

西方数学文化理念传播译丛

丛书主编 汪宇

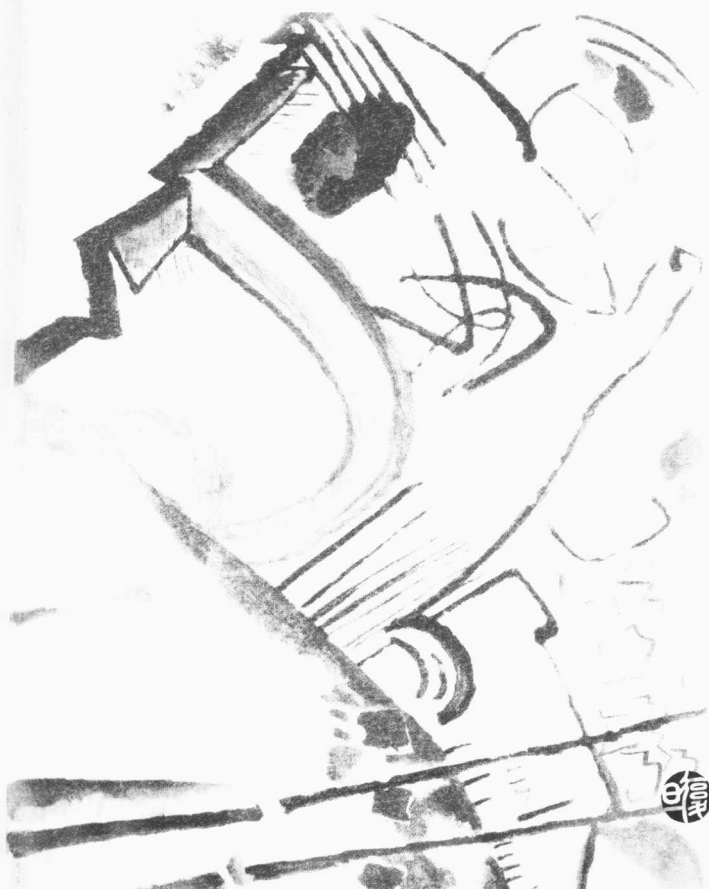
Proofs and Refutations

证明与反驳

数学发现的逻辑

〔英〕伊姆雷·拉卡托斯 著

方刚 兰钊 译



复旦大学出版社

www.fudanpress.com.cn

作者简介

拉卡托斯 (Imre Lakatos, 1922—1974), 英籍匈牙利人, 出身于匈牙利的一个犹太人家庭, 是20世纪著名的数学哲学家、科学哲学家, 也是现代科学哲学历史学派的主要代表之一。二战期间是积极的共产党人, 1950年至1953年以修正主义者之名被监禁。1956年苏联出兵匈牙利后, 流亡到英国, 继续求学, 获剑桥大学哲学博士学位, 后入英国籍。从20世纪60年代初起到去世为止, 一直在伦敦经济学院任教, 与波普 (Karl Popper) 和沃特金斯 (John Watkins) 共事, 继波普任科学方法、逻辑学和哲学系主任, 并任《科学哲学》杂志主编。主要著作有《科学研究纲领方法论》、《数学、科学与认识论》、《证明与反驳》。

译者简介

方刚, 博士, 副教授, 现任教于中国科学技术大学科技传播系。

兰钊, 中国科学技术大学理学学士, 目前正在美国伊利诺大学芝加哥分校 (University of Illinois at Chicago) 攻读博士学位。

西方数学文化理念传播译丛

丛书主编 汪宇

《西方文化中的数学》

[美]莫里斯·克莱因 著

张祖贵 译

《什么是数学》

[美]R·柯朗 H·罗宾 著

I·斯图尔特 修订

左平 张饴慈 译

《后现代思想的数学根源》

[加]弗拉第米尔·塔西奇 著

蔡仲 戴建平 译

《数学与知识的探求》

[美]莫里斯·克莱因 著

刘志勇 译

《证明与反驳》

[英]伊姆雷·拉卡托斯 著

方刚 兰钊 译

目的是要解决数学方法论的某些问题。

内 容 提 要

该书是匈牙利裔英国籍著名哲学家伊姆雷·拉卡托斯于20世纪60年代完成的一部探索数学史上新的发现产生过程的经典著作。书的主要内容包括作者用5年时间收集的两个典型的数学案例，以及本书的编者添加的拉卡托斯1961年在剑桥大学所撰博士论文的部分内容。

