



数学 2007

高考核潜艇

●● 考点全程训练

跟踪高考试卷
精编对应试题
开发学生潜能

紧扣高考大纲
设计全程航道
到达胜利彼岸

丛书主编 俞启瑞

本册主编 江高文



湖北教育出版社

高考核潜艇丛书

数学 2007

高考核潜艇

●● 考点全程训练

丛书主编：俞启瑞

本册主编：江高文

副主编：陆先泽

编委：杨海林

张雄钢

杨素芳

王琴

周先华

马春华

吴海林

张德顺

姜荣青

喻兰

李俊

王惠珍

刘国发

娄德义

朱杏平

闵玲

秦俭

明知白

左俊凤

陈忠

卢飞

余国安

湖北教育出版社

(鄂)新登字 02 号

图书在版编目(CIP)数据

数学 2007 高考核潜艇一考点全程训练/江高文主编. —武汉:湖北教育出版社,2006

ISBN 7-5351-4581-7

I. 数… II. 江… III. 数学课-高中-习题-升学参考资料
IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 071845 号

责任编辑:恒 文

出版 发行:湖北教育出版社
网 址:<http://www.hbedup.com>

武汉市青年路 277 号
邮编:430015 电话:027-83619605

经 销:新 华 书 店
印 刷:湖北峰迪印务有限公司
开 本:880mm×1230mm 1/16
版 次:2006 年 7 月第 1 版
字 数:930 千字

(430040·武汉市金山大道 1304 号)
1 插页 27.25 印张
2006 年 7 月第 1 次印刷

ISBN 7-5351-4581-7/G·3822

定价:39.00 元

如印刷、装订影响阅读,承印厂为你调换

钻研思维方法，
提高数学水平。

王梓坤

2005.8.25.

我国著名数学家、中国科学院院士、原北京师范大学校长王梓坤教授的亲笔题词。

向你推荐一本好书——代序言

高三复习教学既是一门科学也是一门艺术,数学总复习尤其如此。如何让高三师生轻松驾驭备考之舟,顺利驶向成功的彼岸。这是广大高三数学教师普遍关注的问题。可喜的是,全国知名数学特级教师、湖北省优秀数学教师江高文老师的新作《高考数学核潜艇》对这个问题作了精辟的诠释。书中教学理念先进,题型设计新颖,方法简捷精妙,语言生动有趣,思维过程详实,是高三数学总复习不可多得的一本精品资料。

时代的发展,科技的进步,对人的素养提出了更高的要求,对基础教育提出了更高的要求,对中小学的数学教育也提出了新的更高的要求。中学数学教师是数学教改第一线的生力军,每个数学教师的工作是既要培养人才,又要出理论成果。教学与科研相结合,这也是新时代对数学教师的基本要求。

古语云:师者,传道、授业、解惑也。如果说过去认为解惑只是解答疑难,那么今天,解惑也应意味着启迪思维方法。作为数学教师,要启迪学生领悟数学思维和学会数学的思维方式,在日常的教学中以“润物细无声”的方式渗透数学的精神、思想和方法。既可以提高学生的人文修养,又可以收到育人的积极成效。应该说,《高考数学核潜艇》正是体现上述精神的有益的尝试。对于研究数学思维的同志,也可以从中找到许多闪烁着学生思维火花的实例,受益良多。

从认识角度讲,学生是认知的主体。但也要看到,中小學生这个主体是尚不成熟的主体,是需要教师帮助引导和规范管理的主体。在十几年的时间内,要学生继承人类几千年的文化精华,为以后认识和改造世界打下良好的基础,不应该也不允许让学生花大量的时间盲目地去探索,因此教师的主导作用是极端重要的。人们到自然保护区去旅游,要在规定的时间内顺利完成旅游任务,游客是主体,但导游的主导作用极端重要。好的导游,经验丰富,谈笑风生,人文内涵丰富,张弛有致,使游客将景物览全看够且不感劳累。这是引导游客平安、顺利、满意地完成旅游任务的保证。在一定意义下,数学教师正是数学大花园中的“导游”。可以毫不过分地说,教师与学生同是数学教学活动中的主体,教师的主导作用,有如行船的舵手,起着掌握、调控课堂教学思维方向的作用。学生的主体作用发挥得如何,主要是看在教师(主导者)的启迪下学生思维活动的程度和效果。教师的启发式教学是主导的根本,学生的思维受到启迪,领悟了思维的真谛是目的。这样一来,学生的主体地位才真正地得到了尊重。没有思维启发性的教学实质是“满堂灌”。在课堂上学生积极主动的思维活动是主体地位的集中体现。

数学教学应是展示数学思维活动过程的教学,高三数学总复习教学更是如此,因为数学思维能力是数学诸项能力的核心。未来社会的人应是“学会数学思维方式”的人。这恰恰说明,数学是思维的科学,数学是锻炼思维的体操。我们每位数学教师都把数学思维研究作为己任,在研究数学思维上下功夫,这是提高学生数学创新能力、应用数学解决实际问题能力的基础。因此,坚持深入地发展学生数学思维能力的理论与实验研究,必将会推动我国的中小学数学教育在新世纪提高到一个全新的水平。

