高等教育“十一五”规划教材

公共课教材系列

经济数学基础

宋劲松 ◎ 主　编
魏　嵬　杨惠波　刘　江 ◎ 副主编

科学出版社
www.sciencep.com

高等教育“十一五”规划教材

公共课教材系列

经济数学基础

宋劲松　主　编
魏　嵬　杨惠波　刘　江　副主编
段志霞　郑　浩　程钟卉　参　编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

经济数学是高职高专财经、管理等相关专业的基础课程.本书主要包括微积分、线性代数、概率论与数理统计和数学软件的应用4个部分.

本书在编写上,根据当前高职学生基础差异大,学生分化严重的特点,着眼于未来国民的素质.坚持以“必须、够用”为原则,淡化了理论推导及其繁琐的证明,增加了与生活相关的实际经济问题,突出了职业教育的特色.增加了内容的实用性、生动性、趣味性,更适合于现在的高职学生.编排体例形式新颖,为学生的学习提供了更加广阔的空间.

本书可作为高职高专经济类各专业通用经济数学课程教材,也可作为经济管理人员更新知识的自学用书.

图书在版编目(CIP)数据

经济数学基础/宋劲松主编.—北京:科学出版社,2007
(高等教育“十一五”规划教材·公共课教材系列)
ISBN 978-7-03-019509-8

Ⅰ.经… Ⅱ.宋… Ⅲ.经济数学-高等学校-教材 Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第117606号

责任编辑:王 彦 / 责任校对:刘彦妮
责任印制:吕春珉 / 封面设计:耕者设计工作室

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com

铭浩彩色印装有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2007年8月第一版 开本:787×1092 1/16
2007年8月第一次印刷 印张:19
印数:1—3 000 字数:434 000

定价:26.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈路通〉)
销售部电话 010-62136131 编辑部电话 010-62147541(VP04)

前　言

由于数学教材既要体现基础性，更要体现实用性，因此在教材理论的安排、知识的选取及结构的处理上，都存在着较大的难度.为使教材的内容更加符合高职高专经济类专业学生的接受能力和知识需求，本教材在编写过程中致力于“理论上够用，知识上服务，结构上合理”的指导思想.就是在理论的编写上，力求语言的通俗，深入浅出的阐述数学的基本原理，淡化繁琐的理论及证明，突出表现解决问题的基本思路和基本步骤；在知识的安排上，增加了相当数量的经济方面的实际问题，着力体现数学在专业上的应用，根据专业需求的特点，致力于为专业服务，为学生学好专业课打好基础，加强学生对应用数学的意识和兴趣的培养；在知识的结构上，力求将数学的思想和方法融入到经济生活中，体现学习经济数学的终极目标是解决实际生活中的经济问题，更好地为国家的经济建设服务.

为使学生更便捷地应用数学知识去解决问题，教材中特意安排了数学软件的应用，可供有条件的院校选用.

每章开篇都有本章学习目标，使学生在学习之前先明确方向.另外每章除习题外，最后还安排了内容小结及复习题，可供学生对自己的学习效果进行自查.

参加本教材编写的人员有廊坊职业技术学院的宋劲松，北京首钢工学院的魏嵬，石家庄铁路职业技术学院的杨惠波，江苏联合职业技术学院淮安生物工程分院的刘江，济源职业技术学院的段志霞，廊坊职业技术学院的郑浩、程钟卉.其中第 1 章由程钟卉、段志霞编写，第 2 章和第 9 章由魏嵬编写，第 3 章由段志霞编写，第 4 章由刘江编写，第 5 章由郑浩编写，第 6 章由杨惠波、程钟卉编写，第 7 章由宋劲松、郑浩编写，第 8 章由宋劲松编写.宋劲松负责全书的统稿工作.

鉴于编者的水平和经验，对于书中的不当之处，敬请广大读者批评指正，以便对教材及时进行修正完善(电子邮箱:tfsecre@sohu.com).

目　录

第二篇 线性代数

第三篇 概率论与数理统计

第四篇 数学软件的应用

附 录

第一篇 微 积 分

微积分学简介

微积分学是微分学和积分学的总称.

由于函数概念的产生和运用的加深,也由于科学技术发展的需要,一门新的数学分支产生了,这就是微积分学.