拉卡托斯是以对话体的形式进行写作的，他虚构了教师在课堂上与学生们讨论正多面体欧拉公式 $V-E+F=2$ 的猜想与发现、证明和反驳的全过程，形象地展现了数学史上对此问题进行研究探索的真实的历史图景，以此来挑战和批判以希尔伯特为代表的认为数学等同于形式公理的抽象、把数学哲学与数学史割裂开来的形式主义数学史观。此篇光辉论著的主要目的是要解决数学方法论的基本问题，以一种探索和发现的情境逻辑来代替形式主义和逻辑实证主义的抽象教条。正如拉卡托斯所说，非形式、准经验的数学的发展，并不只靠逐步增加的毋庸置疑的定理的数目，而是靠以思辨与批评、证明与反驳之逻辑对最初猜想的持续不断的改进。

本书的写作形式也颇为新颖，作者以课堂讨论的对话形式来展现数学的发现，生动地体现了数学发展的辩证过程。正因为此，该书还可以作为数学教学的案例，给广大数学教师提供一种具有实践意义的教学法。

特别要提请读者注意的是，该著作脚注的内容十分丰富，诸多数学史上的争论都体现在注释之中，所以脚注部分也应该看作是正文的有机组成部分，不可忽略。

作者在著作后面还列了一个非常完整的参考书目，对书中提到的问题和观点感兴趣的读者可以按图索骥，定会有更大的收获。

编者前言

我们伟大的朋友和导师伊姆雷·拉卡托斯(Imre Lakatos)于1974年2月2日意外去世了。那时他正(像往常一样)忙于许多学术项目,最重要之一是出版他那才华横溢的论文《证明与反驳》(*Proofs and Refutations*)的增改本,此文曾分4部发表于《不列颠科学哲学杂志》(*The British Journal for the Philosophy of Science*, 14, 1963—1964)。拉卡托斯签订出书合同已久,但因他盼望修订与进一步改进此文,并另行增添些扎实的材料,而搁置了出版。这项工作一再拖延,相当程度上是由于他的兴趣转向物理科学之哲学,但在1973年夏天,他终于决定着手出版之事了。那个夏日里,我们分别同他讨论了出书计划;在他的身体境况不断恶化时,我们试图努力编出一本同拉卡托斯的设想尽可能接近的书。

于是,我们在原《证明与反驳》论文(作为本书第一章)的基础上增加了3段新文字。首先,我们为正文增添了第二部分,是关于庞加莱(Poincaré)对笛卡儿(Descartes)-欧拉(Euler)猜想所作的矢量代数证明的,取材于拉卡托斯1961年剑桥博士论文的第二章。(原《证明与反驳》文稿是其博士论文的第一章经大量修订与改进的版本。)而其博士论文第三章的一部分成了现在的附录1,内含对证明与反驳法增加的一个新的案例研究,案例是柯西(Cauchy)对于如下定理的证明:任何收敛的连续函数项级数的极限自身是连续的。正文的第二章和附录1应能消除读过《证明与反驳》的数学家所表达的疑虑:拉卡托斯所描述的分析证明法(proof-analysis)法或许只适用于多面体研究,鉴于这个“近经验”(near empirical)主题的反例唾手可得,

也许不适用于“真正的”数学。增加的第3段文字(附录2)亦取材于拉卡托斯学位论文第三章的一部分,是关于他在数学的发展、表述、教学方面的主张。

拉卡托斯之所以推迟出版的原因之一,是他认识到,部分外加的材料固然含有许多新观点并对他的立场有发展之处,却仍需进一步斟酌和进一步对历史资料的研究,尤其是(附录1中)关于柯西与傅立叶材料的真实性的考证。我们也意识到这些材料中有若干疑难、模棱两可及遗漏之处。然而,我们以为不应当更改拉卡托斯的手稿内容。要做到详细阐释上述材料并作增补,我们均因种种条件限制不能提供翔实而不可或缺的历史资料研究。于是,面临着要么根本不出版这些材料,要么在未完成的状态下出版,我们决定选择后者。我们感觉,上述的材料是很使人感兴趣的;并希望它将激起其他学者在必要时来扩充和纠正它。

