高 职 高 专 国 家 规 划 教 材

经济数学

（上册） 闫杰生 主编

ECONOMICS MATHEMATICS

河 南 大 学 出 版 社

高职高专国家规划教材

经济数学

（上册）　闫杰生　主编

ECONOMICS MATHEMATICS

河南大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

经济数学/闫杰生主编. 一开封:河南大学出版社,2007.9
ISBN 978-7-81091-643-1

Ⅰ.经… Ⅱ.闫… Ⅲ.经济数学一高等学校一教材 Ⅳ.F224.0
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 136929 号

责任编辑 王 琪
装帧设计 张 松

出 版	河南大学出版社			
	地址:河南省开封市明伦街 85 号		邮编:475001	
	电话:0378-2825001(营销部)		网址:www.hupress.com	
排 版	郑州市今日文教印制有限公司			
印 刷	河南日报彩印厂			
版 次	2007 年 9 月第 1 版	印 次	2007 年 9 月第 1 次印刷	
开 本	787mm×1092mm 1/16	印 张	12.75	
字 数	279 千字	印 数	1—3000 册	
定 价	22.00 元(上册)			

(本书如有印装质量问题请与河南大学出版社营销部联系调换)

前　言

经济数学是高职高专院校经济类所有专业必修的基础课程，不但对学生学习专业课有重要意义，而且还能很好地培养学生的思维能力，使他们了解认识世界的方法。

本套教材《经济数学》是根据教育部制订的《关于加强高职高专教育教材建设的若干意见》(教高字[2000]19号)提出的教材规化，组织部分高校从事一线教学的教师，在征求各专业的意见的基础上，经过深入调研，为高职高专经管类学生编写的。本教材在编写过程中进行了以下积极尝试:

(1) 力求贯彻“必须够用”的教材原则，能够为学生的可持续发展提供足够的知识保障。以“掌握概念、强化应用”为出发点，在保证科学性的基础上，注重讲清概念，减少论证，加强对学生基础运算能力和分析问题、解决问题能力的培养。

(2) 每章前均有“学习目标”，使学生在学习过程中能明确学习方向和应达到的要求。

(3) 例题解答详细，使学生能理解解题思路，尽量减少学习障碍。

(4) 每章均有“疑难解析和典型例题分析”和“本章小结”，帮助学生自学，尽量让学生做到举一反三、触类旁通。

本教材共分上、下两册。上册主要包括函数、极限与连续，导数与微分，微分中值定理与导数应用，不定积分，定积分及其应用，多元函数微分学基础。下册主要包括行列式、矩阵、线性方程组、概率论基础、数理统计基础。标有 * 号的内容为选学，不同专业也可以根据实际需要取舍。

本书由闫杰生总策划、负责组织实施。各位编者的具体分工如下：张彬，第一章；刘翠桃，第二章、第七章；闫杰生，第三章、第八章、第十一章；杨丽华，第四章、第五章；李辉，第六章、第七章；万冬梅，第九章；韩欲青，第十章、第十一章。本书在编写过程中，得到商丘职业技术学院、中原工学院的学校领导和河南大学出版社的大力支持与帮助，郑州大学博士生导师黄建华教授对本书进行了认真审核，并提出许多宝贵建议，同时我们参阅了同行的许多新的科研成果，在此一并表示感谢。

本书一定还有不少疏漏与不足之处，切盼有识之士不吝赐教。

闫杰生

2007 年 8 月

目　　录

前言 …… (1)
第一章　函数、极限与连续 …… (1)
1.1　函　　数 …… (1)
1.2　极限的概念 …… (13)
1.3　无穷小量与无穷大量 …… (17)
1.4　极限的性质与运算法则 …… (20)
1.5　两个重要极限 …… (23)
1.6　函数的连续性 …… (27)
1.7　经济学常用函数 …… (33)
第二章　导数与微分 …… (43)
2.1　导数的概念 …… (43)
2.2　函数的求导法则 …… (50)
2.3　高阶导数 …… (59)
2.4　函数的微分 …… (62)
第三章　微分中值定理与导数应用 …… (75)
3.1　微分中值定理 …… (75)
3.2　洛必达法则 …… (80)
3.3　函数的单调性与极值 …… (84)
3.4　曲线的凹凸性与拐点 …… (94)
3.5　函数图形的描绘 …… (96)
3.6　导数在经济学中的应用 …… (100)
第四章　不定积分 …… (114)
4.1　不定积分的概念与性质 …… (114)
4.2　换元积分法 …… (119)
4.3　分部积分法 …… (127)
4.4　一阶线性微分方程及其在经济学中的应用 …… (130)
第五章　定积分及其应用 …… (142)

