

信息与通信工程研究生系列教材



# 现代数字信号处理

杨绿溪 / 编著



科学出版社

[www.sciencep.com](http://www.sciencep.com)

## 内 容 简 介

本书全面系统地介绍了现代数字信号处理的主要内容和重要新进展。全书共分10章,内容包括:离散时间信号处理和离散随机信号分析基础,信号的线性预测与格型滤波器,随机信号的线性建模,功率谱估计的经典方法和模型方法,频率估计的特征空间分析方法,最优维纳滤波和迭代卡尔曼滤波,自适应滤波器,多速率信号处理和滤波器组,信号的时频分析方法以及盲信号处理。本书力图以较浅显易懂的语言简洁准确地表达较复杂的内容,并以较多的实例来帮助读者消理解,各章还给出了较多的习题。

本书可作为高等学校信息与通信工程专业及其他相关专业的研究生、博士生和高年级本科生的教材及教学参考书,也可供企、事业单位从事信号与信息处理相关工作的科研技术人员参考。

---

### 图书在版编目(CIP)数据

现代数字信号处理/杨绿溪编著. —北京:科学出版社,2007  
(信息与通信工程研究生系列教材)  
ISBN 978-7-03-020239-0

I. 现… II. 杨… III. 数字信号-信号处理-研究生-教材 IV. TN911.72

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 162104 号

---

责任编辑:匡 敏 余 江 潘继敏 / 责任校对:陈玉凤  
责任印制:张克忠 / 封面设计:耕者设计工作室

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2007年11月第一版 开本:B5(720×1000)

2007年11月第一次印刷 印张:36 3/4

印数:1—3 000 字数:700 000

定价:52.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换<明辉>)

## 序

随着信息科学的飞速发展,作为其专业基础学科之一的数字信号处理也经历了飞速的发展,它的应用已涉及国民经济、国防和人们日常生活的各个方面,其内容也日新月异,不断地向前发展,并与很多其他学科相互交叉。但无论它怎样发展,其各个分支的基础内容部分仍是相互关联并成同一体系的,这就是数字信号处理课程需要重点讲授的内容。

目前信息科学类研究生的招生规模和相关科研人员的规模一直都在扩大,很多重点大学的研究生规模已接近甚至超过本科生的规模,而“数字信号处理”是很多重要学科(如信息、电子、通信等学科)的主干学位课程,而且是很多大型企、事业单位相关科研人员的培训课程,因此相应的教材建设是非常重要的。目前国内外有很多的有关数字信号处理的教材和参考书,但适用于做研究生“数字信号处理”学位课程的教材还不多。有很多是经典的本科生教材,还有些水平很高,但又偏向于专著的性质;即使是针对研究生的教材,其侧重点也互不相同。《现代数字信号处理》一书作者长期负责讲授东南大学“现代数字信号处理”学位课程,且从事这一领域的科研工作已有十余年时间,在教学和科研中已积累了较多的经验和心得体会,所以我一直希望并鼓励他尽快编写一本合适的课程教材。

该书是作者在多年的讲义基础上改编整理而成的,对现代数字信号处理的课程内容进行了有针对性的优化整合,重点强调基础性和先进性两个方面。该书内容丰富,作者由浅入深地组织了随机信号分析基础、信号预测与线性建模、参数估计、谱估计与子空间分析、最优的维纳滤波与迭代卡尔曼滤波、自适应滤波、多速率数字信号处理与滤波器组、信号的时频分析、盲信号处理等课程内容,并精心设计了习题和计算机练习题。根据师生的反馈意见,已取得很好的教学效果,达到了提高和深化学生知识水平的目的。

目前,数字信号处理学科的内容还在不断的发展之中,随着时间的推移,新的成果会不断涌现,因此该书也将会不断地进行修订;有些内容,如小波分析、非高斯和非线性的信号处理方法,以及针对多输入多输出数字处理系统的空时信号处理方法等也可能会以某种简洁的表述形式出现在教科书中。从现在看,该书内容已相当丰富,取材新颖,理论性强,概念清楚,系统性好,是一本理论密切联系实际的优秀教材;也是一本对电子信息与通信工程科技人员有价值的参考书。

