一步发展必须借助于新的原理和新的方法。于是,由量子力学和信息科学相融合而形成的新兴交叉学科——量子信息学或称量子信息理论(quantum information theory)便应运而生了。所谓量子信息学,实质上就是研究用量子态编码的信息科学。

量子信息学是 20 世纪 80 年代以后发展起来的。它涉及经典信息论、计算机科学、数学、工程技术、微电子技术、量子物理学等诸多学科。它可以解决许多经典信息所不能够完成的信息处理功能问题。20 多年来,人们对量子信息学这一跨学科的综合性的理论和实验的研究取得了长足的进展。现在,量子信息学已成为内容丰富的新学科,建立了 Shannon 编码定理的量子推广。量子纠缠现象在通讯中的应用,创造出“绝对安全的密钥”、“稠密编码”、“隐形传态”等经典信息理论不可思议的奇迹,构造出“分解大数因子”、“未加整理的数据库搜索”等问题的量子算法。利用理想中的量子计算机,可以实现大规模的并行计算,产生经典计算机不

可比拟的信息处理功能等。在实验研究方面,成功地实现了局域网上的量子密钥分配以及量子隐形传态。在量子逻辑门的物理实现方面,已经找到了几个物理系统,并成功地实现了基本逻辑门运算。量子信息基于量子特性而具有独特的信息功能,在提高运算速度、确保信息安全、增大信息容量和提高检测精度等方面,具有突破现有经典信息系统极限的能力。由于量子信息学潜在的巨大应用价值及重大的科学意义,不仅引起各国政府和科技界的广泛关注,而且受到信息产业界、军事部门、金融银行业和企业厂商的高度重视。因而量子信息科学作为目前最有吸引力的前沿领域之一,已经成为国际学术界研究的热点,发展非常迅猛。随着量子信息理论和实验上不断获得新的突破,人们预言这一研究有可能在 21 世纪引起一场关于信息和通信技术的革命,量子信息技术将为人类带来难以估量的影响。不可否认,信息科学正在进入一个由经典跨入量子信息的新阶段。

量子通信 (Quantum Communication) 是量子信息学的一个重要分支。量子通信是以量子态作为信息单元来实现信息的有效传送的。根据传送类型的不同可分为两类:一是传送经典信息,如量子密码,量子身份认证,量子比特承诺等;二是传送量子信息,如量子隐形传态,量子通信网路等。量子通信理论是 1993 年由美国 IBM 的研究人员提出的,目前美国国家科学基金会、美国国防部等部门正在着手研究此项技术,欧盟从 1999 年开始研究,日本也从 2001 年将量子通信纳入十年计划。在量子通信中,除了需要传统的经典信道外,更为主要的还需建立通信各方之间的量子信道。所谓量子信道实际上就是通信各方之间的量子纠缠。量子纠缠是一种有用的信息“资源”,不但在量子通信而且在量子计算中都起着关键作用。**量子隐形传态 (quantum teleportation)** 是目前量子信息中最引人注目的课题之一,它是量子信息理论的重要组成部分,也是量子计算的基础,同时又是一种典型的量子通信技术。

量子隐形传态是一个非常有趣的研究课题。它使用了量子力学一种奇妙特性,也就是,有一对相距非常遥远的关联粒子,如果改变粒子 A 状态,那么粒子 B 也会在瞬间改变状态,并且这种改变是同时发生的。也就是说,关联粒子间具有非局域性。

本书简要介绍量子信息理论的基本原理和研究的主要成果,重点介绍量子隐形传态的基本理论和涉及的相关概念、不同量子态传送的具体过程、实现量子隐形传态的量子电路、实验装置以及理论与实验的研究进展及最新成果。目的在于为读者了解量子信息学及相关专业提供一本入门读物,同时,又可供相关专业大学高年级学生和研究生参考,对相关领域的科研人员也有很大的参考价值。