5.1　定积分的概念与性质 …………………………………………………… (142)
5.2　微积分基本公式 ……………………………………………………… (149)
5.3　定积分的换元积分法与分部积分法 ………………………………… (153)
5.4　广义积分 ……………………………………………………………… (158)
5.5　定积分的应用 ………………………………………………………… (160)
＊第六章　多元函数微分学基础………………………………………………… (173)
6.1　空间解析几何简介 …………………………………………………… (173)
6.2　多元函数的概念 ……………………………………………………… (177)
6.3　偏导数与全微分 ……………………………………………………… (181)
6.4　复合函数与隐函数微分法 …………………………………………… (185)
6.5　多元函数的极值 ……………………………………………………… (189)

第一章　函数、极限与连续

学习目标

1. 了解函数的概念，函数的单调性、奇偶性、周期性的概念，反函数的概念，左、右极限的概念，无穷小、无穷大的概念，闭区间上连续函数的性质.

2. 理解基本初等函数、复合函数、初等函数、分段函数的概念，需求函数与供给函数的概念，函数极限的定义，无穷小的性质，函数在一点连续的概念，初等函数的连续性.

3. 掌握复合函数的复合过程，极限四则运算法则.

4. 会用函数关系描述经济问题，会求数列和函数的极限，对无穷小进行比较，用两个重要极限求极限，判断间断点的类型.

微积分是数学的重要分支，是高等数学的核心，而函数和极限分别是微积分的研究对象和工具. 本章将在复习和加深理解有关知识的基础上，着重讨论函数的极限和函数的连续性问题.

1.1　函　　数

函数是微积分学研究的对象. 在中学里我们已经学习过函数的概念，在这里我们不是进行简单的重复，而是从全新的视角来对它进行描述并重新分类.

1.1.1 函数的概念

1. 常量与变量

在日常生活和经济活动中，我们经常会遇到各种不同的量，例如：身高、气温、产量、收入、成本等等. 这些量可以分为两类. 一类量在考察的过程中不发生变化，只取一个固定的值，我们把它称作**常量**. 例如，圆周率 π 是个永远不变的量，某种商品的价格、某个班的学生人数，在一段时间内保持不变，这些量都是常量. 另一种量在所考察的过程中是变化的，可以取不同数值，我们把它称作**变量**. 例如，一天中的气温、生产过程中的产量都是在不断变化的，它们都是变量.

在理解常量与变量时，应注意下面几点：

(1)常量和变量依赖于所研究的过程. 同一个量，在某一过程中可以被认为是常量，而在另一过程中则可能是变量，反过来也是同样的. 例如，某种商品的价格在一段时间内是常量，但在较长的时间内则是变量. 这说明常量和变量具有相对性.

(2)从几何意义上讲，常量对应着数轴上的定点，变量则对应着数轴上的动点.

(3)一个变量所能取的数值的集合叫做这个变量的**变动区域**.

有一类变量，例如时间可以取介于两个实数之间的任意实数值，叫做**连续变量**. 连续变量的变动区域常用区间表示.

常量习惯用字母 a,b,c,d 等表示，变量习惯用字母 x,y,z,u,v,w 等表示.

2. 函数的概念及表示法

在某个变化过程中，往往会出现多个变量，这些变量不是彼此孤立的，而是相互影响和相互制约的，一个量或一些量的变化会引起另一个量的变化. 如果这些影响是确定的，是依照某一规则的，那么我们说这些变量之间存在着函数关系.

例如，生产某种产品的固定成本为 6800 元，每生产一件产品，成本增加 70 元，那么该种产品的总成本 y 与产量 x 的关系可用下面的式子给出：

$$y=70x+6800.$$

当产量 x 取任何一个合理的值时，成本 y 有确定的值和它对应，我们说成本 y 是产量 x 的函数.