何振亚 谨识

2007年8月于东南大学

## 前 言

数字信号处理是信息科学中非常重要也是发展十分迅速的一门专业基础学科,它广泛应用于通信、雷达、声呐、音视频与多媒体、生物医学、振动工程等众多领域,内容涉及信息与通信工程、电子科学技术、计算机科学技术、自动控制等重要学科门类,它的理论、方法和技术一直处于不断的发展与变化之中。很多大学已将数字信号处理的一些基础内容放在本科中讲授,开设了相应的本科生必修课程,甚至开设了随机数字信号处理的选修课程。因此,在后续的研究生“现代数字信号处理”学位课程中如何在内容上扎实有效地衔接,并进一步深化提高,就成为有关教改项目的重要研究内容。所以,讲授研究生课程时需要将信号处理的主要内容进行优化整合,在基础性和先进性方面与相关的前沿领域相衔接,使学生通过学习能有效提高其知识水平,这也是作者编写此书的主要目的。

本书较全面地反映了现代数字信号处理的主要内容和重要新进展。它主要是作为信息科学类研究生的“数字信号处理”学位课程教材,因此在内容上强调基本概念和基本理论方法的掌握,并突出各部分的相互联系。在编写此书时,作者力图以较浅显易懂的语言简洁准确地表达较复杂的内容,并以较多的实例来帮助读者消理解;还给出了较多的习题和计算机练习题,并将一些更进一步的内容设计为新颖的习题,让读者更深入地思考。本书层次结构较分明,内容由浅入深,后几章的内容在授课时可以只选用部分章节。

本书的主要内容如下:

首先,第一章回顾和概述了离散时间信号处理的基础内容,主要是为了与本科学生的数字信号处理课程相衔接。第二章介绍了离散随机信号分析的基础内容,给出了随机信号的基本概念和基本模型、类型,并讨论了作用于随机信号的基本正交变换和涉及其模型参数的基本参数估计方法。

然后,在第三、四、五、六章重点叙述了基于二阶统计量的经典信号处理理论和方法。第三章主要介绍信号的线性预测,揭示了它与随机信号的 AR 建模及确定性信号的全极点建模的等效关系,总结了四种主要算法,即自相关法、协方差法、修正协方差法和 Burg 算法,并由线性预测导出了格型滤波器和格型建模方法。第四章主要介绍随机信号的线性建模,其 AR 建模方法则直接来自第三章的内容。第五章介绍功率谱估计的经典方法和模型方法,以及用于频率估计的特征空间分析方法,其中功率谱估计的模型法与第三、四章的信号线性建模问题密切相关,而特征空间分析方法也是阵列信号处理中一些等效问题的主要处理方法。第六章介

绍了基于二阶统计量的最优维纳滤波和基于信号状态方程的迭代最优滤波——卡尔曼滤波,重点介绍了实际中更常用的 FIR 维纳滤波器,并给出了它们用于噪声抑制、预测和反卷积的应用实例。

最后四章是现代数字信号处理的一些新进展内容。

第七章是自适应滤波,也可认为是维纳滤波器的自适应实现,以自适应滤波的方式将基于二阶统计量的最优滤波用于非平稳信号的处理,重点介绍了 FIR 自适应滤波器和相应的 LMS 类算法及 RLS 类算法。

第八章介绍多速率信号处理与滤波器组。首先是多速率信号处理的基本内容,即数字信号的升采样、降采样和分数倍采样,以及高效实现它们的多级结构和多相分解结构等。然后研究了数字滤波器组的主要内容,包括两通道滤波器组和多通道滤波器组,两通道滤波器组中重点介绍了 FIR 的正交镜像滤波器组(QMF)、正交滤波器组和双正交滤波器组的设计,多通道滤波器组则主要介绍了调制类滤波器组的设计。

第九章讨论适用于非平稳信号分析的时频分析方法,主要包括线性的短时傅里叶变换,非线性的 Wigner-Ville 分布与 Cohen 类时频分布。

第十章研究了较前沿的盲信号处理问题,其中盲信号分离部分主要介绍了盲源分离和盲抽取的一些基本算法及噪声环境下的处理方法,盲反卷积部分则主要介绍了基于二阶循环统计量的 SIMO 和 MIMO 信道的盲估计与盲均衡,重点研究了子空间分析法和线性预测方法。