首都师范大学 周春荔

2006年1月25日



前言

感谢您——2007 届的高三老师及学生选用了本书。让我们成为好朋友，共同开发学生的潜能。

对于相当多的高三学生而言，会觉得数学枯燥无味，学起来很苦很累。我们将丛书命名为《高考核潜艇》，会让您感到新奇，学起来会倍感轻松愉快。

将本书命名为《数学 2007 高考核潜艇·考点全程训练》(以下简称为《核潜艇》)，是基于以下的一些理由。

核潜艇是以核能为动力的潜水艇。它的武器装备先进，具有高度的隐蔽性和机动性，它不仅航速快，而且续航力大。它集当今世界高、精、尖科学技术和工业成果于一身，既是重量级的战术武器，又被誉为“第二次核打击力量”，是一个国家综合实力强大的象征。将本书命名为《核潜艇》，表明编者希望本书成为倍受您喜爱的高考复习用书，也表明编者决心要把它打造成战斗力极强的精品，让您的学生具有应对高考数学的更强的能力。

隐身性能好是核潜艇的突出特点。本书即按照核潜艇的这一特色来设计相关的内容，不张扬不虚夸，扎扎实实。我们相信，在您的指导下，经过一个一个航次的训练，您的学生的潜能就会得到开发，应变能力就会大大加强。

干扰少、噪音小是核潜艇的又一特点。本书也具有这一特点。全书删繁就简，选题典型精粹，不做无用功，能让考生以最轻松、最快乐的方式面对高考。

战斗力强是核潜艇的主要特点。本书以“大纲”为依据，涵盖了数学高考的全部考点；以能力立意，着重于开发考生的巨大潜能，既不超纲，也无遗漏。所选试题有较高的品位，既注重基础性，又重视灵活性、创新性；既注意保持传统性，又注意新颖性、前瞻性；试题设计合理、科学，其难度与高考保持一致，具有良好的区分度；能以一当十，力求让每个题都能发挥最大的效益，“让每枚导弹足以击沉一艘航母”。

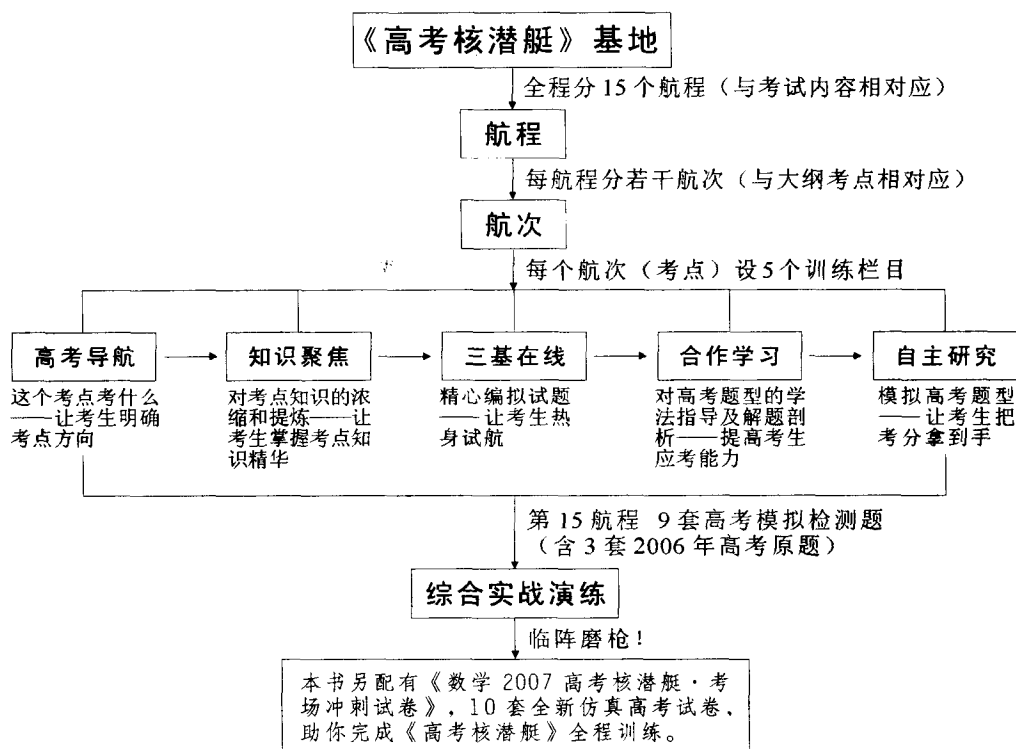
核潜艇还有一个特点就是水下航速高，攻击手段强，快进快退，灵活自如。本书也借鉴了这一特点，试题取材广泛，题型多样，解答方式灵活，训练手段多样便捷，我们相信，经过《核潜艇》的全程训练，您就会无往而不胜！

长航能力对核潜艇至关重要。数学的全程备考必须要有事先的整体规划。我们的《核潜艇》是以“套餐”的模式组编的高考复习丛书的总称。今后我们将陆续推出与之配套的其它复习用书供您挑选。