定义 1.1 设 x 和 y 是两个变量，若当变量 x 在非空数集 D 内任取一数值时，变量 y 依照某一规则 f 总有一个确定的数值与之对应，则称变量 y 为变量 x 的**函数**，记作 $y=f(x)$. 这里，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**或**函数**，f 是函数符号，它表示 y 与 x 的对应规则. 有时函数符号也可以用其他字母来表示，如 $y=g(x)$ 或 $y=\varphi(x)$ 等. 集合 D 称为函数的**定义域**，相应的 y 值的集合则称为函数的**值域**.

当自变量 x 在其定义域内取定某个确定值 x_0 时，因变量 y 按照所给函数关系 $y=f(x)$ 求出的对应值 y_0 叫做当 $x=x_0$ 时的**函数值**，记作 $y|_{x=x_0}$ 或 $f(x_0)$.

例 1 若 $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x+1}$,求 $f(2),f(-2),f(0),f(a),f(a+b)$.

解 $f(2)=0$; $f(-2)=\dfrac{|-4|}{-1}=-4$; $f(0)=\dfrac{|-2|}{1}=2$;

$f(a)=\dfrac{|a-2|}{a+1}$; $f(a+b)=\dfrac{|a+b-2|}{a+b+1}$.

例 2 求下列函数的定义域:

(1)$f(x)=\dfrac{3}{5x^2+2x}$; (2)$f(x)=\sqrt{9-x^2}$;

(3)$f(x)=\lg(4x-3)$; (4)$f(x)=\arcsin(2x-1)$;

(5)$f(x)=\lg(4x-3)-\arcsin(2x-1)$.

解 (1)在分式$\dfrac{3}{5x^2+2x}$中,分母不能为零,所以 $5x^2+2x\neq 0$,解得 $x\neq-\dfrac{2}{5}$,且 $x\neq 0$,即定义域为$\left(-\infty,-\dfrac{2}{5}\right)\cup\left(-\dfrac{2}{5},0\right)\cup(0,+\infty)$.

(2)在偶次根式中,被开方式必须大于等于零,所以有 $9-x^2\geqslant 0$,解得 $-3\leqslant x\leqslant 3$,即定义域为$[-3,3]$.

(3)在对数式中,真数必须大于零,所以有 $4x-3>0$,解得 $x>\dfrac{3}{4}$,即定义域为$\left(\dfrac{3}{4},+\infty\right)$.

(4)反正弦或反余弦中的式子的绝对值必须小于等于 1,所以有 $-1\leqslant 2x-1\leqslant 1$,解得 $0\leqslant x\leqslant 1$,即定义域为$[0,1]$.

(5)该函数为(3),(4)两例中函数的代数和,此时函数的定义域应为(3),(4)两例中定义域的交集,即$\left(\dfrac{3}{4},+\infty\right)\cap[0,1]=\left(\dfrac{3}{4},1\right]$.

应当指出,在实际应用问题中,除了要根据解析式本身来确定自变量的取值范围以外,还要考虑到变量的实际意义,一般来说,经济变量往往取正值,即变量都是大于零的.

常用的函数表示法有解析法(又称公式法)、表格法和图形法. 现举例说明如下:

(1)$y=\sqrt{3-x^2}$.

这是一个用解析式表示的函数. 当 x 在$-\sqrt{3}$到$\sqrt{3}$之间取任意值时,由公式可以确定唯一的 y 值.

(2)某商店一年中各月份毛线的销售量(单位:100kg)的关系如下表所示.

月份 x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
销售量 y	81	84	45	45	9	5	6	15	94	161	144	123

这是用表格表示的函数,当自变量 x 取 1 到 12 之间任意一个整数时,从表格中可以查到 y 的一个对应值. 例如 x 取 10,从表中可以看到它对应的 y 值是 161,即 10 月份毛线

销售量为 16100kg.

(3)图 1-1 是气象站用自动温度记录仪记录下来的某地一昼夜气温变化曲线.

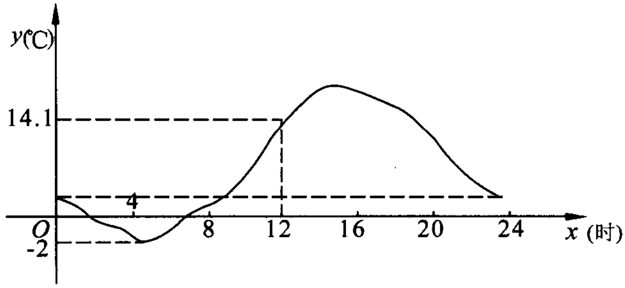

图1-1

这是用图形表示的函数. 气温 y 与时间 x 的函数关系是由曲线给出的. 当 x 取 0 到 24 中任意一个数时,在曲线上都能找到确定的 y 值与它对应. 例如 $x=12$ 时,$y=14.1$℃.