本书可作为高等学校信息与通信工程专业及其他相关专业的研究生、博士生和高年级本科生的教材和教学参考书,也可供企、事业单位从事信号与信息处理相关工作的科研技术人员参考。本书在作为研究生学位课程教材时,建议主要讲解前六章和七、八、九章的部分内容;在用于博士生学位课程教学时,建议主要选讲第二、七、八、九、十章,其中第二章的参数估计内容应进一步深入展开;若是用于高年级本科生的随机信号处理课程的教学,建议主要讲授第一、二章,并选讲第三、四、五、六章中的一些基本内容。

国家攀登计划重大项目首席科学家、IEEE 终生院士何振亚老先生一直以来十分关心和支持本书的编写和出版,并提出了很多宝贵的意见,在此谨向何先生表示衷心的感谢。

本书在编写过程中还得到东南大学优秀课程基金的资助,在此也表示感谢。

由于作者水平所限,书中不妥和错误之处在所难免,恳请广大读者批评、指正。

杨绿溪

2007年8月于东南大学

# 目 录

序

前言

<b>第一章 离散时间信号处理基础</b> .....	1
1.1 离散时间信号 .....	1
1.2 离散时间系统 .....	2
1.3 LSI 滤波器的时域描述 .....	4
1.4 离散时间傅里叶变换 .....	5
1.5 $z$ 变换 .....	7
1.6 DFT 和 FFT .....	10
1.7 一些特殊性质的序列和对应的滤波器.....	14
1.7.1 全通序列和全通滤波器 .....	14
1.7.2 最小相位序列和最小相位滤波器 .....	15
1.7.3 线性相位序列和线性相位滤波器 .....	16
1.7.4 实值 DTFT 所对应的共轭对称序列和半正定序列 .....	17
习题 .....	18
<b>第二章 离散随机信号分析基础</b> .....	21
2.1 随机变量.....	21
2.2 随机过程及其特征描述.....	22
2.2.1 随机过程的定义 .....	22
2.2.2 集总平均.....	24
2.2.3 高斯随机过程 .....	28
2.2.4 平稳随机过程 .....	29
2.2.5 宽平稳随机过程的自协方差和自相关矩阵.....	31
2.2.6 随机过程的各态遍历性 .....	34
2.2.7 白噪声 .....	38
2.2.8 功率谱 .....	39
2.3 随机过程通过滤波器.....	42
2.4 谱因子分解.....	46
2.5 几种基本类型的随机过程.....	50
2.5.1 自回归滑动平均过程 .....	50

2.5.2	自回归过程	53
2.5.3	滑动平均过程	55
2.5.4	谐波过程	56
2.6	信号的正交变换	58
2.6.1	内积空间中的正交变换	58
2.6.2	K-L 变换	61
2.6.3	离散余弦变换	68
2.7	基本的参数估计方法	72
2.7.1	参数估计的基本性能	73
2.7.2	随机信号统计量的样本估计	77
2.7.3	最小二乘估计	80
2.7.4	线性的最小均方误差估计	83
2.7.5	最大似然估计	85
2.7.6	Bayes 估计概述	90
	习题	92
<b>第三章</b>	<b>线性预测和格型滤波器</b>	<b>97</b>
3.1	基本的线性预测模型和自相关算法	97
3.1.1	最优线性预测	97
3.1.2	基于有限区间数据的自相关算法	100
3.2	AR 过程全极点建模与线性预测的等效	104
3.3	Levinson-Durbin 递归算法	106
3.3.1	Levinson-Durbin 递归算法的推导	106
3.3.2	格型滤波器结构的获得	113
3.4	三组递归参数的等效关系	114
3.4.1	递归参数的基本特性	114
3.4.2	自相关阵 $R_p$ 的 Cholesky 分解和其逆矩阵的形式	119
3.4.3	自相关的外推问题	122
3.4.4	三组参数的相互递推	124
3.5	Schur 递归算法	131
3.6	一般的 Levinson 递归算法	135
3.7	线性预测的协方差算法	139
3.8	前向和后向线性预测与格型滤波器	143
3.8.1	前后向预测与 FIR 格型滤波器	143
3.8.2	IIR 格型滤波器	146
3.9	线性预测的格型模型法	152