总而言之,我们认为,修改拉卡托斯的材料内容是不合适的,即使是对我们确信拉卡托斯已改变了立场的那些部分。所以,我们只限于(以星号标示的按语)指出其中我们应该说服拉卡托斯改动了一部分,及指出(这常与前者是一回事的)我们相信拉卡托斯在如今出版时会修改的一部分材料。(在他完成学位论文到去世的13年中,他的学术立场当然变化极大。他在[1970]的文章中解释了其总体哲学的主要倾向。我们应当提到,拉卡托斯认为他的科学研究纲领方法论对他的数学哲学有重要的意义。)

我们处理表述内容的方法是,几乎完全不动拉卡托斯自己曾发表的材料(即正文第1章,仅有的例外是几处错印与模棱两可的小疏漏)。然而我们在相当程度上修改了之前未曾发表的材料——但是,再次强调,修改仅限于形式,不涉及内容。由于这看起来像是颇不寻常的步骤,故可能的话还是辩护几句较好。

拉卡托斯总是在他将要公开发表的所有材料的表达上费很大的心思,而且发表前他通常要让这些材料先在同事和朋友间广泛传阅,

听取批评与改进的建议。我们肯定,此处首次发表的材料,他应该亦会如此处理,且改动得会比我们斗胆引入的更为剧烈。我们(经由亲身经验)所了解的拉卡托斯为了把他的主张尽可能表述清晰所付出的艰辛,也促使我们尽自己所能努力完善这些材料的表述。倘若拉卡托斯本人修改过底稿,这儿段新文字便自然会比其所应当成就的面貌更好;但是,我们感觉同他是如此的亲近,同时也因为深入地参与了他以前的出版事务,于是,我们可以做一次合理的尝试,将这些材料改进到接近他自己的高标准要求。

我们非常高兴能有此机会来编辑拉卡托斯数学哲学方面一些重要著作并完成这个版本,因为,借此可以报答他所给予我们的一部分学术与私交的恩惠了。

约翰·沃拉尔
(John Worrall)
埃利·扎哈尔
(Elie Zahar)

致 谢

这本书的底稿历史较长,且变化较多,这在编者前言中已部分指出了。根据拉卡托斯加在他 1963—1964 年原论文(此处重印作第一章)上的致谢词,写作工作于 1958—1959 年在剑桥的国王学院(King's College)时开始,其第一次宣读是在 1959 年 3 月伦敦经济学院(London School of Economics)卡尔·波普尔(Karl Popper)的研讨班上。另一版本并入他 1961 年的剑桥博士论文里,本书的余下部分也以此为基础。学位论文的准备在 R·B·布莱思怀特(R. B. Braithwaite)教授的指导下进行。与此一道,拉卡托斯还感谢了洛克菲勒基金会(Rockefeller Foundation)的经济资助,以及“接受了 T·J·斯迈利(T. J. Smiley)博士的诸多帮助、鼓励和有价值的批评”。拉卡托斯致谢词的余下部分如此写道:

作者在伦敦经济学院准备这一最新版本时,曾努力留意尤其是以下诸位的批评与建议: J·阿加西(J. Agassi)博士、I·哈金(I. Hacking)博士、W·C·尼尔(W. C. Kneale)与 R·蒙田(R. Montague)教授、A·穆斯格拉夫(A. Musgrave)、M·波兰尼(M. Polanyi)教授和 J·W·N·瓦特金斯(J. W. N. Watkins)。在 G·波利亚(G. Pólya)与 B·L·范德瓦尔登(B. L. Van der Waerden)教授的批判性评论的激励下,作者改进了例外排除法的处理。怪物排除法与怪物校正法的区分是 B·麦克莱南(B. MacLennan)建议的。