3. **分段函数**

某市电话局规定市话收费标准为:当月所打电话次数不超过 30 次时,只收月租费 25 元;超过 30 次的,每次加收 0.23 元. 电话费 y 和用户当月所打电话次数 x 的关系可用下面的形式给出:

$$y=\begin{cases}25, & x\leqslant 30,\\ 25+0.23(x-30), & x>30.\end{cases}$$

像这样把定义域分成若干部分,函数关系由不同的式子分段表达的函数称为**分段函数**. 分段函数是微积分中常见的一种函数. 例如在中学数学课出现过的绝对值函数可以表示成

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

又例如函数

$$y=f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x>0,\\ 2, & x=0,\\ 3x, & x<0.\end{cases}$$

当 x 取 $(0,+\infty)$ 内的值时,y 的值由关系式 $y=x^2+1$ 来计算;当 $x=0$ 时,$y=2$;当 x 取 $(-\infty,0)$ 内的值时,y 的值由关系式 $y=3x$ 来计算. 例如,$f(3)=3^2+1=10$,$f(-5)=3\cdot(-5)=-15$. 该函数的图像如图 1-2 所示.

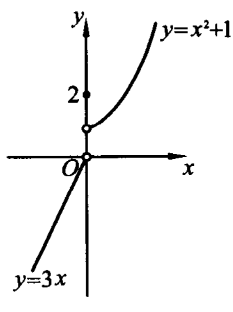

图 1-2

注 分段函数是由几个关系式合起来表示一个函数,而不是几个函数. 对于自变量 x 在定义域内的某个值,分段函数 y 只能确定唯一的值. 分段函数的定义域是各段自变量取值集合的并.

例 3 设函数

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & -4\leqslant x<1,\\ 1, & 1\leqslant x<3,\\ 5x-1, & x\geqslant 3.\end{cases}$$

求 $f(-\pi)$,$f(1)$,$f(3.5)$及函数的定义域.

解 因为$-\pi\in[-4,1)$,所以$f(-\pi)=\sin(-\pi)=0$;因为$1\in[1,3)$,所以$f(1)=1$;因为$3.5\in[3,+\infty)$,所以$f(3.5)=5\times(3.5)-1=16.5$.函数$f(x)$的定义域为$[-4,+\infty)$.

例 4 用分段函数表示函数$y=3-|2-x|$,并画出图形.

解 根据绝对值定义可知,当$x\leqslant 2$时,$|2-x|=2-x$;当$x>2$时,$|2-x|=x-2$.于是有

$$y=\begin{cases}3-(2-x), & x\leqslant 2,\\ 3-(x-2), & x>2,\end{cases}$$

即

$$y=\begin{cases}1+x, & x\leqslant 2,\\ 5-x, & x>2,\end{cases}$$

其图像如图 1-3 所示.

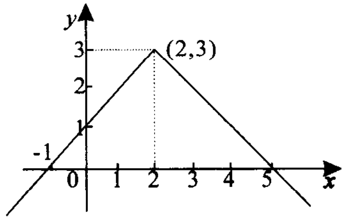

图1-3

1.1.2 函数的几种特性

1. 函数的有界性

定义 1.2 设函数$y=f(x)$在集合D上有定义.如果存在一个正数M,对于所有的$x\in D$,恒有$|f(x)|\leqslant M$,则称函数$f(x)$在D上是**有界**的.如果不存在这样的正数M,则称$f(x)$在D上是**无界**的.

函数$y=f(x)$在区间(a,b)内有界的几何意义是:曲线$y=f(x)$在区间(a,b)内被限制在$y=-M$和$y=M$两条直线之间(如图 1-4).

对于函数的有界性,要注意以下两点:

(1)当一个函数$y=f(x)$在区间(a,b)内有界时,正数M的取法不是唯一的.例如$y=\sin x$在$(-\infty,+\infty)$内是有界的,有$|\sin x|\leqslant 1$,但我们也可以取$M=2$,即$|\sin x|<2$总是成立的,实际上M可以取任何大于 1 的数.