3.9.1 前向格型协方差法 .....	152
3.9.2 后向格型协方差法 .....	154
3.9.3 格型预测建模的 Burg 算法 .....	154
3.10 线性预测的修正协方差算法 .....	159
习题 .....	161
<b>第四章 随机信号的线性建模</b> .....	<b>166</b>
4.1 随机信号的自回归滑动平均建模 .....	167
4.1.1 修正 Yule-Walker 方程法 .....	167
4.1.2 最小二乘的修正 Yule-Walker 方程法 .....	170
4.2 随机信号的自回归建模 .....	171
4.2.1 AR 建模的 Yule-Walker 法 .....	171
4.2.2 AR 建模的协方差法 .....	172
4.2.3 AR 建模的修正协方差法 .....	173
4.2.4 AR 建模的格型参数方法 .....	173
4.3 随机过程的滑动平均建模 .....	175
4.3.1 谱因子分解法 .....	175
4.3.2 MA 建模的 Durbin 法 .....	177
4.4 应用实例 .....	178
4.4.1 范例 1: 功率谱估计 .....	178
4.4.2 范例 2: 约束格型滤波器用于估计信号频率 .....	181
4.5 小结 .....	183
习题 .....	184
<b>第五章 功率谱估计</b> .....	<b>186</b>
5.1 引言 .....	186
5.2 经典谱估计方法 .....	187
5.2.1 周期图法和修正周期图法 .....	187
5.2.2 平均周期图的 Bartlett 法和 Welch 法 .....	202
5.2.3 平滑周期图的 Blackman-Turkey 法 .....	208
5.3 功率谱估计的参数模型方法 .....	211
5.3.1 AR 模型谱估计 .....	212
5.3.2 MA 模型谱估计 .....	218
5.3.3 ARMA 模型谱估计 .....	220
5.4 最小方差谱估计 .....	220
5.5 最大熵谱估计方法 .....	226
5.6 频率估计 .....	232



5.6.1	自相关阵的特征分解	232
5.6.2	Pisarenko 谐波分解	238
5.6.3	MUSIC 方法	242
5.6.4	其他的特征矢量分析方法	243
5.6.5	ESPRIT 方法	246
	习题	249
<b>第六章</b>	<b>维纳滤波与卡尔曼滤波</b>	<b>253</b>
6.1	引言	253
6.2	FIR 维纳滤波器——信号的线性最小均方估计	254
6.2.1	FIR 维纳滤波问题	256
6.2.2	FIR 维纳线性预测问题	258
6.2.3	基于维纳滤波器的噪声抑制	263
6.2.4	FIR 维纳反卷积:MMSE 均衡器	265
6.2.5	FIR 维纳滤波器的格型表示	268
6.3	IIR 维纳滤波	269
6.3.1	非因果 IIR 维纳滤波	269
6.3.2	非因果 IIR 维纳反卷积	272
6.3.3	因果 IIR 维纳滤波器的设计	274
6.3.4	因果 IIR 维纳滤波应用	277
6.3.5	因果 IIR 维纳线性预测应用	279
6.4	离散卡尔曼滤波器	283
6.5	小结	290
	习题	291
<b>第七章</b>	<b>自适应滤波器</b>	<b>295</b>
7.1	引言	295
7.2	FIR 自适应滤波的 LMS 类算法	298
7.2.1	自适应滤波的最陡下降法	300
7.2.2	基本的 LMS 算法	304
7.2.3	LMS 算法的收敛性分析	305
7.2.4	归一化 LMS 算法	312
7.2.5	LMS-Newton 算法	314
7.2.6	变换域 LMS 算法	315
7.2.7	仿射投影算法	316
7.2.8	其他 LMS 类自适应滤波算法	317
7.2.9	应用实例 1:自适应噪声抑制	321

7.2.10 应用实例 2:自适应信道均衡	324
7.2.11 梯度自适应格型滤波器	327
7.2.12 自适应联合过程估计子	330
7.3 IIR 自适应滤波器	331
7.4 FIR 自适应滤波的递归最小二乘算法	337
7.4.1 指数加权和增长窗口 RLS 算法	338
7.4.2 滑动窗 RLS 算法	343
7.4.3 卡尔曼滤波类 RLS 算法	345
7.4.4 基于 QR 分解的改进 RLS 算法用于阵列处理	347
7.5 小结	352
习题	353
<b>第八章 多速率数字信号处理和滤波器组</b>	<b>359</b>
8.1 数字信号的采样率变换	359
8.1.1 $M$ 倍降采样	360
8.1.2 $L$ 倍升采样	364
8.1.3 分数 $L/M$ 倍采样率变换	368
8.2 多速率处理模块的级联等效形式	369
8.3 抽取器和插值器的多级实现	370
8.4 多相分解结构	373
8.4.1 一般离散序列的多相分解	373
8.4.2 基于多相分解的 FIR 滤波器实现结构	374
8.4.3 升采样器和降采样器的高效实现结构	375
8.4.4 一个常用的恒等结构	377
8.5 数字滤波器组基础	378
8.5.1 数字滤波器组的基本概念	378
8.5.2 简单的最大均匀抽取 DFT 滤波器组	379
8.5.3 均匀滤波器组的多相分解	381
8.5.4 多子带滤波器	383
8.6 两通道滤波器组	386
8.6.1 两通道滤波器组的基本模块	386
8.6.2 无混叠条件	390
8.6.3 滤波器组的精确重建和近似精确重建特性	390
8.6.4 三种 FIR 滤波器组及其设计方法	396
8.6.5 两通道 IIR 滤波器组及其设计方法	412
8.7 多通道( $M$ -通道)滤波器组	416