目 录

第一章 量子信息学的量子力学基础	(1)
1.1 光子的偏振	(1)
1.2 状态空间和狄拉克表示法	(3)
1.3 量子力学的基本原理	(9)
第二章 量子信息基本理论简介	(18)
2.1 全貌	(18)
2.2 量子比特	(23)
2.3 量子纠缠	(25)
2.4 量子不可克隆定理	(34)
2.5 消相干与量子编码	(36)
2.6 量子密集编码	(41)
2.7 量子隐形传态	(42)
2.8 量子密码术	(43)
2.9 量子计算	(45)
2.10 量子计算机及其物理实现	(55)
2.11 量子信息的发展概况	(67)
第三章 量子态的制备	(73)
3.1 光场量子态的制备	(73)
3.2 纠缠态的制备	(74)
3.3 原子纠缠态和光场纠缠态的制备	(80)
3.4 不同腔中的原子 EPR 态的制备	(81)
第四章 量子隐形传态	(85)
4.1 量子隐形传态的基本理论	(85)
4.2 两粒子自旋态的隐形传送	(89)
4.3 两光子纠缠态的隐形传送	(91)
4.4 两原子纠缠态的隐形传送	(94)
4.5 实现原子隐形传态的共振作用腔 QED 方案	(97)
4.6 实现原子隐形传态的大失谐作用腔 QED 方案	(100)

4.7	全同费米子系统的量子隐形传态	(101)
4.8	利用四粒子纠缠态隐形传送二粒子态	(103)
4.9	利用原子—光场的双光子及色散相互作用传送光场的 Fock 叠加态	(106)
4.10	利用 GHZ 态实现量子隐形传态	(107)
4.11	连续变量的量子隐形传态	(110)
第五章	概率量子隐形传态	(114)
5.1	概率量子隐形传态基本理论	(114)
5.2	单原子态的概率隐形传送	(117)
5.3	光场薛定谔猫态的隐形传送	(119)
5.4	两粒子纠缠态的概率隐形传送	(126)
5.5	用 W 态作量子信道实现纠缠态的隐形传送	(128)
5.6	实现概率隐形传送原子态的腔 QED 方案	(131)
5.7	概率隐形传送原子纠缠态的腔 QED 方案	(134)
第六章	量子隐形传态的量子电路和实验方案	(138)
6.1	量子隐形传态的量子电路	(138)
6.2	奥地利小组的实验方案	(139)
6.3	意大利小组的实验方案	(141)
第七章	基于量子信道观点的隐形传态的保真度	(144)
7.1	量子隐形传态与量子信道	(144)
7.2	Nielsen - Caves 理论	(147)
7.3	量子隐形传态表为量子信道	(148)
7.4	对量子隐形传态的新认识	(150)
7.5	量子隐形传态的保真度	(151)
第八章	量子隐形传态的理论与实验研究进展	(154)
8.1	理论进展	(154)
8.2	实验进展	(156)
8.3	结束语	(158)
参考文献	(160)

第一章 量子信息学的量子力学基础

量子力学:科学中真正的巫术。

——Albert Einstein

量子力学对已知世界的描述是最精确和完整的,也是理解量子信息基本理论的基础。由于量子力学描述的是微观世界的一些现象,所以它非常难以理解。本章并不打算对量子力学和量子世界作更多深层次和透彻的解释,只是希望读者可以很快浏览整章内容,以获得一些量子力学的感性知识及理解量子信息理论所必需的量子力学基础知识,并熟悉我们用的符号约定。

1.1 光子的偏振

光子是我们可直接观测到的唯一微观粒子。本节我们将通过光子及其偏振的简单实验说明量子力学的某些原理。实验所需要的器材有:一台激光光源(或其他强光源),三个偏振片 A 、 B 和 C ,其偏振方向分别是水平、 45° 和垂直。

1.1.1 偏振实验

如图 1.1 所示,将一束光照射到投影屏上,并假设入射光的偏振方向是随机的。首先在光源和投影屏之间插入水平偏振片 A ,可以看到透过 A 后的出射光光强只有其入射光强的一半,而且射出的光子现在都变成了水平偏振。



图 1.1 光子偏振实验 1

上述现象似乎说明偏振片 A “过滤”掉了那些不是水平偏振方向的光子,而让那些偏振方向是水平方向的光子通过。从经典意义上说,由于偏振片 A 的入射光的偏振方向是随机的,所以入射光中偏振方向是水平的光子数目极少,如果偏振片 A 起到的是“过滤”作用,那么出射光的光强应该非常弱,而不会是入射光光强的一半。

现在将垂直偏振片 C 插入到偏振片 A 和投影屏之间,如图 1.2 所示,可以看到偏振片 C 的出射光光强为零。似乎“过滤”可以解释这一现象,因为“没有偏振方向为水平方向的光子能够通过偏振方向为垂直的偏振片”。