(2)有界性是依赖于区间的.例如$y=\dfrac{1}{x}$在区间$(1,2)$内是有界的,但在区间$(0,1)$内则无界.

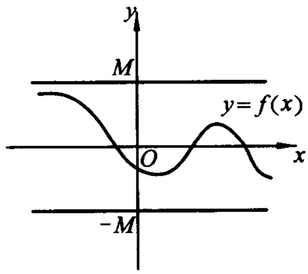

图 1-4

2. 函数的奇偶性

定义 1.3 设函数$y=f(x)$在集合D上有定义.如果对

任意的 $x\in D$，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**偶函数**；如果对任意的 $x\in D$，恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

由定义可知，对任意的 $x\in D$，必有 $-x\in D$，否则，$f(-x)$ 没有意义，因此函数具有奇偶性时，其定义域必定是关于原点对称的.

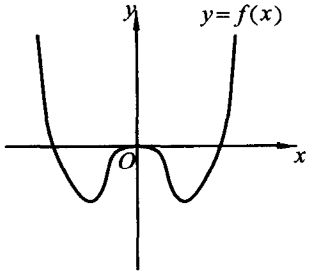

图 1-5

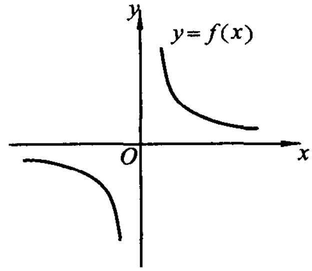

图 1-6

偶函数的图像是对称于 y 轴的(如图 1-5). 因为 $f(-x)=f(x)$，所以如果点 $P(x,f(x))$ 是曲线上的一个点，则它关于 y 轴的对称点 $Q(-x,f(x))$ 也是曲线上的点.

奇函数的图像是对称于原点的(如图 1-6). 因为 $f(-x)=-f(x)$，所以如果点 $P(x,f(x))$ 是曲线上的一个点，则它关于原点的对称点 $Q(-x,-f(x))$ 也是曲线上的点.

例 5 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=3x^4-5x^2+7$；

(2) $f(x)=2x^2+\sin x$；

(3) $f(x)=\sin x+\cos x$.

解 由定义判断.

(1) 因为

$$f(-x)=3(-x)^4-5(-x)^2+7=3x^4-5x^2+7=f(x),$$

所以 $f(x)=3x^4-5x^2+7$ 是偶函数.

(2) 因为

$$f(-x)=2(-x)^2+\sin(-x)=2x^2-\sin x\neq f(x),$$

同样可以得到 $f(-x)\neq -f(x)$，所以 $f(x)=2x^2+\sin x$ 既非奇函数，也非偶函数.

(3) 因为

$$f(-x)=\sin(-x)+\cos(-x)=-\sin(x)+\cos(x)\neq -f(x),$$

又 $f(-x)\neq f(x)$，所以 $f(x)=\sin x+\cos x$ 为非奇非偶函数.

3. 函数的单调性

定义 1.4 设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义. 如果对于 (a,b) 内的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是**单调增加**的；如果对于 (a,b) 内的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在 (a,b)

内是**单调减少**的.单调增加函数与单调减少函数统称为**单调函数**.

单调增加函数的图像是沿 x 轴正向逐渐上升的(如图 1-7),单调减少函数的图像是沿 x 轴逐渐下降的(如图 1-8).

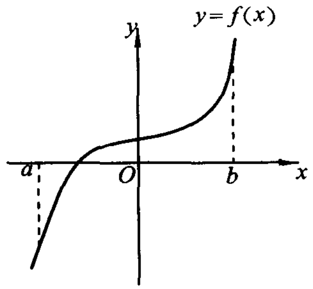

图 1-7

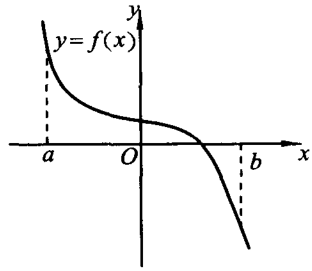

图 1-8

例 6　验证函数 $y=3x+2$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内是单调增加的.

证　在区间$(-\infty,+\infty)$内任取两点 $x_1<x_2$,于是

$$f(x_1)-f(x_2)=(3x_1+2)-(3x_2+2)=3(x_1-x_2)<0,$$

即

$$f(x_1)<f(x_2),$$

所以 $y=3x+2$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内是单调增加的.