从微积分成为一门学科来说,是在17世纪,但是,微分和积分的思想在古代就已经产生了.公元前3世纪,古希腊的阿基米德在研究解决抛物弓形的面积、球和球冠面积、螺线下面积和旋转双曲体的体积的问题中,就隐含着近代积分学的思想.作为微分学基础的极限理论来说,早在古代已有比较清楚的论述.如我国的庄周所著的《庄子》一书的"天下篇"中,记有"一尺之棰,日取其半,万世不竭".三国时期的刘徽在他的割圆术中提到"割之弥细,所失弥小,割之又割,以至于不可割,则与圆周和体而无所失矣."这些都是朴素的,也是很典型的极限概念.

到了17世纪,有许多科学问题需要解决,这些问题也就成了促使微积分产生的因素.归结起来,大约有4种主要类型的问题:第一类是研究运动的时候直接出现的,也就是求即时速度的问题.第二类问题是求曲线的切线的问题.第三类问题是求函数的最大值和最小值问题.第四类问题是求曲线长、曲线围成的面积、曲面围成的体积、物体的重心、一个体积相当大的物体作用于另一物体上的引力.

17世纪的许多著名的数学家、天文学家、物理学家都为解决上述几类问题做了大量的研究工作,如法国的费尔马、笛卡儿、罗伯瓦、笛沙格;英国的巴罗、瓦里士;德国的开普勒;意大利的卡瓦列利等人都提出许多很有建树的理论,为微积分的创立做出了贡献.

17世纪下半叶,在前人工作的基础上,英国大科学家牛顿和德国数学家莱布尼茨分别在自己的国度里独自研究和完成了微积分的创立工作,虽然这只是十分初步的工作.他们的最大功绩是把两个貌似毫不相关的问题联系在一起,一个是切线问题(微分学的中心问题),一个是求积问题(积分学的中心问题).牛顿和莱布尼茨建立微积分的出发点是直观的无穷小量,因此这门学科早期也称为无穷小分析,这正是现在数学中分析学这一大分支名称的来源.牛顿研究微积分着重于从运动学来考虑,莱布尼茨却是侧重于几何学来考虑的.

微积分学的创立,极大地推动了数学的发展,过去很多初等数学束手无策的问题,运用微积分,往往迎刃而解,显示出微积分学的非凡威力.

应该指出，这是和历史上任何一项重大理论的完成都要经历一段时间一样，牛顿和莱布尼茨的工作也都是很不完善的.他们在无穷和无穷小量这个问题上，其说不一，十分含糊.牛顿的无穷小量，有时候是零，有时候不是零而是有限的小量；莱布尼茨也不能自圆其说.这些基础方面的缺陷，最终导致了第二次数学危机的产生.

直到19世纪初，法国科学学院以柯西为首的科学家，对微积分的理论进行了认真研究，建立了极限理论，后来又经过德国数学家维尔斯特拉斯进一步的严格化，使极限理论成为了微积分的坚定基础，才使微积分进一步的发展开来.

微积分是与应用联系着发展起来的，最初牛顿应用微积分学及微分方程从万有引力定律导出了开普勒行星运动三定律.此后，微积分学极大的推动了数学的发展，同时也极大的推动了天文学、力学、物理学、化学、生物学、工程学、经济学等自然科学、社会科学及应用科学各个分支的发展.并在这些学科中有着越来越广泛的应用，特别是计算机的出现更有助于这些应用的不断发展.

第1章 极限与连续

本章学习目标：

1. 理解函数的概念，了解分段函数、复合函数、初等函数的概念. 能熟练地求出函数的定义域和函数值.

2. 了解极限的概念，知道数列极限和函数极限的描述性定义，会求左右极限，熟练掌握极限的运算法则.

3. 了解无穷小量的概念、运算性质及其与无穷大量的关系.

4. 了解函数连续性的定义，会求函数的连续区间，会判断函数在某一点是否连续.

5. 熟悉常用的经济函数，会求简单的经济函数.

微积分是以函数为研究对象，以极限为研究手段，研究变量的最基础的数学理论和方法. 极限概念是研究变量在某一过程中的变化趋势时引出的，它是微积分学的重要基本概念之一，是学习微积分学的重要基础.

1.1 函　　数

在我们周围，存在着许多变化的量，如某地区的人口总量，市场上的物价等. 仔细分析，就会发现这些变化的量有一个共同的特点，就是它们的变化受其他一些量的影响和制约，如人口总量受国家政策、经济发展等多种因素的影响，市场上的物价受供求关系的影响. 这种变量之间相互制约的关系用数学的方法加以抽象和描述便得到一个重要的概念——函数.