核潜艇武器装备先进的特点在《核潜艇》中处处可见。本书的编写严格以国家标准(数学科《考试大纲》《新课程标准》)为依据，在收集、整理了历年来高考以及各地预考、调考中涉

及到的有关知识与信息的基础上,构建总体结构,设置栏目。全书由 15 大航程组成,含 90 个航次,9 套实战综合测试卷,涵盖了 2006 年《考试大纲》的全部考点。其中,每个考点又设置“高考导航”、“知识聚焦”、“三基在线”、“合作学习”、“自主研究”5 个栏目。这 5 个栏目的设计是独到的、系统的、科学的、精要的、先进的,它紧紧扣住了考纲,摒弃了一切杂芜烦琐的枝枝节节。经过这 5 个栏目的训练,定会让您在备考复习中取得事半功倍的效果。

为了便于用好这本书,现将《数学高考核潜艇》的训练全程及其要解决的问题,按其训练进程图示如下:



本书录入了 2006 年高考的最新题型和 2006 年各地的调研试题,反映了高考命题研究的最新成果。

为了方便教师和学生使用,本书将全部习题的分析和解答与题目分离,另装成册,以便给师生留下更大的自主发挥空间。

《数学高考核潜艇》既适用于理科学生,又适用于文科学生;既可应对全国卷,又可用于自主命题的省市卷。

全国知名数学特级教师、湖北省优秀数学教师江高文老师为本书主编。我国著名数学家、中国科学院院士、原北京师范大学校长王梓坤教授以及我国著名数学教育家、首都师范大学周春荔教授对本书给予了充分肯定和高度评价,并热情向读者推荐。借本书出版之际,谨向他们以及对本书的编写和出版付出辛勤劳动的专家和老师表示崇高的敬意和衷心的感谢!

限于学力与识见,书中难免有不足之处,我们热烈欢迎您提出宝贵的意见。

编者

二〇〇六年六月

目录

第一航程 集合与简易逻辑

第 1 航次 集合的概念与运算	3
第 2 航次 含绝对值不等式和一元二次不等式的解法	7
第 3 航次 逻辑联结词与四种命题	10
第 4 航次 充要条件	13
第 5~6 航次 综合检测 1	16

第二航程 函数

第 7 航次 函数及其表示法	20
第 8 航次 函数的定义域、值域及最值	23
第 9 航次 函数的单调性、奇偶性	26
第 10 航次 反函数	29
第 11 航次 二次函数	32
第 12 航次 指数函数与对数函数	35
第 13 航次 函数的图象	39
第 14~15 航次 综合检测 2	42

第三航程 数列

第 16 航次 数列的概念	46
第 17 航次 等差数列	49
第 18 航次 等比数列	52
第 19 航次 等差数列与等比数列的综合问题	55
第 20 航次 特殊数列求和	58
第 21~22 航次 综合检测 3	61

第四航程 三角函数

第 23 航次 三角函数的有关概念	66
第 24 航次 同角三角函数的基本关系式及诱导公式	69
第 25 航次 两角和与差的三角函数	72
第 26 航次 三角函数的图象	76
第 27 航次 三角函数的性质(一)	80
第 28 航次 三角函数的性质(二)	83

第 29~30 航次 综合检测 4	86
第五航程 平面向量	
第 31 航次 向量的概念及基本运算	91
第 32 航次 平面向量的坐标运算	94
第 33 航次 平面向量的数量积	97
第 34 航次 线段的定比分点和图形平移	100
第 35 航次 解斜三角形	103
第 36~37 航次 综合检测 5	106
第六航程 不等式	
第 38 航次 不等式的概念与性质	111
第 39 航次 算术平均数与几何平均数	113
第 40 航次 不等式的证明	116
第 41 航次 不等式的解法	119
第 42 航次 含绝对值的不等式	122
第 43~44 航次 综合检测 6	124
第七航程 直线和圆的方程	
第 45 航次 直线方程	129
第 46 航次 两条直线的位置关系	132
第 47 航次 简单的线性规划	135
第 48 航次 曲线与方程	139
第 49 航次 圆的方程	142
第 50~51 航次 综合检测 7	144
第八航程 圆锥曲线方程	
第 52 航次 椭圆	149
第 53 航次 双曲线	154
第 54 航次 抛物线	157
第 55 航次 直线与圆锥曲线的位置关系	160
第 56 航次 轨迹问题	164
第 57~58 航次 综合检测 8	167
第九航程 直线、平面、简单几何体(A、B)	
第 59 航次 平面及空间直线	171
第 60 航次 直线和平面平行与平面和平面平行	174
第 61 航次 直线和平面垂直与平面和平面垂直	178