此文当被视作在波利亚之复兴数学探试法与波普尔之批判哲学的背景下的产物。

1963—1964 年版的原论文有如下的致献词:

献给乔治·波利亚 75 岁与卡尔·波普尔 60 岁生日。

准备此书时,编者曾受到约翰·贝尔(John Bell)、迈克·哈莱特(Mike Hallet)、莫舍·玛肖韦(Moshé Machover)与杰里·拉韦兹(Jerry Ravetz)的帮助,他们皆欣然阅读了第二章与附录的草稿,并提出有助益的批评。

我们还要感谢桑德拉·D·米歇尔(Sandra D. Mitchell)的工作,尤其还有格里高利·柯里(Gregory Currie),他仔细评审了我们对于拉卡托斯著作的加工工作。

约翰·沃拉尔

埃利·扎哈尔

作者引言

思想史上屡见不鲜的是,当一个强有力的新方法出现时,可采用此新方法处理的问题之研究进步迅速、引人瞩目,余者却趋于被忽视甚至遗忘,其研究就会遭到鄙视。

由于元数学(*metamathematics*)劲头十足地发展,此一情形在我们世纪的数学哲学中看来业已出现。

元数学的主要内容是一种对数学的抽象,在其间,以形式系统替代数学理论、以合式公式(*well-formed formula*)的某种序列替代证明、以“理论上可有可无”却“排印简便”^①的“缩略标记”(abbreviatory devices)替代定义。此种抽象由希尔伯特(Hilbert)发明,旨在提供一种强有力的技术工具,以解决数学方法论中的一部分问题。同时,却尚有在元数学抽象之运用范围外的问题,与非形式(*inhaltliche*,就内容而言)数学及其发展和解数学题的情境逻辑(*situational logic*)有关的所有问题仍然处在其中。

倾向于认为数学等同于其形式公理抽象(以及数学哲学等同于元数学)的数理哲学学派,我称之为“形式主义”学派。形式主义立场的最明白阐述之一可在卡尔纳普(Carnap)[1937]那里找到。卡尔纳普声称:(a)“哲学将让位于科学逻辑……”,(b)“科学逻辑不过是科学语言的逻辑句法……”,(c)“元数学是数学语言的句法”(第

^① 丘奇(*Church*)[1956],第1卷,第76—77页。亦参见皮亚诺(*Peano*)[1894],第49页,以及罗素(*Russell*)和怀特海(*Whitehead*)[1910—1913],第1卷,第12页。此是帕斯卡(*Pascal*)[1659]规划的欧几里得(*Euclid*)纲领的一个固有组成部分,参见拉卡托斯[1962],第158页。

xiii 页与第 9 页)。换言之,数学哲学将被元数学取代。

形式主义把数学哲学与数学史割裂开来,因为,据形式主义的数学概念,真正的数学并无历史。所有形式主义者皆会大体同意罗素那措词“罗曼蒂克”但立意严肃的评论,依此,则布尔(Boole)的《思想规律》(*Laws of Thought*) (1854) 就是“古往今来第一本数学书”^①。形式主义拒不承认大部分过去公认的数学之作为数学的资格,并对其发展只字不言。所有“创造”时期与几乎所有“批判”时期的数学理论都不许迈入形式主义的天堂,天堂里数学理论如炽天使(Seraphim)^②一般存在,尘世间不确定性的种种污迹被清洗得一干二净。然而,形式主义者又往往为堕落的天使留一扇小小的后门:对一些“数学与非数学之混合物”来说,倘若后来发现有“在某种意义上容纳它们”的形式系统存在,它们亦可获准升天(柯利(Curry)[1951],第 56—57 页)。依此种说法,则牛顿不能不等 4 个世纪,直到皮亚诺、罗素与奎因(Quine)以形式化微积分助他升入天堂了。狄拉克(Dirac)更是幸运:他还在世时,L·施瓦兹(L. Schwartz)便拯救了他的灵魂。或许我们这里倒该提提元数学家自相矛盾的困境:就是照形式主义甚至演绎主义的标准来看,他们亦非诚实的数学家。迪厄多内(Dieudonné)说,以公理形式表述推理过程是“任何有志于诚实治学的数学家,都肩负着的绝对义务”([1939],第 225 页,斜体是我加的)。