1.1.1 函数的概念

1. 函数的概念

生活中经常会遇到两种不同的量，一种是在变化过程中保持不变的量，这种量称为常量. 如物体的重力加速度，天津到北京的直线距离等. 另一种是在变化过程中会起变化、可在一定的范围内取不同数值的量，这种量称为变量. 如温度、湿度、商品的价格、银行利率等. 变量和常量的概念是相对的，某些变量在相应的限制条件下可以看成是常量，如市场上 2006 年 10 月份的大米的价格是 3.2 元/千克，这是一个常量，但从 2006 年 10 月～2007 年元月，大米的价格是一个变量. 本书中，一般用字母 a,b,c 等表示常量，用字母 x，y,s,t 等表示变量.

引例1 某商品的市场需求量 q 与商品价格 p 之间满足关系式 $p=100-5q$，当价格 p 取某一正数时，按照关系式，需求量相应地有一个确定的数值.

引例2 2006年8月19日人民币整存整取的定期存期与年利率如表1.1.1所示.

表1.1.1

存期	3个月	6个月	1年	2年	3年	5年
利率/%	1.80	2.25	2.52	3.06	3.69	4.14

表1.1.1确定了存期与年利率两个变量之间的对应关系，因此说年利率为存期的函数.

设 D 是一非空的实数集，如果存在一个对应法则 f，使得对 D 内的每一个值 x 都有唯一的 y 值与之对应，则称这个对应法则 f 为定义在集合 D 上的一个函数，并将由对应法则 f 所确定的 x 与 y 之间的对应关系记为 $y=f(x)$，称 x 为自变量，y 为函数(或因变量)，集合 D 为函数 $f(x)$ 的定义域. 集合 $M=\{y|y=f(x),x\in D\}$ 为函数 $f(x)$ 的值域. 如 $y=2x-1$，可记为 $f(x)=2x-1$，其定义域是一切实数，用区间表示为 $(-\infty,+\infty)$. 当 $x=1$ 时，对应的函数值为 $f(1)=2\times1-1=1$.

一般地，函数 $y=f(x)$，当 x 在定义域内取得一个值 a 时，对应的函数值记作 $f(a)$.

例1.1.1 已知 $f(x)=-x^2+4$，求 $f(-2)$，$f(0)$，$f(a)$.

解：$f(-2)=-(-2)^2+4=-4+4=0$.

$f(0)=-0+4=4$.

$f(a)=-a^2+4$.

例1.1.2 求下列函数的定义域.

(1) $y=2x^4-x^3+1$ (2) $y=\dfrac{x}{x^2+2x-3}$

(3) $y=\sqrt{x^2-4}$ (4) $y=\dfrac{2}{x-2}-\sqrt{3x-5}$

解：(1) 不论 x 取何实数，函数 $y=2x^4-x^3+1$ 都有意义，所以函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

(2) 只有分母 $x^2+2x-3\neq0$ 时，函数 $y=\dfrac{x}{x^2+2x-3}$ 才有意义，所以函数的定义域为 $(-\infty,-3)\cup(-3,1)\cup(1,+\infty)$.

(3) 只有 $x^2-4\geqslant0$ 时，函数 $y=\sqrt{x^2-4}$ 才有意义，所以函数的定义域为 $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$.

(4) 只有 $x-2\neq0$ 且 $3x-5\geqslant0$ 同时成立，函数 $y=\dfrac{2}{x-2}-\sqrt{3x-5}$ 才有意义，所以函数的定义域为 $\left[\dfrac{5}{3},2\right)\cup(2,+\infty)$.

如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，则称这两个函数相等. 如函数 $y=x$ 和 $y=\sqrt[3]{x^3}$，由于它们的定义域和对应关系都分别相同，所以它们是相同的函数. 而函数 $y=x$ 和 $y=\sqrt{x^2}$，因为 $y=\sqrt{x^2}=|x|$ 与 $y=x$ 的对应关系是不同的，所以它们是不相同

的两个函数.

2. 函数的表示方法

函数有解析法(公式法)、图示法和列表法 3 种不同的表示方法. 在这 3 种表示方法中,解析法是对函数的精确描述,它便于对函数进行理论分析和研究;图示法是对函数的直观描述,通过图形可以清楚地看到函数的一些性质;列表法常常是在实际应用问题中使用的描述方法. 其中解析法是最常用的表示方法,但在许多问题中,变量之间的关系很难用一个确定的解析式来表示.