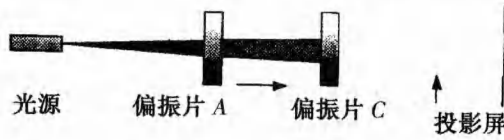


图 1.2 光子偏振实验 2

最后,我们在偏振片 A 和 C 之间插入偏振方向为 45° 偏振片 B,如图 1.3 所示,可以在投影屏上看到一些微弱的光,它的光强可以按马吕斯定律 $I = I_0 \cos^2 \alpha$ (式中, I 为出射光强, I_0 为入射光强, α 为两偏振片之间的夹角) 计算得到,结果正好是光源光强的 1/8。

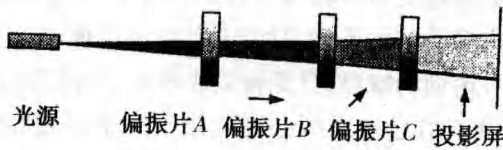


图 1.3 光子偏振实验 3

1.1.2 实验解释

如果我们使用两个基向量 $|\uparrow\rangle$ 和 $|\rightarrow\rangle$ 分别表示垂直偏振方向和水平偏振方向,那么任意一个随机的偏振方向可以用这两个基向量的线性组合形式表示为:

$$a|\uparrow\rangle + b|\rightarrow\rangle \tag{1.1.1}$$

其中, a 和 b 表示复数,而且 $|a|^2 + |b|^2 = 1$ 。两个基向量 $|\uparrow\rangle$ 和 $|\rightarrow\rangle$ 被称为被测力学量的本征态。

我们感兴趣的是光子的偏振方向,可以将一个光子的偏振状态表示为上述形式。其实,任意两个相互正交的非零单位向量都可以作为状态空间的基。

对量子状态的测量,要求把该状态分别投影到其对应的正交基上,见图 1.4。对该状态进行测量的时候,观测到状态 $|\uparrow\rangle$ 的概率为 $|a|^2$,而观测到状态 $|\rightarrow\rangle$ 的概率为 $|b|^2$ 。由于测量总是在相互正交的基上进行的,所以在后面论述中的所有的基均是正交的。不同的测量设备对应不同的正交基。

另外,对量子态的测量还将使被测量的量子态改变为测量结果所表示的态。也就是说,如果我们对量子态 $|\psi\rangle = a|\uparrow\rangle + b|\rightarrow\rangle$ 进行测量所得到的结果是 $|\uparrow\rangle$,那么,量子态 $|\psi\rangle$ 就变成了 $|\uparrow\rangle$,如果再用相同的基进行测量,测量结果一定还是态 $|\uparrow\rangle$ 。由此可以看出,除非被测量的量子态是被测力学量的一个本征态,否则,任何测量都会改变量子态,而且不能由改变后的量子态推知原来的量子态。

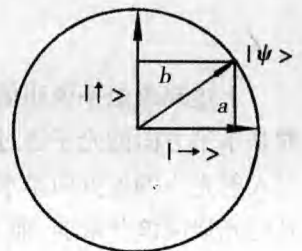


图 1.4 对量子状态的测量

现在我们用上述原理对前面的偏振实验进行解释。插入偏振片可以看成是对光子的量子态进行一次测量。在测量的两个

正交基中,一个与偏振片的偏振方向相同,而另一个与偏振片的偏振方向垂直。该测量将改变光子的偏振方向。只有那些测量后的偏振方向与偏振片偏振方向一致的光子才能通过偏振片,而其他光子被偏振片反射回去了。例如,偏振片 A 用基 $| \rightarrow \rangle$ 来测量光子的量子态,那么有的光子的量子态在测量后变成了 $| \rightarrow \rangle$,有的光子的量子态在测量后变成了 $| \uparrow \rangle$,只有偏振方向为 $| \rightarrow \rangle$ 的光子才能通过偏振片 A ,而所有偏振方向为 $| \uparrow \rangle$ 的光子则全被反射回去了。

假设光源产生的光子的偏振方向是随机的,各种偏振方向的光子出现的概率相同,那么,这些光子的量子态经过偏振片 A 测量后,光子状态被偏振片 A 、 B 和 C 改变的概率为 50%。所以,偏振方向变为水平方向的光子占有所有光子的 50%,这些光子的量子态为 $| \rightarrow \rangle$,它们通过偏振片 A 。而偏振片 C 用基 $| \uparrow \rangle$ 来对量子态为 $| \rightarrow \rangle$ 的光子进行测量,光子状态改变的概率是 0,其量子态仍然保持 $| \rightarrow \rangle$ 。所以没有任何光子通过偏振片 C ,则偏振片 C 的出射光强为 0。