第 62 航次	空间向量及其运算	181
第 63 航次	空间向量的坐标运算	185
第 64 航次	空间的角	188
第 65 航次	空间距离	193
第 66 航次	棱柱与棱锥	196
第 67 航次	正多面体及球	199
第 68~69 航次	综合检测 9	202
第十航程 排列、组合和二项式定理		
第 70 航次	两个计数原理	206
第 71 航次	排列与组合	209
第 72 航次	二项式定理	211
第 73~74 航次	综合检测 10	213
第十一航程 概率		
第 75 航次	随机事件的概率	217
第 76 航次	互斥事件有一个发生的概率	220
第 77 航次	相互独立事件同时发生的概率	223
第 78~79 航次	综合检测 11	226
第十二航程 概率与统计(理科)		
第 80 航次	离散型随机变量的分布列、期望与方差	230
第 81 航次	统计	233
第十二航程 概率与统计(文科)		
第 80 航次	概率与统计	237
第十三航程 极限与导数(理科)		
第 82 航次	数学归纳法	242
第 83 航次	数列的极限	245
第 84 航次	函数的极限与函数的连续性	248
第 85 航次	导数的概念及运算	251
第 86 航次	导数的应用	254
第十三航程 极限与导数(文科)		
第 81 航次	极限与导数	257
第十四航程 复数(理科)		
第 87 航次	复数的有关概念	261
第 88 航次	复数的运算及数系的扩充	263

第 89~90 航次 十二~十四航程综合检测 12 265

第十五航程 综合实战演练

卷一 2006 年高考全国卷 I 理科试题 269

卷二 2006 年高考全国卷 I 文科试题 271

卷三 2006 年高考湖北卷理科试题 274

卷四 2006 年高考湖北卷文科试题 276

卷五 2006 年高考天津卷理科试题 279

卷六 2006 年高考广东卷 B 类试题 281

卷七 武汉市 2006 届高考模拟试卷(一) 284

卷八 武汉市 2006 届高考模拟试卷(二) 287

卷九 武汉市 2006 届高考模拟试卷(三) 289

第
1
航
程

集 合
与
简 易 逻 辑



航 程 导 言

集合与简易逻辑这部分在高考中每年总有题目出现,一般都是基础题,有时也有集合与映射等知识综合的深度较浅的小型综合题,充要条件与其他单元的综合题等,大都活而不难,主要考查基本概念和基本运算.



1. 高考试题中,对集合从两个方面进行考查,一方面是考查对集合概念的认识和理解水平,如对集合中涉及的特定字母和符号、元素与集合间的关系,集合与集合间的比较,主要表现在对集合的识别和表达上;另一方面,则是考查学生对集合知识应用的水平.集合知识的应用主要是和数学上其他知识的综合应用,题目多数是一个固定的集合和非固定的集合满足某种集合间的运算关系,要明确不固定集合中的参数的值.如求方程组、不等式组及联立条件组的解集,以及设计、使用集合解决问题.

2. 三个“二次”,即二次函数、一元二次方程、一元二次不等式,它们是中学数学的重要内容,具有丰富的内涵和密切的联系.同时也是研究包括二次曲线在内的许多内容的工具.高考试题中近一半的试题与这三个“二次”问题有关.

3. 基本的逻辑知识是人们认识和研究问题不可缺少的工具.高考中主要考查命题与命题之间的逻辑关系以及判断是非的能力和推理能力,这里尤其要重视反证法的应用.

第一航程 集合与简易逻辑

复习备考方略

在复习中首先要把握基础知识,深刻理解基本知识、基本数学思想和基本数学方法,如数形结合思想,借助于数轴或利用文氏图解题,分类讨论思想、补集思想等,同时应多注意培养自己严密的运算能力和逻辑推理能力.

复习中应注意以下二点:

1. 复习集合,可以从两个方面入手,一方面是集合的概念之间的区别与联系,另一方面是对集合知识的应用,关于集合的概念,主要是把握集合与元素,集合与集合之间的关系,弄清有关的术语和符号,对于集合的应用,可以考虑以下几个方面的问题:

(1) 利用集合语言表述问题,利用集合的思想方法解决问题.

(2) 有关不等式的解,涉及到集合的运算及集合的表示.

(3) 逻辑联结词“或”“且”“非”与集合中的“并”“交”“补”是相关的,二者相互对照可加深对双方的认识和理解.

(4) 在数学的其他内容及日常生活中的应用.

2. 复习逻辑知识时,要抓住所学的几个知识点,通过解决一些简单的问题达到理解、掌握逻辑知识的目的.



第1航次 集合的概念与运算

【高考导航】

集合知识是高等数学的重要基础知识,集合语言是重要的数学语言.作为工具,集合渗透于中学数学的各个方面,函数、方程、不等式、排列组合、曲线及动点轨迹等主干知识更常与集合知识网络交汇,提高学生对数学本质的认识和数学语言的阅读、理解能力.

集合是高考每年必考的知识点之一,主要考查集合的概念、交、并、补运算及有关术语、符号,数轴与韦恩图.

题型多为选择题、填空题中的容易题,且多在第1题位置,但以集合语言为工具的中等难度的选择题、填空题可能出现,也可能出现中等难度的解答题.

映射是深入认识函数概念的基础,是沟通两个集合中元素之间关系的桥梁,是近代数学的重要概念之一,但抽象性强,中学不宜深入研究,考纲要求为“了解”层次.近年已经两次在容易题中考查,再加大难度的可能性不大.