例 1.1.3 设某市内公用电话通话时间 3 分钟内收费 0.5 元,3 分钟后,每分钟加收 0.15 元. 试列出电话费与通话时间的函数关系.

解:用 y 来表示电话费,用 x 来表示通话时间. 由题意知

$$y=\begin{cases}0.5 & 0<x\leqslant 3\\ 0.5+(x-3)\times 0.15 & x>3\end{cases}$$

像这样,在自变量变化的不同区域内有不同表达式的函数称为分段函数. 在实际问题中分段函数有着广泛的应用. 应该注意的是分段函数是由几个关系式合起来表示一个函数,而不是几个函数,对于自变量 x 在定义域内的某个值,分段函数 y 只能确定唯一的值,它的定义域是各段自变量取值集合的并集.

1.1.2 函数的几种特性

1. 函数的单调性

对于给定区间上的函数 $y=f(x)$,若对于属于该区间的任意两个自变量的值 x_1,x_2,当 $x_1<x_2$ 时,都有 $f(x_1)<f(x_2)$成立,则称函数 $y=f(x)$在这个区间上是单调增加函数,简称增函数. 当 $x_1<x_2$ 时,都有 $f(x_1)>f(x_2)$成立,则称函数 $y=f(x)$在这个区间上是单调减少函数,简称减函数. 如函数 $y=x^2$ 在$(0,+\infty)$上是单调增加函数,在$(-\infty,0)$上是单调减少函数.

例 1.1.4 证明函数 $f(x)=2x-3$ 在$(-\infty,+\infty)$上是增函数.

证明:设 x_1,x_2 是$(-\infty,+\infty)$上任意两点,且 $x_1<x_2$,则有 $x_1-x_2<0$.

因为 $f(x_1)-f(x_2)=(2x_1-3)-(2x_2-3)=2(x_1-x_2)<0$,

所以 $f(x_1)<f(x_2)$,

即 $f(x)=2x-3$ 在$(-\infty,+\infty)$上是增函数.

在某个区间上单调增加或单调减少的函数,称为这个区间上的单调函数. 这个区间称为单调区间. 如函数 $y=x^2$ 在$(-\infty,0)$上是单调减函数,所以$(-\infty,0)$是 $y=x^2$ 的单调减区间;函数 $y=\mathrm{e}^x$ 在$(-\infty,+\infty)$上是单调增函数,所以$(-\infty,+\infty)$是 $y=\mathrm{e}^x$ 的单调增区间.

2. 函数的奇偶性

设函数 $y=f(x)$的定义域 D 关于原点对称,若对于 D 中任意的 x,都满足 $f(-x)=f(x)$,则称函数 $y=f(x)$为 D 上的偶函数. 若对于 D 中任意的 x,都满足 $f(-x)=$

$-f(x)$，则称函数 $y=f(x)$ 为 D 上的奇函数.

奇函数和偶函数的图像都具有对称性，偶函数的图像关于 y 轴对称，奇函数的图像关于原点对称. 但一定要注意只有当函数 $y=f(x)$ 的定义域关于原点对称时，才有可能讨论它的奇偶性.

例 1.1.5 判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=2x^2-3$　　(2) $f(x)=-x^3+1$　　(3) $f(x)=2x+\dfrac{1}{x}$

解：(1) 函数 $f(x)=2x^2-3$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，关于原点对称.

并且 $f(-x)=2(-x)^2-3=2x^2-3=f(x)$，所以函数 $f(x)=2x^2-3$ 是偶函数.

(2) 函数 $f(x)=-x^3+1$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，关于原点对称.

并且 $f(-x)=-(-x)^3+1=x^3+1$，由于 $f(-x)\neq f(x)$，又 $f(-x)\neq -f(x)$，所以函数 $f(x)=-x^3+1$ 既不是奇函数也不是偶函数.

(3) 函数 $f(x)=2x+\dfrac{1}{x}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，关于原点对称.

并且 $f(-x)=2(-x)+\dfrac{1}{-x}=-\left(2x+\dfrac{1}{x}\right)=-f(x)$，所以函数 $f(x)=2x+\dfrac{1}{x}$ 是奇函数.