在偏振片 A 和 C 之间插入偏振片 B 时,由于偏振片 B 的正交基可以表示为:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(| \uparrow \rangle + | \rightarrow \rangle), \frac{1}{\sqrt{2}}(| \uparrow \rangle - | \rightarrow \rangle) \right\} \quad (1.1.2)$$

我们可以将它们分别写为: $| \nearrow \rangle$ 和 $| \nwarrow \rangle$ 。量子态为 $| \nearrow \rangle$ 的光子将通过偏振片 B 。具体来说,通过偏振片 A 后量子态为 $| \rightarrow \rangle$ 的光子被偏振片 B 测量,光子状态改变的概率是 50%,其中有 50% 的光子状态变为 $| \nearrow \rangle$,也就是说,通过偏振片 A 的光子中有 50% 可以通过偏振片 B 。同样,通过偏振片 B 的光子被偏振片 C 测量后,其中 50% 的光子状态会变成态 $| \uparrow \rangle$ 。所以,能够通过偏振片 A 、 B 和 C ,最终到达投影屏的光子数量是光源产生的光子数量的 $1/8$,因此投影屏的光强是光源的 $1/8$ 。

从这个实验中我们可以看到,量子态可以是本征态,也可以是叠加态。如果把通过偏振片看作测量,那么就会发现,量子态经过测量后则会发生状态塌陷,由最初的状态塌陷到测量给出的状态上。

1.2 状态空间和狄拉克表示法

一个系统的量子状态由各种粒子的位置、动量、偏振、自旋等组成,并且随时间的演化过程遵循薛定谔(schrödinger)方程,而它的状态空间(state space)可以用波函数的 Hilbert 空间来描述,见图 1.5。

1.2.1 状态空间

矢量空间(vector space)就是一组元素 $| u, v, w, \dots |$ 的集合 L ,并且满足:

- ① L 对加法运算是封闭的;
- ② 域 F 的任意一个数与 L 的任一元素相乘结果仍是 L 中的元素;
- ③ 对于 $u, v, \in L, a, b \in F$ 满足

$$a(u + v) = au + av \in L$$

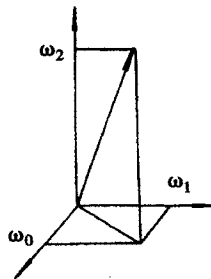


图 1.5 量子状态空间

$$(a + b)u = au + bu \in L \quad (1.2.1)$$

$$a(bu) = (ab)u$$

则称 L 为域 (field) F 上的矢量空间。当 F 为复数域, 相应的矢量空间就是复矢量空间。

我们称定义了内积的矢量空间为内积空间 (inner-product space)。内积的定义如下: 对于每一对元素 $u, v \in L$, 都有域 F 中的一个数与之对应, 记为 (u, v) , 称为 u 和 v 的内积。内积具有如下性质:

$$(u, v) \geq 0$$

$$(u, v) = (v, u)^* \quad (1.2.2)$$

$$(w, au + bv) = a(w, u) + b(w, v)$$

其中“ $*$ ”表示复共轭。 $(u, u) = |u|^2$ 的非负平方根为矢量 u 的模 (norm) 或矢量长度 (length)。

一个完备的内积空间就是 Hilbert 空间。在 Hilbert 空间中取 m 个矢量 u_1, u_2, \dots, u_m , 同时取域 F 中的 m 个数 a_1, a_2, \dots, a_m ; 如果 $a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_m u_m = 0$, 当且仅当对所有的 $a_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$) 时才成立, 那么称矢量 u_1, u_2, \dots, u_m 是线性无关的。在一个 Hilbert 空间中, 如果最多只有 N 个线性无关的矢量, 则称该矢量空间是 N 维的。

1.2.2 狄拉克表示法

量子力学系统由 Hilbert 空间中的矢量表示, 表示量子态的矢量称状态矢量 (state vector)。Hilbert 空间就是状态矢量张起的空间, 在量子力学中称为状态矢量空间, 或称态矢空间 (state vector space)。严格说来, 量子力学中的态矢空间是扩充了的 Hilbert 空间, 因为在量子力学中除去包括有限矢量外, 还包括长度无限的矢量, 而这些矢量在数学 Hilbert 空间是没有的。通常量子状态空间和作用在其上的变换可以使用 Hilbert 空间中的矢量、矩阵来描述, 但是物理学家狄拉克 (Dirac) 提出了一套更为简洁的符号表示状态矢量。使用称为右矢 (ket vector) 的符号 $|\psi\rangle$ 表示量子态, 使用称为左矢 (bra vector) 的符号 $\langle\psi|$ 表示右矢 $|\psi\rangle$ 的共轭转置矢量 (conjugate vector)。