【知识聚焦】

一、集合的基本概念及表示方法

1. 集合与元素

一般地,某些指定的对象集在一起就成为一个集合,也简称集,通常用大写的拉丁字母 $A, B, C, \dots$ 表示.集合中的每一对象叫做集合的一个元素,通常用小写的拉丁字母 $a, b, c, \dots$ 表示.

2. 集合的分类

集合按元素多少可分为:有限集(元素个数是有限个),无限集(元素个数是无限个),空集(不含任何元素).也可按元素的属性分,如:数集(元素是数),点集(元素是点)等.

3. 集合中元素的性质

集合有两个特性:整体性与确定性.

对于一个给定的集合,它的元素具有确定性、互异性、无序性.

4. 集合的表示方法

① 列举法;② 描述法;③ 图示法.

二、元素与集合、集合与集合之间的关系

1. 元素与集合是“ $\in$ ”或“ $\notin$ ”(或“ $\ni$ ”)的关系

元素与集合之间是个体与整体的关系,不存在大小与相等关系.

2. 集合与集合之间的关系

(1) 包含关系

① 如果 $x \in A \Rightarrow x \in B$, 则集合 A 是集合 B 的子集,记为 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$.

显然 $A \subseteq A, \emptyset \subseteq A$.

② 如果集合 S 含有我们所研究的各个集合的全部元素,这个集合就可以看做一个全集.全集通常用 U 表示.

显然,我们所研究的各个集合都是这个全集的子集.

(2) 相等关系

对于集合 A, B , 如果 $A \subseteq B$, 同时 $B \subseteq A$, 那么称集合 A 等于集合 B , 记作 $A = B$.

(3) 真子集关系

对于集合 A, B , 如果 $A \subseteq B$, 并且 $A \neq B$, 我们就说集合 A 是集合 B 的真子集.记作 $A \subset B$ (或 $B \supset A$).

显然,空集是任何非空集合的真子集.

(4) 运算关系

① 交集:由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合叫做集合 A 与 B 的交集,记为 $A \cap B$, 即 $A \cap B = \{x | x \in A, \text{且 } x \in B\}$.

② 并集:由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合叫做集合 A 与 B 的并集,记为 $A \cup B$, 即 $A \cup B = \{x | x \in A, \text{或 } x \in B\}$.

③ 补集:一般地设 S 是一个集合, A 是 S 的一个子集(即 $A \subseteq S$), 由于 S 中所有不属于 A 的元素组成的集合,叫做子集 A 在全集 S 中的补集(或余集),记作 $\complement_S A$. 即 $\complement_S A = \{x | x \in S, \text{且 } x \notin A\}$.

三、集合之间的运算性质

1. 交集的运算性质

$A \cap B = B \cap A, A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B, A \cap A = A, A \cap \emptyset = \emptyset, A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$.

2. 并集的运算性质

$A \cup B = B \cup A, A \cup B \supseteq A, A \cup B \supseteq B, A \cup A = A,$
 $A \cup \emptyset = A, A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B.$

3. 补集的运算性质

$\complement_S(\complement_S A) = A, \complement_S \emptyset = S, A \cap \complement_S A = \emptyset,$
 $A \cup \complement_S A = S, \complement_S(A \cap B) = (\complement_S A) \cup (\complement_S B), \complement_S(A \cup B) =$
 $(\complement_S A) \cap (\complement_S B).$

四、有限集合的子集个数公式

设有限集合 A 中有 n 个元素, 则 A 的子集个数有: $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$ 个, 其中真子集的个数为 $2^n - 1$ 个, 非空子集个数为 $2^n - 1$, 非空真子集个数为 $2^n - 2$ 个.

【三基在线】

1. (2006 年广州市高三 3 月模拟) 已知集合 $M = \{x | x^2 - 1 < 0\}, N = \left\{x \mid \frac{x}{x-1} < 0\right\}$, 则下列关系中正确的是

()

- A. $M=N$ B. $M \subsetneq N$
 C. $N \subsetneq M$ D. $M \cap N = \emptyset$

2. (2006 年武汉市高三二月调考) 若 $\emptyset \subsetneq \{x | x^2 \leq a, a \in \mathbf{R}\}$, 则实数 a 的取值范围是

()

- A. $(0, +\infty)$ B. $[0, +\infty)$
 C. $(-\infty, 0]$ D. $(-\infty, 0)$

3. (2006 年高考山东卷) 定义集合运算: $A \odot B = \{z | z = xy (x+y), x \in A, y \in B\}$, 设集合 $A = \{0, 1\}, B = \{2, 3\}$, 则集合 $A \odot B$ 的所有元素之和为

()

- A. 0 B. 6 C. 12 D. 18

4. 先后抛掷两枚骰子, 点数和为 7 的所有可能用集合表示为

5. 已知集合 $S = \{3, a\}, T = \{x | x^2 - 3x < 0, x \in \mathbf{Z}\}, S \cap T = \{1\}$, 又 $P = S \cup T$, 那么集合 P 的子集的个数是

【合作学习】

题型一 集合的概念及表示方法

【例 1】求下列集合 M, P 的交集 $M \cap P$.