4.**函数的周期性**

定义 1.5　对于函数 $y=f(x)$,如果存在正数 a,使 $f(x)=f(x+a)$恒成立,则称此函数为**周期函数**.满足这个等式的最小正数 a 称为**函数的周期**.

例如 $y=\sin x$ 是周期函数,周期为 2π.

1.1.3　反函数

设某种商品的单价为 p,销售量为 x,则收入 y 是 x 的函数:

$$y=px,$$

这时 x 是自变量,y 是 x 的函数.若已知收入 y,反过来求销售量 x,则有

$$x=\frac{y}{p},$$

这时 y 是自变量,x 变成 y 的函数了.

上面的两个式子是同一个关系的两种写法,但从函数的角度来看,由于对应规则不同,它们是两个不同的函数,我们称它们互为反函数.

定义 1.6　设 $y=f(x)$是 x 的函数,其值域为 D.如果对于 D 中的每一个 y 值,都有一个确定的且满足 $y=f(x)$的 x 值与之对应,则得到一个定义在 D 上的以 y 为自变量、x 为因变量的新函数,我们称它为 $y=f(x)$的**反函数**,记作 $x=f^{-1}(y)$,并称 $y=f(x)$为**直**

接函数.

当然我们也可以说 $y=f(x)$ 是 $x=f^{-1}(y)$ 的反函数，就是说，它们互为反函数. 显然，由定义可知，单调函数一定有反函数. 习惯上，我们总是用 x 表示自变量，用 y 表示因量，所以通常把 $x=f^{-1}(y)$ 改写为 $y=f^{-1}(x)$.

从上面的定义容易得出，求反函数的过程可以分为两步：第一步从 $y=f(x)$ 解出 $x=f^{-1}(y)$；第二步交换字母 x 和 y.

例 7 求 $y=4x-1$ 的反函数.

解 由 $y=4x-1$ 得到 $x=\dfrac{y+1}{4}$，然后交换 x 和 y，得 $y=\dfrac{x+1}{4}$，即 $y=\dfrac{x+1}{4}$ 是 $y=4x-1$ 的反函数.

可以证明，函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称. 例 7 中一对反函数的图像如图 1-9 所示.

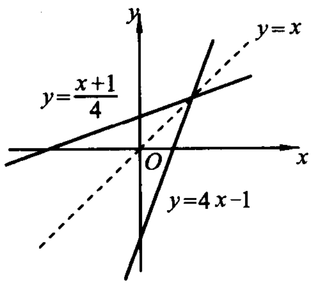

图 1-9

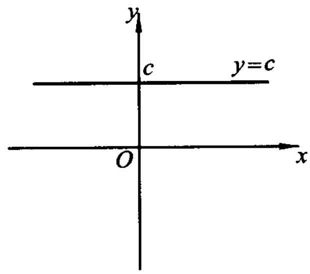

图 1-10

1.1.4 基本初等函数

基本初等函数包括常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数六大类，它们是微积分所研究对象的基础. 虽然大部分基本初等函数在中学已经学过，但我们在这里将系统地讨论基本初等函数的定义域、值域、图像和性质，读者应该很好地掌握这些内容.

1. **常数函数** $y=c$

常数函数的定义域是$(-\infty,+\infty)$. 由于无论 x 取何值，都有 $y=c$，所以，它的图像是过点$(0,c)$且平行于 x 轴的一条直线(如图 1-10). 它是偶函数.

2. **幂函数** $y=x^{\alpha}$(α 为实数)

幂函数的情况比较复杂，我们分 $\alpha>0$ 和 $\alpha<0$ 来讨论. 当 α 取不同值时，幂函数的定义域不同，为了便于比较，我们只讨论 $x\geqslant0$ 的情形，而 $x<0$ 时的图像可根据函数的奇偶性确定.

当 $\alpha>0$ 时，如图 1-11 所示，函数的图像通过原点$(0,0)$和点$(1,1)$，在$(0,+\infty)$内单调增加且无界.

当 $\alpha<0$ 时，如图 1-12 所示，图像不过原点，但仍通过点(1,1)，在$(0,+\infty)$内单调减少，无界，曲线以 x 轴和 y 轴为渐进线.