8.7.1	用两通道滤波器组作为基本模块的树结构滤波器组	416
8.7.2	余弦调制滤波器组	419
8.7.3	修正 DFT(MDFT)滤波器组	428
8.8	多分辨滤波器组	434
8.9	小结	438
	习题	438
<b>第九章</b>	<b>信号的时频分析</b>	<b>443</b>
9.1	引言	443
9.2	连续时间短时傅里叶变换	444
9.3	离散时间的短时傅里叶变换	448
9.3.1	离散时间 STFT 定义	448
9.3.2	离散时间 STFT 的性质	449
9.3.3	STFT 的滤波器解释	450
9.3.4	谱图	451
9.3.5	频域的离散化——离散 STFT	452
9.3.6	离散 STFT 的反变换	452
9.3.7	离散 STFT 的滤波器组实现	453
9.3.8	窗函数的选择	454
9.3.9	应用实例:基于 STFT 的频谱相减用于语音增强	456
9.4	Wigner-Ville 分布	456
9.4.1	WVD 的定义	457
9.4.2	WVD 分布的一般性质	463
9.4.3	多个信号之和的 WVD 分布	466
9.4.4	平滑的 WVD 分布:与 STFT 谱图的关系	468
9.4.5	解析信号的 WVD 分布	472
9.4.6	离散 WVD 分布	475
9.5	其他类型的时频分布	477
9.5.1	模糊度函数	477
9.5.2	Cohen 类时频分布	483
9.5.3	Cohen 类时频分布的几个典型例子	485
	习题	491
<b>第十章</b>	<b>盲信号处理</b>	<b>495</b>
10.1	引言	495
10.2	基本的盲信号分离方法	497
10.2.1	盲信号分离问题的基本描述和模型	497

---

10.2.2	盲源分离的代价函数和基本的盲源分离算法	500
10.3	基于非高斯性测度的快速不动点盲源抽取算法	510
10.3.1	非高斯性与独立性	511
10.3.2	非高斯性的度量准则	512
10.3.3	盲信号抽取的不动点算法	515
10.4	噪声环境下盲源分离算法的改进	520
10.4.1	含噪声观测数据的拟白化	521
10.4.2	基于信息论的 ICA 算法的噪声偏差消除方法	521
10.4.3	有噪时基于峭度的盲抽取算法	524
10.4.4	高斯矩	524
10.4.5	基于高斯矩的噪声 ICA 不动点算法	526
10.5	基于二阶循环平稳特性的盲估计与盲均衡方法	527
10.5.1	基于二阶循环平稳统计量的信道盲估计与盲均衡原理	527
10.5.2	基于二阶统计量的信道盲辨识和盲均衡的典型方法概述	534
10.5.3	基于子空间分析的信道盲辨识和盲均衡算法	535
10.5.4	基于线性预测的信道盲辨识和盲均衡算法	541
10.6	基于二阶统计量的 MIMO 信道盲估计与盲均衡——子空间法	545
10.6.1	MIMO 信道模型	546
10.6.2	MIMO 系统的盲可辨识条件	547
10.6.3	MIMO 信道盲估计的子空间法	548
10.7	基于二阶统计量的 MIMO 信道盲估计与盲均衡——线性预测法	552
10.7.1	问题描述	552
10.7.2	MIMO 信道盲估计的线性预测法	553
10.7.3	MIMO 信道盲估计外积分解法	555
10.7.4	MIMO 信道盲估计的多步线性预测法(MLSP)	558
	参考文献	561
	附录 标量代价函数对矢量和矩阵的微分	571