- (1) $M = \{(x, y) | y^2 = x + 1\}, P = \{(x, y) | y^2 = -2(x - 3)\};$

- (2) $M = \{x | y^2 = x + 1\}, P = \{x | y^2 = -2(x - 3)\};$

- (3) $M = \{y | y^2 = x + 1\}, P = \{y | y^2 = -2(x - 3)\}.$

【解】(1) 因为集合 M, P 的代表元素是 (x, y) , 是点的集合, 故欲求 $M \cap P$, 只要解方程组

$$\begin{cases} y^2 = x + 1, \\ y^2 = -2(x - 3). \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} x = \frac{5}{3}, \\ y = \pm \frac{2\sqrt{6}}{3}. \end{cases}$$

$$\therefore M \cap P = \left\{ \left(\frac{5}{3}, \frac{2\sqrt{6}}{3} \right), \left(\frac{5}{3}, -\frac{2\sqrt{6}}{3} \right) \right\}.$$

- (2) 集合 M, P 的代表元素是 x , 知 $M = \{x | x \geq -1\}, P = \{x | x \leq 3\},$

$$\therefore M \cap P = \{x | -1 \leq x \leq 3\}.$$

- (3) 集合 M, P 的代表元素是 y , 知 $M = \mathbf{R}, P = \mathbf{R},$

$$\therefore M \cap P = \mathbf{R}.$$

反馈演练 1 用列举法把下列集合表示出来:

$$(1) A = \left\{ x \in \mathbf{N} \mid \frac{9}{9-x} \in \mathbf{N} \right\};$$

$$(2) B = \left\{ \frac{9}{9-x} \in \mathbf{N} \mid x \in \mathbf{N} \right\};$$

$$(3) C = \{y | y = -x^2 + 6, x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{N}\};$$

$$(4) D = \{(x, y) | y = -x^2 + 6, x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{N}\};$$

$$(5) E = \left\{ x \mid \frac{p}{q} = x, p+q=5, p \in \mathbf{N}, q \in \mathbf{N}^* \right\}.$$

题型二 集合的基本运算

【例 2】已知 $A = \{x | x^2 - x - 6 < 0\}, B = \{x | x^2 + 2x - 8 > 0\}, C = \{x^2 - 4ax + 3a^2 < 0\}$, 试确定 a 的取值范围分别使 (1) $C \supseteq A \cap B$; (2) $C \supseteq (\complement_{\mathbf{R}} A) \cap (\complement_{\mathbf{R}} B)$ 成立.

【解】 $A = \{x | -2 < x < 3\}, B = \{x | x < -4, \text{ 或 } x > 2\}$

$\therefore A \cap B = \{x | 2 < x < 3\}, A \cup B = \{x | x < -4, \text{ 或 } x > -2\}$

$$(\complement_{\mathbf{R}} A) \cap (\complement_{\mathbf{R}} B) = \complement_{\mathbf{R}}(A \cup B) = \{x | -4 \leq x \leq -2\}$$

$$\text{而 } C = \{x | (x-3a)(x-a) < 0\}$$

① 当 $a > 0$ 时, $C = \{x | a < x < 3a\}$, 由 $C \supseteq A \cap B$, 得 $1 \leq a \leq 2.$

由 $C \supseteq (\complement_{\mathbf{R}} A) \cap (\complement_{\mathbf{R}} B)$ 得 a 的值不存在.

② 当 $a = 0$ 时, $C = \emptyset$, 无解.

③ 当 $a < 0$ 时, $C = \{x | 3a < x < a\}$, 由 $C \supseteq A \cap B$ 得 a 的值不存在.

$$\text{由 } C \supseteq (\complement_{\mathbf{R}} A) \cap (\complement_{\mathbf{R}} B) \text{ 得 } -2 < a < -\frac{4}{3}.$$

综上, 所求 a 的取值范围分别是:

$$1 \leq a \leq 2 \text{ 和 } -2 < a < -\frac{4}{3}.$$

反馈演练 2 若集合 $A = \{x | x^2 + 2x - 8 < 0\}, B = \{x | |x+2| > 3\}, C = \{x | x^2 - 2mx + m^2 - 1 < 0\}, m \in \mathbf{R}$

(1) 若 $A \cap C = \emptyset$, 求 m 的集合;

(2) $(A \cap B) \subseteq C$, 求 m 的集合.

题型三 “数形结合”思想的应用

【例 3】 (2005 年高考全国卷 I) 设 I 为全集, S_1, S_2, S_3 是 I 的三个非空子集且 $S_1 \cup S_2 \cup S_3 = I$, 则下面论断正确的是 ()

- A. $\complement_I S_1 \cap (S_2 \cup S_3) = \emptyset$
- B. $S_1 \subseteq (\complement_I S_2 \cap \complement_I S_3)$
- C. $\complement_I S_1 \cap \complement_I S_2 \cap \complement_I S_3 = \emptyset$
- D. $S_1 \subseteq (\complement_I S_2 \cup \complement_I S_3)$

【解】 如图 1-1 设矩形 $ABCD$ 表示集合 S_1 , 矩形 $BGFE$ 表示集合 S_2 , 梯形 $ACGH$ 表示集合 S_3 .