当此形式主义处于支配地位之时,我们要套用康德(Kant)的话:数学史,在缺乏哲学的引导下,已变得盲目了;而数学哲学,在置数学史上最引人入胜的现象于不顾时,已变得空洞了。

“形式主义”乃是逻辑实证主义哲学的堡垒。根据逻辑实证主

① 罗素[1901]。此文以《数学与形而上学家》(*Mathematics and the Metaphysicians*)为标题重印罗素[1918]的第 5 章。引语可于 1953 年企鹅版(Penguin edition)的第 74 页上找到。在罗素[1918]的前言中,他论及此文:“它所以有这样的语调,部分原因是编辑请求我行文‘尽可能罗曼蒂克’。”

② 译注:Seraphim,希伯来语,本意“燃烧中之物”(burning ones),指“炽天使”(“撒拉弗”),基督教九级天使之最高者,本性为“爱”,象征“光明”、“热情”和“纯洁”,参见《旧约·以赛亚书》第 6 章第 2—6 节。

义,一命题之所以有意义仅当其为“重言式的”或是经验的陈述。由于非形式数学既非“重言式的”亦非经验的,其必为无意义的纯粹胡诌^①。逻辑实证主义的教条对数学史与数学哲学都是有害的。

这些文章的目的是要解决数学方法论的某些问题。我使用“方法论”此词,其意义近于波利亚与伯奈斯(Bernays)的“探试法”^②和波普尔的“发现的逻辑”或“情境逻辑”^③。当下,套用“数学方法论”一词作为“元数学”的同义词无疑是形式主义的手法,这说明在形式主义的数学哲学中,没有作为发现的逻辑的方法论之地位^④。形式

① 据图开特(Turquette),哥德尔式(Gödelian)语句是无意义的([1950],第129页)。图开特持论反对柯比(Copi),后者声称,因为哥德尔式语句是先验的真理,且是非分析的,它们便驳倒了先验的分析论([1949]与[1950])。他们均未注意到,从这个观点来看,哥德尔式语句的独特状态在于这些定理是非形式数学的定理,并且事实上他们是在一个特例下讨论非形式数学的状况。

② 波利亚[1945],尤其是第102页,亦见[1954],[1962a];伯奈斯[1947],尤其是第187页。

③ 波普尔[1934],随后见于[1945],尤其是第90页(或第4版[1962],第97页);亦见[1957],第147页以下。

④ 可以举例论述此点,如塔斯基(Tarski)[1930a]和[1930b]。在前一篇文字中,塔斯基明确使用“演绎科学”一词,作为“形式化演绎科学”的略语。他说:“基本上是在相同的意义上,形式化演绎学科构成元数学的研究领域,而空间实体构成几何学的研究领域。”在第二篇文中却给此一合情合理的表述来了一个密谋的霸道的歪曲:“基本上是在相同的意义上,演绎学科构成演绎科学方法论的主题,空间实体构成几何学的主题,而动物构成动物学的主题。自然,并非所有演绎学科都纳入了适合作为科学研究之对象的形式。譬如,那些没有确定的逻辑基础的,没有精确的推论规则的,以及以通常模棱两可而不确切的口头语言词汇表述其定理的——一句话,那些尚未被形式化的——都不适合。因此,元数学研究只限于讨论形式化演绎学科。”有新意之处是,前一个表述声称元数学的主题是形式化演绎学科,后一个表述声称,只是因为非形式化演绎科学根本不是科学研究的合适对象,所以元数学的主题限制在形式化演绎学科中。这意味着,形式化学科的史前史(prehistory)不能是科学研究的主题——不像一个动物物种的史前史,正可以成为十分科学的进化的题材。没有人会怀疑,关于数学理论的某些问题只能在其形式化后才可处理,正如有关人类的某些问题(如人体解剖学)只能在人死后才可处理。但几乎没人会由此推论,人类仅仅在他们“纳入了‘死’的形式”时,“对于科学研究方是合适的”,因而生物学研究只限于讨论死者——虽然,我并不会惊奇,如果在早期解剖学的辉煌日子里,当强有力的新解剖法出现时,维萨里(Vesalius)的一些充满热情的学生曾认为生物学等同于对尸体的分析。(译注:Andreas Vesalius,1514—1564,比利时解剖学家、医师,现代人体解剖学之奠基人,首次以解剖人尸作教学演示,著有《人体结构》(De Humani Corporis Fabrica)7卷。)