3. 函数的有界性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，如果存在正数 M，使得对于 D 中的任意 x，都有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称函数 $y=f(x)$ 为有界函数. 如函数 $y=\sin x$ 就是 $M=1$ 的有界函数. 正数 M 称为有界函数 $y=f(x)$ 的界. 从函数图像上看，有界函数的图像在两条平行于 x 轴的直线 $y=M$ 及 $y=-M$ 所确定的带形区域内.

4. 函数的周期性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个常数 $T\neq 0$，使得对于任意的 $x\in D$，都有 $x\pm T\in D$，且 $f(x+T)=f(x)$ 成立，那么称 T 为函数 $f(x)$ 的一个周期，称函数 $y=f(x)$ 为周期函数. 如正弦函数 $y=\sin x$ 就是一个以 2π 为周期的周期函数.

在周期函数中，若 T 是 $f(x)$ 的一个周期，则 $2T,-2T,3T,-3T,\cdots$ 也是 $f(x)$ 的周期. 如果在所有的正周期中，存在一个最小的周期，那么把它称为函数 $f(x)$ 的最小正周期，简称为周期. 今后在讨论周期函数的周期时只讨论它的最小正周期.

1.1.3 反函数

设某种商品的单价为 p，销售量为 x，则收入 y 是 x 的函数 $y=xp$. 反之，若已知收入 y，则销售量 x 又是 y 的函数 $x=\dfrac{y}{p}$. 上述两个式子是同一关系的两种写法，但从函数的定义来看，由于对应法则不同，因此是两个不同的函数.

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 M，如果对值域 M 中的任意一个值 y，都能由 $y=f(x)$ 确定 D 中唯一的值 x 与它对应，由此得到以 y 为自变量的函数称为 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$，$y\in M$. 习惯上，自变量用 x 表示，函数用 y 表示，所以将它改写

为 $y=f^{-1}(x), x\in M$. 函数 $y=f(x)$的定义域和值域分别为其反函数 $y=f^{-1}(x)$的值域和定义域.

1.1.4 初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称基本初等函数.

如果 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，且 $u=\varphi(x)$的值域包含在 $y=f(u)$的定义域内，那么 y(通过 u 的关系)也是 x 的函数，这样的函数为 $y=f(u)$与$u=\varphi(x)$复合而成，称为复合函数，记为 $y=f[\varphi(x)]$. 其中 u 称为中间变量. 复合函数的概念可以推广到多个中间变量的情形. 如 $y=e^{\tan x^2}$是由 $y=e^u, u=\tan v, v=x^2$ 复合而成.

例 1.1.6 指出下列函数的复合过程.

(1) $y=e^{\ln x}$ (2) $y=(\arctan\sqrt{x})^2$

解：(1) $y=e^{\ln x}$由 $y=e^u, u=\ln x$ 复合而成.

(2) $y=(\arctan\sqrt{x})^2$ 由 $y=u^2, u=\arctan v, v=\sqrt{x}$ 复合而成.

并不是任意两个函数都能构成复合函数. 如 $y=\arcsin u$ 与 $u=|x|+2$ 便不能复合成一个函数，因为 u 的值域为$[2,+\infty)$，不包含在 $y=\arcsin u$ 的定义域$[-1,1]$内，因而不能复合.

由基本初等函数和常数经过有限次的四则运算或有限次复合构成的，并能用一个解析式表示的函数称为初等函数. 如 $y=\left(e^{\frac{1}{2}x}\right)\tan x, y=\dfrac{\ln 4x+3}{\arctan x}$等都是初等函数.

习 题 1.1

1. 选择题.

(1) 函数 $y=\sqrt{1-x^2}-\sqrt{x^2-1}$的定义域是( ).

A. $[-1,1]$ B. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ C. $[0,1]$ D. $\{-1,1\}$

(2) 函数 $f(x)$的定义域是$[a,b]$，其中 $0<-a<b$，则函数 $F(x)=f(x)+f(-x)$的定义域是( ).

A. $[-b,a]$ B. $[a,-a]$ C. $[-b,b]$ D. $[-b,a]$

2. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{\sqrt{x^2-3x+2}}{|x|-x}$ (2) $y=\dfrac{(x-1)^0}{\sqrt{-x^2+5x+6}}$

3. 已知函数 $y=f(x)$的定义域是$[0,4]$，求 $y=f(x+1)+f(x^2-3x)$的定义域.