# 第一章 离散时间信号处理基础

本章简要介绍离散时间信号处理的一些基本内容和重要概念,主要包括离散时间信号的表示、变换和滤波等,如离散信号的 $z$ 变换、离散时间傅里叶变换(DTFT)、数字滤波器、离散傅里叶变换(DFT)等。

## 1.1 离散时间信号

一个离散时间信号可以看作是一个带索引的数据序列,所以可表示为索引变量 $n$ 的函数形式,即 $x(n)$ 。 $x(n)$ 的值可取实数或复数。虽然 $n$ 并不一定代表“时间”,也可以是空间坐标或距离等,但一般还是称 $x(n)$ 为离散时间信号。注意, $x(n)$ 在 $n$ 的非整数处没有定义,其典型波形如图1.1所示。 $x(n)$ 可以是确定性序列,也可以是随机序列,本章只讨论确定性序列,第二章介绍随机序列。

离散时间信号可以通过对连续时间信号采样而获得,一般需要A/D变换器。若对连续时间信号 $x_a(t)$ 以 $f_s=1/T_s$ 的速率进行采样( $T_s$ 为采样周期),则所得的离散时间信号为

$$x(n) = x_a(nT_s)$$

但并非所有的离散数据信号都是由连续信号采样而来的,有些就是自然产生的离散序列,如每天的股票价格、定期的医疗记录数据、数字计算机内产生的各种序列等。

虽然大多数的实际离散时间信号都是信息的载体,是时间 $n$ 的复杂函数,但一些简单的基本离散时间信号也很重要,它们常常是表示和描述复杂信号的基本单元。下面介绍单位采样信号、单位阶跃序列和复指数序列这三种基本的离散时间信号。

### 1) 单位采样信号 $\delta(n)$

定义为

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

它与连续时间信号处理中的单位冲激信号 $\delta(t)$ 的作用相同。任意的信号 $x(n)$ 可

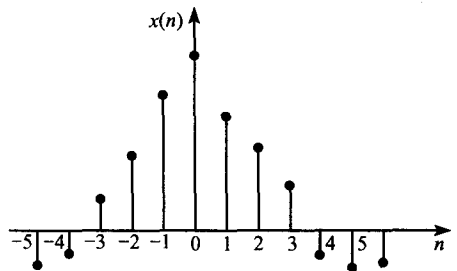


图 1.1 离散时间信号的典型波形

分解为  $\delta(n)$  的移位加权之和, 即

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

### 2) 单位阶跃序列 $u(n)$

定义为

$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

它与单位采样  $\delta(n)$  的关系为<sup>[1,2]</sup>

$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^n \delta(k) \quad \text{或} \quad u(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k)$$

若序列  $y(n) = x(n)u(n)$ , 那么  $y(n)$  的自变量  $n$  的取值就限定在  $n \geq 0$  的右半轴上。

### 3) 复指数序列

它是周期信号, 定义为

$$x(n) = e^{jn\omega_0} = \cos(n\omega_0) + j\sin(n\omega_0)$$

其中  $\omega_0$  是常数频率。复指数序列在离散信号的傅里叶变换中起重要作用。

离散时间信号可以分成有限长度序列和无限长度序列, 前者是指信号只在  $n$  的有限区间  $[N_1, N_2]$  内取非零值, 而区间之外的信号值为零; 后者是指信号的有效长度为无限, 如前面定义的单位阶跃和复指数序列等。对单位阶跃, 由于  $n < 0$  时其值为零, 因此它又属于右边序列, 实际中将  $n < n_0$  ( $n_0$  为某一整数) 时其值为零的无限长序列就定义为右边序列。类似地, 若无限长序列  $x(n)$  在  $n > n_0$  时  $x(n) = 0$ , 则  $x(n)$  定义为左边序列。例如, 时间反转并延迟  $n_0$  的单位阶跃序列

$$x(n) = u(n_0 - n) = \begin{cases} 1, & n \leq n_0 \\ 0, & n > n_0 \end{cases}$$