塔斯基对于除形式系统之外,是否存在他种方法论持否定态度。在其[1941]的前言中,他详细论述了这种否定态度:“经验科学的方法论课程……必须主要地限于评估与批评试探性的摸索与不成功的努力。”理由是,经验科学是非科学的:因为塔斯基定义一个科学理论为“被断言的陈述按某些规则排列的系统”(同上)。

主义者说,数学与形式化的数学是等同的。但是,在一个形式化的理论中可以发现(*discover*)什么呢?两种情形。第一,可发现一些问题的解法,而一个调试得当的图灵机(Turing Machine)可在有限的时间内解决这些问题(如:某个宣称的证明是否为一证明?)。没有数学家会对贯彻这些判定过程指定的枯燥机械的“方法”感兴趣。第二,还可以发现一些问题的解法(如:在一不可判定的理论中,某公式是否为一定理?),在这些问题中,可作指导的“方法”只有“无法驾驭的顿悟与好运气”了。

现在,现实的数学不再坚持机械的理性主义与瞎猜的非理性主义之间的苍白选择了^①:研究非形式数学,可为正开展工作的数学家得出一套丰富的情境逻辑,它既非机械的,亦不是非理性的,但不能为形式主义哲学所承认,更不能为其所激发。

若没有对形式主义的批判和最终摒弃,数学史与数学发现的逻辑,即数学思想之系统发生与个体发生^②,是不能得到发展的。

可是,形式主义数学哲学有很深的根基,它是教条主义数学哲学之长链的最新的环节。教条主义者与怀疑主义者的争论已有两千多年。教条主义者以为——依靠我们人类的智识以及/或者感官的力量——我们能获得真理并知晓我们已获得了它。相反,怀疑主

① 形式主义哲学最危险的奇异行为之一是以下的习惯:(1)陈述某种情形——以正确的方式——关于形式系统的;(2)接着说这适用于“数学”——此又是正确的,如果我们接受数学与形式系统之一致性;(3)然后就偷换词义,按通常的意义使用“数学”一词。所以奎因说([1951],第87页),“这反映出数学上的典型情形:数学家由无法驾驭的顿悟与好运偶然发现了证明,但此后其他数学家可以检验他的证明”。但通常检验一个普通(非形式)证明是一项棘手的工作,而偶然发现一个“错误”需要与偶然发现一个证明同样的领悟力与好运气;在非形式证明中发现“错误”有时也许需要几十年——如果不是几百年的话。

② H·庞加莱与G·波利亚均提议将E·海克尔(Haeckel)有关个体发生重演系统发生的“基本生物发生律”应用于思想发展,尤其是数学的思想发展中(庞加莱[1908],第135页,及波利亚[1962b])。在此引用庞加莱的话:“动物学家坚持说,一个动物的胚胎发育在轮廓上重演它的历代祖先通贯地质时代的整个历史。看来心智的发展也是同样道理……为此故,科学史应当是我们的第一指南”(G·B·霍尔斯特德(G. B. Halsted)授权译本,第437页)。(译注:Ernst Heinrich Haeckel, 1834—1919,德国生物学家、哲学家,达尔文主义支持者,提出生物发生律,以为进化论之证据。)

义者以为要么我们全然不能获知真理(除非经由神秘体验之助),要么我们不能知晓我们是否能获得或已经获得了真理。在这场大辩论中,双方的论点不断与时俱进,而数学一直是教条主义引以为豪的堡垒。不论何时,只要数学教条主义陷入了“危机”,一个新版本便会又一次提供货真价实的严格而终极的基础,而数学即由之恢复权威的、一贯正确的、不可驳倒的形象,俨然是“上帝迄今愿意赐予人类的唯一科学”(霍布斯(Hobbes)[1651],第15页)。大多数怀疑主义者都听任教条主义认识论的这个根据地固若金汤^①。如今对它的挑战也早该来临了。