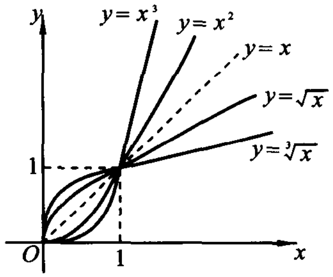

图 1-11

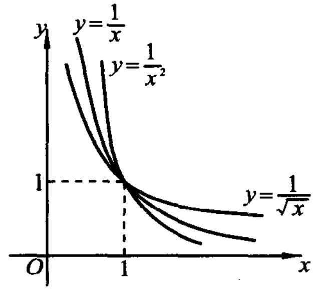

图 1-12

3. **指数函数** $y=a^x(a>0,a\neq1)$

指数函数的定义域是$(-\infty,+\infty)$. 由于无论 x 取何值，总有 $a^x>0$，且 $a^0=1$，所以它的图像全部在 x 轴上方，且通过点(0,1). 也就是说，它的值域是$(0,+\infty)$.

当 $a>1$ 时，函数单调增加且无界，曲线以 x 轴负半轴为渐近线；

当 $0<a<1$ 时，函数单调减少且无界，曲线以 x 轴正半轴为渐近线(如图 1-13).

读者应特别注意指数函数与幂函数的区别：在幂函数 $y=x^\alpha$ 中，自变量 x 在底的位置，指数 α 是常数；而在指数函数 $y=a^x$ 中，自变量 x 在指数位置，底的位置是常数 a.

4. **对数函数** $y=\log_a x(a>0,a\neq1)$

对数函数的定义域是$(0,+\infty)$，图像全部在 y 轴右方，值域是$(-\infty,+\infty)$. 无论 a 取何值，曲线都通过点(1,0).

当 $a>1$ 时，函数单调增加且无界，曲线以 y 轴负半轴为渐近线；

当 $0<a<1$ 时，函数单调减少且无界，曲线以 y 轴正半轴为渐近线(如图 1-14).

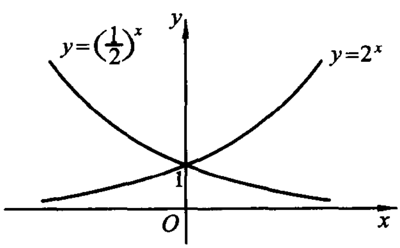

图 1-13

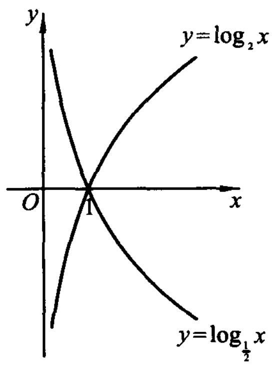

图 1-14

对数函数 $y=\log_a x$ 和指数函数 $y=a^x$ 互为反函数，如图 1-15 所示，它们的图像关于 $y=x$ 对称.

以无理数 e=2.7182818…为底的对数函数 $y=\log_e x$ 叫做**自然对数函数**，简记作 $y=\ln x$，它是微积分中常用的函数.

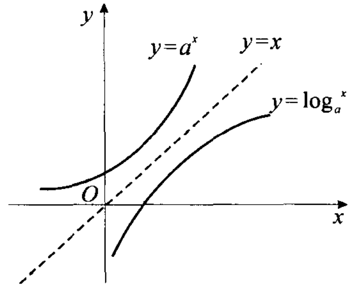

图 1-15

5. **三角函数**

三角函数包括下面六个函数：

(1)正弦函数 $y=\sin x$；

(2)余弦函数 $y=\cos x$；

(3)正切函数 $y=\tan x$；

(4)余切函数 $y=\cot x$；

(5)正割函数 $y=\sec x$；

(6)余割函数 $y=\csc x$.

在微积分中，三角函数的自变量 x 采用弧度制，而不用角度制. 例如我们用 $\sin\frac{\pi}{6}$ 而不用 $\sin 30°$，用 $\cos\frac{\pi}{2}$ 而不用 $\cos 90°$，$\sin 1$ 则表示 1 弧度角的正弦值. 角度与弧度之间可利用公式 π 弧度 $=180°$ 来换算.

函数 $y=\sin x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[-1,1]$，奇函数，以 2π 为周期，有界(图 1-16 为一个周期内的图像).