例如, 一个二维复矢量空间的正交基 $|(1, 0)^T\rangle, |(0, 1)^T\rangle$ 可以表示为 $|0\rangle, |1\rangle$ 。任意矢量 $(a, b)^T$ 就可以表示为 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 的线性组合 $a|0\rangle + b|1\rangle$ 。需要注意的是: 基矢量表示顺序的选择是任意的, 我们也可以用 $|0\rangle$ 表示 $(0, 1)^T$, 用 $|1\rangle$ 表示 $(1, 0)^T$ 。

两个矢量 $|\psi_1\rangle$ 和 $|\psi_2\rangle$ 的内积记为 $\langle\psi_1|\psi_2\rangle$, 而它们的外积则记为 $|\psi_1\rangle\langle\psi_2|$ 。例如, $\langle 0|0\rangle = 1$, 而 $\langle 0|1\rangle = 0$ 。

由于

$$|0\rangle\langle 1||1\rangle = |0\rangle\langle 1|1\rangle = |0\rangle \quad (1.2.3)$$

$$|0\rangle\langle 1||0\rangle = |0\rangle\langle 1|0\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.2.4)$$

所以, $|0\rangle\langle 1|$ 是将 $|1\rangle$ 转换为 $|0\rangle$, 而将 $|0\rangle$ 转换成 $(0, 0)^T$ 的一个变换。

如果, $|0\rangle = (1, 0)^T, |1\rangle = (0, 1)^T$, 那么:

$$|0\rangle = (1,0)$$

$$|1\rangle = (0,1)$$

则

$$|0\rangle\langle 1| = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} (0 \ 1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.2.5)$$

同样, $|1\rangle\langle 0|$ 可以将 $|0\rangle$ 转换为 $|1\rangle$, 而将 $|1\rangle$ 转换成 $(0,0)^T$ 。因为

$$|1\rangle\langle 0||0\rangle = |1\rangle\langle 0|0\rangle = |1\rangle \quad (1.2.6)$$

$$|1\rangle\langle 0||1\rangle = |1\rangle\langle 0|1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.2.7)$$

而

$$|1\rangle\langle 0| = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (1 \ 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.2.8)$$

可以看到,狄拉克表示法为构造量子态的变换(transformation)带来了极大的方便,所有这些变换都是以基矢量的形式表示的。例如,对应于经典的一位非门,就可以利用上边的两个变换将一个量子非门的变换构造为:

$$X = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.2.9)$$

现在我们用狄拉克表示法来描述 Hilbert 空间的一些性质。任意两个矢量 $|\psi\rangle$ 和 $|\varphi\rangle$ 的内积为 $\langle\psi|\varphi\rangle$ 。它们具有如下属性:

$$\langle\psi|\varphi\rangle \geq 0$$

$$\langle\varphi|(a|\psi_1\rangle + b|\psi_2\rangle) = a\langle\varphi|\psi_1\rangle + b\langle\varphi|\psi_2\rangle \quad (1.2.10)$$

$$\langle\varphi|\psi\rangle = \langle\psi|\varphi\rangle^*$$

$$\|\psi\| = \langle\psi|\psi\rangle^{1/2}$$

一个自转置操作在 Hilbert 空间中有特殊的表示法。它的特征态形成了 Hilbert 空间的一组完备的正交基。我们可以将自转置操作 A 写作如下形式:

$$A = \sum_n a_n P_n \quad (1.2.11)$$

a_n 是 A 的特征值, P_n 是对应 a_n 的特征矢量空间的正交投影。 P_n 满足下面性质:

$$P_n P_m = \delta_{n,m} P_n \quad (1.2.12)$$

$$P_n^\perp = P_n$$

1.2.3 算符

算符是矢量空间中的一个重要概念。规定一个具体的对应关系,用 A 表示,使得右矢空间中的某些右矢与其中另一些右矢相对应,例如使 $|\varphi\rangle$ 与 $|\psi\rangle$ 相对应,记为

$$|\varphi\rangle = A|\psi\rangle$$

这样的对应关系 A 称为算符。我们说算符 A 作用于右矢 $|\psi\rangle$, 得到右矢 $|\varphi\rangle$ 。