4. 下列函数可以看成由哪些基本初等函数复合而成？

(1) $y=e^{\sin x}$ (2) $y=\sin x^2$ (3) $y=\arccos\sqrt{x-1}$ (4) $y=\lg(\arccos x^3)$

1.2 极　　限

1.2.1 极限的概念

1. 数列的极限

数列是按一定规律排列的一串数

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$$

简记作$\{a_n\}$. 数列也可看作是定义在正整数集合上的函数 $a_n=f(n)(n=1,2,\cdots)$，a_n 称为数列的通项.

给定一个数列$\{a_n\}$，如果当 n 无限增大时，a_n 无限地趋近于某个固定的常数 A，则称当 n 趋于无穷时数列$\{a_n\}$以 A 为极限. 记作$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$ 或 $a_n\to A(n\to\infty)$.

例 1.2.1　观察数列 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots$，并判断这个数列的极限是否存在?

解：数列的通项为 $a_n=\frac{1}{2^n}$. 当 n 无限增大时，2^n 也无限增大，而$\frac{1}{2^n}$则无限地趋近于 0，所以数列的极限为 0.

例 1.2.2　观察数列 $1,-1,1,-1,\cdots$，并判断这个数列的极限是否存在?

解：数列的通项 $a_n=(-1)^{n+1}$. 当 n 无限增大时，a_n 总在 1 和 -1 两个数值上跳跃，永远不会趋于一个固定的数，所以数列的极限不存在.

例 1.2.3　观察数列 $1,2,3,4,\cdots,n,\cdots$，并判断这个数列的极限是否存在?

解：数列的通项为 $a_n=n$. 当 n 无限增大时，a_n 将随着 n 的无限增大而无限增大，所以数列的极限不存在.

如果数列$\{a_n\}$的极限为 A，也称数列$\{a_n\}$收敛于 A. 如例 1. 如果数列$\{a_n\}$没有极限，就称数列$\{a_n\}$是发散的. 如例 1.2.2 和例 1.2.3.

2. 函数的极限

根据自变量 x 的变化过程，函数的极限分两种情况：一是当自变量 x 绝对值无限增大(记作 $x\to\infty$)时，函数 $f(x)$的变化趋势；二是当自变量 x 趋向于 x_0(记作 $x\to x_0$)时，函数 $f(x)$的变化趋势.

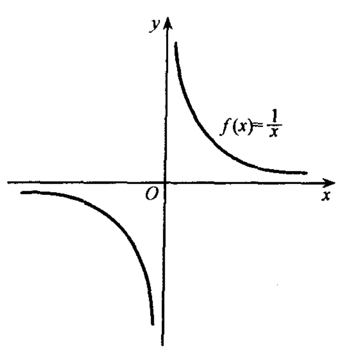

图 1.2.1

如果当 x 的绝对值无限增大时，函数 $f(x)$无限接近于一个确定的常数 A，那么就称 A 为函数 $f(x)$当 $x\to\infty$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{n\to-\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A$ $(x\to\infty)$.

例 1.2.4　讨论函数 $f(x)=\frac{1}{x}$当 $x\to\infty$时的极限.

解：如图 1.2.1 所示，当 x 的绝对值无限增大，即 $x\to\infty$(包括 $x\to+\infty$及 $x\to-\infty$两种情形)时，$f(x)=$

$\frac{1}{x}$无限接近于常数 0，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x}=0$.

“$x\to\infty$”是指 $x\to+\infty$和 $x\to-\infty$两种情形，有时只需讨论 $x\to+\infty$(或 $x\to-\infty$)时函数的变化趋势，为此有

如果当 $x\to+\infty$时，函数 $f(x)$无限接近于一个确定的常数 A，那么就称 A 为函数 $f(x)$当 $x\to+\infty$时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to+\infty)$.

如果当 $x\to-\infty$时，函数 $f(x)$无限接近于一个确定的常数 A，那么就称 A 为函数 $f(x)$当 $x\to-\infty$时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to-\infty)$.

例 1.2.5 考查函数 $f(x)=e^x$ 与 $g(x)=e^{-x}$当 $x\to+\infty$时的极限.

解：如图 1.2.2 所示，当 $x\to+\infty$时，e^x 的值无限增大，所以 e^x 当 $x\to+\infty$时没有极限. 当 $x\to+\infty$时，e^{-x}的值无限接近于常数 0，因此有 $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$.