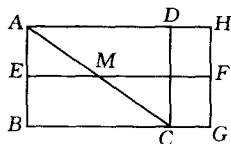


图 1-1

对于 A: $\complement_I S_1$ 是矩形 $CDHG$ 表示的集合, $S_2 \cup S_3$ 是多边形 $AMEBGH$ 表示的集合, 显然 $\complement_I S_1 \cap (S_2 \cup S_3) = \complement_I S_1 \neq \emptyset$. $\therefore$ A 错.

对于 B: $\complement_I S_2 \cap \complement_I S_3 = \complement_I (S_2 \cup S_3)$ 是 $\triangle AEM$ 表示的集合, 此时 $\complement_I S_2 \cap \complement_I S_3 \subseteq S_1$, $\therefore$ B 错.

对于 C: 由文氏图可知: $\complement_I S_1 \cap \complement_I S_2 \cap \complement_I S_3 = \complement_I S_1 \cap \complement_I (S_2 \cup S_3) = \emptyset$, $\therefore$ C 正确.

对于 D: $\complement_I S_2 \cup \complement_I S_3 = \complement_I (S_2 \cap S_3)$ 表示 $\triangle ABC$ 与梯形 $AMFH$ 表示的集合的并集, 与集合 S_1 不具有包含关系, $\therefore$ D 错.

另解: (特殊化) 取 $S_1 = \{1, 2, 3\}$, $S_2 = \{2, 3, 4\}$, $S_3 = \{3, 4, 5\}$, 则 $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

于是 $\complement_I S_1 \cap (S_2 \cup S_3) = \{4, 5\} \neq \emptyset$, $\therefore$ A 错.

$\complement_I S_2 \cap \complement_I S_3 = \{1\} \subseteq S_1$, $\therefore$ B 错.

又 $\because \complement_I S_2 \cup \complement_I S_3 = \{1, 2, 5\}$, 而 $S_1 \not\subseteq \{1, 2, 5\}$,

$\therefore$ D 错.

故应选 C.

反馈演练 3 设全集 U , 它的子集为 A, B , 且 $A \subseteq B$, 则以下表示正确的是 ()

- A. $\complement_U A \subseteq \complement_U B$
- B. $\complement_U A \supseteq \complement_U B$
- C. $\complement_U A \supseteq \complement_U B$
- D. $\complement_U A \supsetneq \complement_U B$

题型四 补集思想的应用

【例 4】 已知集合 $A = \{x | x^2 - 4ax + 2a + 6 = 0\}$, $B = \{x | x < 0\}$, 若 $A \cap B \neq \emptyset$, 求 a 的取值范围.

【解】 由 $B = \{x | x < 0\}$, $A \cap B \neq \emptyset$ 可知, 方程 $x^2 - 4ax + 2a + 6 = 0$ 至少有一个负根, 因此本题要分: 有两个负根、一负根一零根、一负根一正根这三种情况求解, 比较麻烦, 这时, 我们不妨考虑问题的反面: 方程 $x^2 - 4ax + 2a$

$+ 6 = 0$ 没有负根的情形.

首先由 $\Delta \geq 0$ 求出全集 U ,

由 $\Delta = (-4a)^2 - 4(2a + 6) \geq 0$, 得

$$(a + 1)(2a - 3) \geq 0.$$

$$\therefore \begin{cases} a + 1 \geq 0, \\ 2a - 3 \geq 0, \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a + 1 \leq 0, \\ 2a - 3 \leq 0, \end{cases}$$

解得 $a \geq \frac{3}{2}$ 或 $a \leq -1$.

$$\therefore U = \left\{ a \mid a \leq -1, \text{ 或 } a \geq \frac{3}{2} \right\}.$$

由方程 $x^2 - 4ax + 2a + 6 = 0$ 没有负根, 得

$$\begin{cases} \Delta \geq 0, \\ x_1 + x_2 = 4a \geq 0, \\ x_1 x_2 = 2a + 6 \geq 0, \end{cases} \text{ 解得 } a \geq \frac{3}{2}.$$

设 $A = \left\{ a \mid a \geq \frac{3}{2} \right\}$, 则 $\complement_U A = \{a | a \leq -1\}$,

即所求的 a 的范围是 $\{a | a \leq -1\}$.

反馈演练 4 设全集为 R , $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, $M = \{x | f(x) \neq 0\}$, $N = \{x | g(x) \neq 0\}$, 那么集合 $\{x | f(x)g(x) = 0\}$ 等于 ()

- A. $\complement_R M \cap \complement_R N$
- B. $\complement_R M \cap N$
- C. $M \cup \complement_R N$
- D. $\complement_R M \cup \complement_R N$

题型五 分类讨论思想的应用

【例 5】 已知集合 $A = \{x | x^2 + 3x + 2 \geq 0\}$, $B = \{x | mx^2 - 4x + m - 1 > 0, m \in R\}$, 若 $A \cap B = \emptyset$, 且 $A \cup B = A$, 求 m 取值范围.