它就是左边序列。既不是左边序列又不是右边序列的无限长序列被称为双边序列, 如复指数序列。

## 1.2 离散时间系统

离散时间系统是将输入离散信号变换为输出离散信号的系统, 可看作是一个数学算子或映射, 具有相应的规则或函数功能。

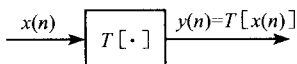


图 1.2 离散时间系统看作是将  $x(n)$  映射为  $y(n)$  的变换  $T[\cdot]$

设用  $T[\cdot]$  表示离散时间系统, 则图 1.2 就表示输入信号通过  $T[\cdot]$  被变换为输出信号  $y(n)$ 。输入、输出之间关系的描述可以有很多种方式。例如, 可用数学函数的形式

$$y(n) = x^2(n) \quad \text{或} \quad y(n) = 0.5y(n-1) + x(n)$$

也可以用一个算法来描述离散系统,它给出针对输入信号值的一系列运算或指令,例如

$$y_1(n) = 0.5y_1(n-1) + 0.25x(n)$$

$$y_2(n) = 0.25y_2(n-1) + 0.5x(n)$$

$$y_3(n) = 0.4y_3(n-1) + 0.5x(n)$$

$$y(n) = y_1(n) + y_2(n) + y_3(n)$$

这些运算所定义的是一个三阶递归数字滤波器的并联实现形式。有时为方便地描述系统,还可直接定义出所有可能的输入、输出数值对之间的映射表。

离散时间系统经常根据系统所具有的特性来分类,如线性、移不变性、因果性、稳定性和可逆性等。下面逐个介绍。

### 1) 线性和移不变性

这是对简化系统的分析和设计而言最重要的两个特性。若对两个输入信号  $x_1(n)$  和  $x_2(n)$ , 系统  $T[\cdot]$  满足

$$T[ax_1(n) + bx_2(n)] = aT[x_1(n)] + bT[x_2(n)]$$

其中  $a, b$  为任意常数,则称系统  $T[\cdot]$  是线性的。显然,对线性系统,两个信号之和的输出响应等于各自信号输出响应之和。这个性质很重要,尤其是因为输入  $x(n)$  可分解为单位采样  $\delta(n)$  的移位加权之和形式

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

所以系统输出为

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)T[\delta(n-k)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h_k(n) \quad (1.1)$$

其中  $h_k(n) = T[\delta(n-k)]$  是系统对延迟的单位采样  $\delta(n-k)$  的响应。上式称为叠加求和,它表明若  $h_k(n)$  已知,则系统就被完全确定。

第二个重要性质是移不变性。若系统输入由  $x(n)$  变为  $x(n-n_0)$ , 则系统输出就由  $y(n)$  变为  $y(n-n_0)$ 。移不变性意味着系统的特性不随时间而变化。

若系统具有线性和移不变两个特性,则称其为**线性移不变(LSI)系统**,这时若对单位采样  $\delta(n)$  的响应是  $h(n) = T[\delta(n)]$ , 则对  $\delta(n-k)$  的响应是  $h(n-k)$ , 故式(1.1)变为

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \quad (1.2)$$

它是  $x(n)$  与  $h(n)$  的卷积,常表达为

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

由于将  $h(n)$  与  $x(n)$  卷积就得到系统的输出,所以  $h(n)$  可以唯一地确定 LSI 系统,

常称其为单位采样响应(unit sample response)。

### 2) 因果性

若系统在  $n_0$  时刻的响应仅依赖于  $n \leq n_0$  时刻的输入, 则称其为因果系统。在因果系统中, 输出的变化不会先于输入的变化。例如,  $y(n) = x(n) + x(n-1)$  是因果系统, 它在  $n_0$  时刻的输出值只取决于输入  $x(n)$  在  $n_0$  和  $n_0 - 1$  时刻的值。而  $y(n) = x(n) + x(n+1)$  就是非因果的, 因为  $y(n_0)$  的值还与  $n_0 + 1$  时刻的输入有关。对线性移不变系统, 它是因果系统的充要条件是当  $n < 0$  时  $h(n) = 0$ 。

因果性对系统的实际应用具有重要的意义, 一般来说, 系统具有因果性或有限延迟因果性时, 才是物理可实现的。

### 3) 稳定性

若系统的输入  $x(n)$  的幅度是有界的, 其输出  $y(n)$  的幅度也是有界的, 则称系统在限入限出(bounded-input bounded-output, BIBO)的意义上是稳定的, 该系统被称为 BIBO 稳定<sup>[3,4]</sup>, 它表明若  $|x(n)| \leq A < \infty$ , 则  $|y(n)| \leq B < \infty$ 。对系统是线性移不变的情况, 系统稳定的条件是其单位采样响应  $h(n)$  是绝对可和的, 即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty \quad (1.3)$$