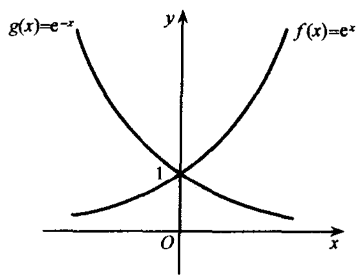

图 1.2.2

如果当 x 无限接近于定值 x_0 时，函数 $f(x)$无限接近于一个确定的常数 A，那么就称 A 为函数 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to x_0)$.

例 1.2.6 写出下列极限的值.

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}c$(c 为常数)　(2) $\lim\limits_{x\to x_0}x$　(3) $\lim\limits_{x\to 0}\sin x$

解：(1)设 $f(x)=c$，由于不论 x 取何值，$f(x)$的值恒等于 c，因此当 x 无限接近于定值 x_0，即 $x\to x_0$ 时，恒有 $f(x)=c$，所以$\lim\limits_{x\to x_0}c=c$.

(2)设 $f(x)=x$，由于不论 x 取何值，$f(x)$的值都等于 x，因此当 x 无限接近于定值 x_0，即 $x\to x_0$ 时，$f(x)=x$ 也无限接近于定值 x_0，所以$\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$.

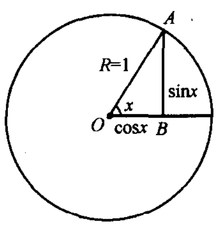

图 1.2.3

(3)如图 1.2.3 所示，设$\angle AOB=x$，则 $\sin x=BA$. 当 $x\to 0$ 时，BA 无限接近于 0，所以$\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$.

$x\to x_0$ 时，x 是以任意方式趋近于 x_0 的，有时只需讨论 x 从 x_0 的左侧无限趋近于 x_0(记为 $x\to x_0^-$)，或从 x_0 的右侧无限趋近于 x_0(记为 $x\to x_0^+$)，为此有：

如果当 $x\to x_0^-$ 时，函数 $f(x)$无限接近于一个确定的常数 A，那么就称 A 为函数$f(x)$当 $x\to x_0$ 时的左极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$.

如果当 $x\to x_0^+$ 时，函数 $f(x)$无限接近于一个确定的常数 A，那么就称 A 为函数$f(x)$当 $x\to x_0$ 时的右极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

例 1.2.7 讨论当 $x\to 0$ 时，函数 $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\leqslant 0\\ x-1 & x>0\end{cases}$ 的极限.

解：$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}x^2=0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x-1)=-1$，

因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在.

1.2.2 无穷小量与无穷大量

1. 无穷小量

如果当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，函数 $f(x)$ 的极限为零，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$（或 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$），那么称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷小量，简称无穷小.

例 1.2.8 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，所以 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 为 $x\to\infty$ 时的无穷小量.

例 1.2.9 因为 $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$，所以 $f(x)=x^2$ 为 $x\to 0$ 时的无穷小量.

无穷小量与自变量的变化趋势密切相关. 如 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，当 $x\to\infty$ 时，就是无穷小量，而当 $x\to 1$ 时，就不是无穷小量. 所以说一个函数是无穷小量时，必须指明自变量的变化趋势.

2. 无穷小量的性质

在自变量的同一变化过程中，无穷小量具有如下性质.

性质 1.2.1 有限个无穷小量的代数和仍是无穷小量.

性质 1.2.2 有限个无穷小量的乘积仍是无穷小量.

性质 1.2.3 有界函数与无穷小量的乘积仍是无穷小量.

例 1.2.10 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x}{x}$.

解：因为当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{x}$ 是无穷小量，而 $\cos x$ 是有界函数，所以由性质 1.2.3 得 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x}{x}=0$.

3. 无穷大量

如果当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，函数 $f(x)$ 的绝对值无限增大，那么称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷大量，简称无穷大.

一个函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时为无穷大，按极限的概念，$f(x)$ 的极限是不存在的. 为了描述函数的这一性态，也将函数 $f(x)$ 的极限为无穷大记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$（或 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$）的形式.

通常把趋向于 $+\infty$ 的函数称为正无穷大，趋向于 $-\infty$ 的函数称为负无穷大，分别记为 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=+\infty$；$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=-\infty$. 当 $x\to+\infty$ 时，2^x 是正无穷大，即 $\lim\limits_{x\to+\infty}2^x=+\infty$. 当 $x\to 0^+$ 时，$\ln x$ 是负无穷大，即 $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$.