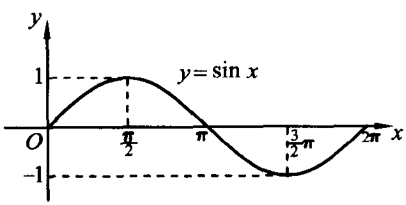

图 1-16

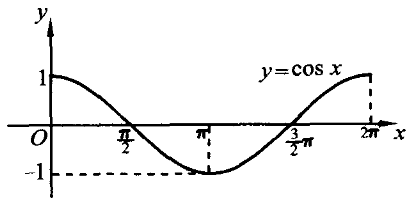

图 1-17

函数 $y=\cos x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[-1,1]$，偶函数，以 2π 为周期，有界(图 1-17 为一个周期内的图像).

函数 $y=\tan x$ 的定义域为 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，值域为 $(-\infty,+\infty)$，奇函数，以 π 为周期，在每一个连续区间内单调增加，以直线 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 为渐近线(如图 1-18).

函数 $y=\cot x$ 的定义域为 $x\neq k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，值域为 $(-\infty,+\infty)$，奇函数，以 π 为周期，在每一个连续区间内单调减少，以直线 $x=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 为渐近线(如图 1-19).

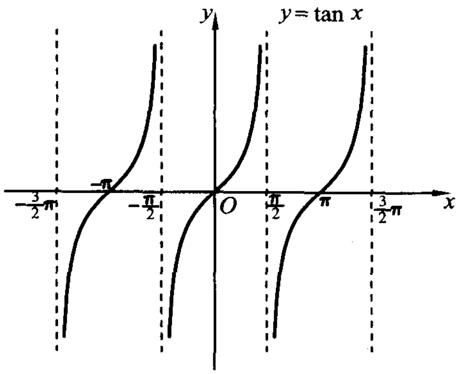

图 1-18

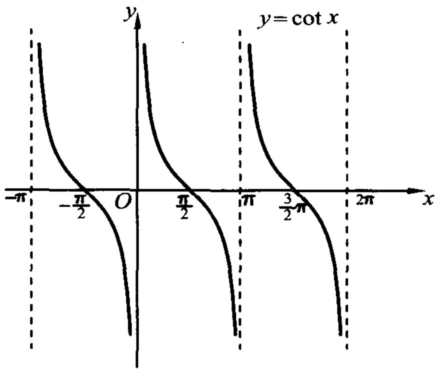

图 1-19

关于函数 $y=\sec x$ 和 $y=\csc x$ 我们不作详细讨论，只需知道它们分别满足关系式 $\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$ 和 $\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$.

6. **反三角函数**

常用的反三角函数有四个：

(1)反正弦函数 $y=\arcsin x$；

(2)反余弦函数 $y=\arccos x$；

(3)反正切函数 $y=\arctan x$；

(4)反余切函数 $y=\mathrm{arccot}\, x$；

它们是作为相应三角函数的反函数定义出来的.

$y=\arctan x$ 的含义是正弦值等于 x 的角. 与三角函数相反，这里自变量 x 表示正弦值，而 y 则表示角. 准确地说，是角的弧度数. 例如 $y=\arcsin\dfrac{1}{2}$ 表示正弦值为 $\dfrac{1}{2}$ 的角，我们知道 $\dfrac{\pi}{6}$ 的正弦值是 $\dfrac{1}{2}$，所以有 $y=\dfrac{\pi}{6}$. 但实际上，$y=2k\pi+\dfrac{\pi}{6}$，$y=2k\pi+\dfrac{5\pi}{6}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 的正弦值都等于 $\dfrac{1}{2}$. 为了避免 $y=\arcsin x$ 的多值性，我们限定了一个区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$，叫做反正弦函数的**主值区间**. 在这个区间内，正弦取某个值的角就被唯一确定. 例如在主值区间内，正弦值为 $\dfrac{1}{2}$ 的角只能是 $\dfrac{\pi}{6}$. $\arcsin x$ 则表示主值区间内的反正弦.

类似的，对其他几种反三角函数都规定了相应的主值区间，保证了它们的单值性. 当然由于函数的性质不同，它们的主值区间就不同.

$y=\arcsin x$，定义域是 $[-1,1]$，值域是 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$，是单调增加的奇函数，有界（如图 1-20）；

$y=\arccos x$，定义域是 $[-1,1]$，值域是 $[0,\pi]$，是单调减少函数，有界（如图 1-21）；