例如, 若 LSI 系统的  $h(n) = a^n u(n)$ ,  $|a| < 1$ , 则系统是稳定的。

### 4) 可逆性

在信道均衡和反卷积等信号处理应用中, 系统的可逆性很重要。若系统的输入可由所观测到的系统输出唯一地确定, 则称系统是可逆的。为使系统是可逆的, 必须保证系统对不同的输入产生不同的输出, 即给定两个输入  $x_1(n)$  和  $x_2(n)$ , 且  $x_1(n) \neq x_2(n)$ , 则一定有  $y_1(n) \neq y_2(n)$ 。例如, 对如下定义的系统:

$$y(n) = x(n)g(n)$$

当且仅当对所有的  $n$  满足  $g(n) \neq 0$ , 则系统是可逆的。因为  $g(n)$  满足该条件时, 给定  $y(n)$ , 就可由  $x(n) = y(n)/g(n)$  来重构  $x(n)$ 。

## 1.3 LSI 滤波器的时域描述

一类重要的 LSI 离散系统是线性常系数差分方程(LCCDE)所描述的线性滤波系统, 即

$$y(n) + \sum_{k=1}^p a(k)y(n-k) = \sum_{k=0}^q b(k)x(n-k) \quad (1.4)$$

式中  $p$  和  $q$  是决定滤波器阶数的整数,  $a(k)$  和  $b(k)$  是滤波器系数。差分方程经常写成如下形式:

$$y(n) = \sum_{k=0}^q b(k)x(n-k) - \sum_{k=1}^p a(k)y(n-k) \quad (1.5)$$



它清楚地表达了输出  $y(n)$  是过去的输出值  $y(n-k)$  ( $k=1, 2, \dots, p$ ) 和过去与当前的输入值  $x(n-k)$  ( $k=0, 1, \dots, q$ ) 的加权线性组合。对  $p=0$  的特例, 差分方程变成

$$y(n) = \sum_{k=0}^q b(k)x(n-k) \quad (1.6)$$

即输出是当前与过去的输入值的加权组合, 这时其单位采样响应是有限长度的, 为

$$h(n) = \sum_{k=0}^q b(k)\delta(n-k)$$

系统被称为 **FIR 滤波器**, 即有限长度脉冲响应滤波器。但若  $p \neq 0$ , 则系统的单位采样响应一般是无限长度的, 称为 **IIR 系统**, 即无限长度脉冲响应系统。例如, 对于系统

$$y(n) = ay(n-1) + x(n)$$

其单位采样响应为  $h(n) = a^n u(n)$ , 所以它是 IIR 系统。

## 1.4 离散时间傅里叶变换

频域分析是离散时间信号和系统的重要分析及设计方法, 它经常能揭示出所求解问题的内在本质。在离散时间信号的频域分析中, 最重要的内容就是离散时间傅里叶变换(DTFT)。信号  $x(n)$  的 DTFT 是连续频率变量  $\omega$  的复值函数, 定义为

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jn\omega} \quad (1.7)$$

但为了使信号的 DTFT 的定义是有效的, 上式的求和必须收敛, 该求和项均匀地收敛到  $\omega$  的连续函数的充分条件是  $x(n)$  绝对可和, 即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty \quad (1.8)$$

虽然绝大多数实际的信号都有其 DTFT, 但单位阶跃  $u(n)$  和复指数序列这两种基本信号却都不是绝对可和的, 都没有其 DTFT。可是若允许 DTFT 包括  $\delta$  冲激函数, 则复指数序列的 DTFT 是

$$x(n) = e^{jn\omega_0} \leftrightarrow X(e^{j\omega}) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0), \quad |\omega| < \pi$$

其中  $\delta(\omega - \omega_0)$  表示  $\omega = \omega_0$  频率处的冲激脉冲。类似地, 单位阶跃序列的 DTFT 应为

$$u(n) \leftrightarrow U(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \pi\delta(\omega), \quad |\omega| < \pi$$

序列的 DTFT 具有一些特殊性质。例如, 由于  $e^{-jn\omega}$  是  $\omega$  的周期  $2\pi$  函数, 所以  $X(e^{j\omega})$  也是  $\omega$  的周期  $2\pi$  函数。另外, 若  $x(n)$  是实值序列, 则  $X(e^{j\omega})$  是共轭对称,