【解】 由已知 $A = \{x | x^2 + 3x + 2 \geq 0\}$, 得

$$A = \{x | x \leq -2, \text{ 或 } x \geq -1\}.$$

由 $A \cap B = \emptyset$, 得

(1) $\because A = \emptyset$, $\therefore B = \emptyset$;

(2) $\because A = \{x | x \leq -2 \text{ 或 } x \geq -1\}$,

$\therefore B = \{x | -2 < x < -1\}$.

另一方面, $A \cup B = A$, $\therefore B \subseteq A$, 于是上面的 (2) 不成立, 否则 $A \cup B = R$, 与题设 $A \cup B = A$ 矛盾.

由上面分析, 知 $B = \emptyset$.

由已知 $B = \{x | mx^2 - 4x + m - 1 > 0, m \in R\}$, 结合 $B = \emptyset$, 得: 对一切 $x \in R$, $mx^2 - 4x + m - 1 \leq 0$ 恒成立, 于是, 有

$$\begin{cases} m < 0 \\ 16 - 4m(m - 1) \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{解得 } m \leq \frac{1 - \sqrt{17}}{2}.$$

$\therefore m$ 的取值范围是 $\left\{m \mid m \leq \frac{1-\sqrt{17}}{2}\right\}$.

反馈演练 5 已知集合 $A = \{x \mid x^2 + (p+2)x + 1 = 0, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{x \mid y = 2^{1-2x}, x \in \mathbf{R}\}$, 若 $A \cap B = \emptyset$, 求实数 p 的取值范围.

【自主探究】

- (2005 高考湖北卷) 设 P, Q 为两个非空实数集合, 定义集合 $P+Q = \{a+b \mid a \in P, b \in Q\}$. 若 $P = \{0, 2, 5\}$, $Q = \{1, 2, 6\}$. 则 $P+Q$ 中元素的个数是 ()
A. 9 B. 8
C. 7 D. 6
- (2006 高考陕西卷·文) 已知集合 $P = \{x \in \mathbf{N} \mid 1 \leq x \leq 10\}$, 集合 $Q = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + x - 6 = 0\}$, 则 $P \cap Q$ 等于 ()
A. $\{2\}$ B. $\{3\}$
C. $\{-2, 3\}$ D. $\{-3, 2\}$
- (2005 高考浙江卷) 设 $f(n) = 2n+1 (n \in \mathbf{N})$, $P = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Q = \{3, 4, 5, 6, 7\}$. 记 $\hat{P} = \{n \in \mathbf{N} \mid f(n) \in P\}$, $\hat{Q} = \{n \in \mathbf{N} \mid f(n) \in Q\}$, 则 $(\hat{P} \cap \mathbb{N}_N \hat{Q}) \cup (\hat{Q} \cap \mathbb{N}_N \hat{P}) =$ ()
A. $\{0, 3\}$ B. $\{1, 2\}$
C. $\{3, 4, 5\}$ D. $\{1, 2, 6, 7\}$
- (2006 年高考安徽卷·理) 设集合 $A = \{x \mid |x-2| \leq 2, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{y \mid y = -x^2, -1 \leq x \leq 2\}$ 则 $\mathbb{C}_R(A \cap B)$ 等于 ()
A. $\mathbf{R}$ B. $\{x \mid x \in \mathbf{R}, x \neq 0\}$
C. $\{0\}$ D. $\emptyset$
- (2006 年高考浙江卷·理) 函数 $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ 满足 $f(f(x)) = f(x)$, 则这样的函数个数共有 ()
A. 1 个 B. 4 个
C. 8 个 D. 10 个
- (2004 年高考湖北卷) 设 A, B 为两个集合. 下列四个命题: ① $A \not\subseteq B \Leftrightarrow$ 对任意 $x \in A$, 有 $x \notin B$;
② $A \not\subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$;
③ $A \not\subseteq B \Leftrightarrow A \not\supseteq B$;
④ $A \not\subseteq B \Leftrightarrow$ 存在 $x \in A$, 使得 $x \notin B$.
其中真命题的序号是 _____. (把符合要求的命题序号都填上)
- 集合 $A = \{(x, y) \mid y = a|x|\}$, $B = \{(x, y) \mid y = x+a\}$,

$C = A \cap B$, 且集合 C 为单元素集合, 则实数 a 的取值范围为 _____.

- (2005·上海春季高考) 若集合 $A = \{x \mid 3\cos 2\pi x = 3^x, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{y \mid y^2 = 1, y \in \mathbf{R}\}$, 则 $A \cap B =$ _____.
- 记函数 $f(x) = \lg(2x-3)$ 的定义域为集合 M , 函数 $g(x) = \sqrt{1-\frac{2}{x-1}}$ 的定义域为集合 N . 求
(1) 集合 M, N ;
(2) 集合 $M \cap N, M \cup N$.

- 设 $A = \{x \mid 1 < x < 3\}$, 又设 B 是关于 x 的不等式组 $\begin{cases} x^2 - 2x + a \leq 0, \\ x^2 - 2bx + 5 \leq 0 \end{cases}$ 的解集, 试确定 a, b 的取值范围, 使得 $A \subseteq B$.