这个案例研究的核心是要向数学形式主义挑战,但却不会直接地反对数学教条主义的根本观点。谦虚地说,它的目标是详细发挥此一论点:非形式、准经验的数学的发展,并不只靠逐步增加的毋庸置疑的定理的数目,而是靠以思辨与批评、证明与反驳之逻辑对最初猜想的持续不断的改进。不过,因为元数学是如今正迅速发展的非形式、准经验的数学的一个范式,所以,此文亦会隐舍地挑战现代数学的教条主义。目前元数学之历史的研究者将会在其自己的领域里辨认出此处描述的模式。

对话形式当可折射出故事发展的辩证性;其意在包含而体现一种合理地重建或“提炼净化”过的历史。真实的历史会插在脚注当中,故大多数脚注应该看作此文有机的组成部分。

^① 关于数学在教条主义与怀疑主义之争中扮演的角色之讨论,参见我的[1962]。

目 录

编者前言	1
致谢	i
作者引言	i
第 1 章	1
1. 一个问题与一个猜想	1
2. 一个证明	2
3. 用局部而非全局的反例对证明的批评	5
4. 全局的反例对猜想的批评	8
(a) 猜想之拒斥。让步法	9
(b) 反例之拒斥。怪物排除法	10
(c) 以例外排除法改进猜想。逐步排除。策略性撤退 或稳扎稳打	20
(d) 怪物校正法	27
(e) 以引理并入法改进猜想。证明生成的定理 VS. 素朴的猜想	31
5. 全局而非局部的反例对证明分析的批评。严格性的 问题	41
(a) 守御定理的怪物排除	41
(b) 隐藏引理	41
(c) 一证多驳法	46
(d) 证明 VS. 证明分析。定理概念与证明分析之严格性 概念的相对化	49

6. 再论局部而非全局的反例对证明的批评。内容问题	58
(a) 以更深入的证明扩增内容	58
(b) 向最终证明与相应的充分必要条件进军	64
(c) 不同证明得出不同定理	66
7. 重谈内容问题	68
(a) 素朴猜想的素朴性	68
(b) 作为多证多驳法之基础的归纳	70
(c) 演绎的猜测 VS. 素朴的猜测	72
(d) 以演绎猜测扩增内容	80
(e) 逻辑的反例 VS. 探试的反例	86
8. 概念的形成	88
(a) 以概念拉伸来反驳。重估怪物排除——兼重估错误 与反驳之概念	88
(b) 证明引生的概念 VS. 素朴的概念。理论分类 VS. 素朴分类	93
(c) 再论逻辑反驳与探试反驳	97
(d) 理论的概念拉伸 VS. 素朴的概念拉伸。连续发展 VS. 批判发展	99
(e) 内容增加的极限。理论反驳 VS. 素朴反驳	101
9. 批评如何可把数学真理变为逻辑真理	105
(a) 无限制的概念拉伸摧毁意义与真理	105
(b) 温和的概念拉伸可将数学真理变为逻辑真理	109
第 2 章	113
编者引言	113
1. 把猜想翻译成矢量代数“完全被认可的”术语。翻译的 问题	113
2. 猜想的另一个证明	125
3. 关于证明之终极性的一些疑问。翻译的程序以及实在	

论者的定义方法 VS. 唯名论者的定义方法	128
附录 1	137
多证多驳法中的另一个案例研究	137
1. 柯西为“连续性原理”所作的辩护	137
2. 赛德尔的证明以及证明生成的一致收敛概念	142
3. 阿贝尔的例外排除法	144
4. 有关证明分析法之发现的障碍	147
附录 2	154
演绎主义方法 VS. 探试法	154
1. 演绎主义方法	154
2. 探试法。证明产生的概念	156
(a) 一致收敛	157
(b) 有界变分	159
(c) 可测集的卡拉西尔德瑞定义	166
参考书目	169
人名译名对照表	185