NEW 状元陪练

ZHUANGYUAN PEILIAN

九年义务教育四年制初中

根据最新版人教社教材编写

状元陪练

全国名校同步训练名题精编

初四几何(全一册)

孙润珠 主编

→点击学习要点
→荟萃经典习题
→拓宽知识视野
→强化素质能力

黑龙江少年儿童出版社

九年义务教育四年制初中

状元陪练

全国名校同步训练名题精编

初四几何（全一册）

孙润珠　主　编
战利超　副主编
孙润珠　战利超
姜海燕　李　游　编　写
李叶合　栾继明
刘旭飞

黑龙江少年儿童出版社
2006年·哈尔滨

丛书策划：于晓北　王朝晔　赵　力
　　　　　刁小菊　张立新
责任编辑：张小宁　范兴云

《状元陪练》丛书（几何）编委会

主　　编：孙润珠

副 主 编：战利超

编　　委：孙润珠　战利超　姜海燕
　　　　　李　游　李叶合　栾继明
　　　　　刘旭飞

九年义务教育四年制初中

状元陪练

初四几何（全一册）

孙润珠　主　编

战利超　副主编

孙润珠　战利超
姜海燕　李　游
李叶合　栾继明　编　写
刘旭飞

黑龙江少年儿童出版社出版
黑龙江省新华书店发行
哈尔滨报达人印务有限公司印装

开本：787 毫米×1092 毫米　1/16　印张：36　字数：720 000
2004 年 8 月第 2 版　2006 年 8 月第 4 次印刷
ISBN 7-5319-2288-6/G·1628　定价：39.00 元（共 6 册）

出 版 说 明

为使广大学生走出茫茫题海，获得名列前茅的好成绩，我们根据大多数状元学生的成功经验之一——精选名题练习，特邀请富有经验的一线著名教师，编写了这套名为《状元陪练——全国名校同步训练名题精编》的高质量教学辅导用书。该丛书完全符合教育部关于课程改革的最新精神及素质教育的要求，与2006年新版教材同步，展示了全国多所名校著名教师教学新成果。

栏目介绍：

点击重点难点——根据教学要求，由名师就教材各个章、节知识点进行提示性讲解。

攻难解疑示例——结合例题，帮助学生掌握突破难点的思路和科学的解题方法。

课课达标◇状元陪练——博采众长，精选名题，与现行教材进行同步训练。

强化素质◇期中测试　提高素质◇期末评估——紧密贴近中考的要求，采取梯级拔高的形式，强化学生归纳、概括、运用知识的能力，增加跨学科知识的交叉渗透，提高学生创新能力。

衷心期望《状元陪练》使更多的学生成为"状元"，也恳请广大读者在使用本丛书过程中，及时向我们提出宝贵意见和建议，以便修订再版时予以改正和提高。

《状元陪练》丛书编委会

2006年8月

☺ 把优异的成绩告诉父母

☺ 把发现的错误和建议寄给我们

《状元陪练》丛书读者意见反馈表

科别、册次：		
页码	正、倒行	错误及疑问
建议		
通信地址、姓名		

黑龙江少年儿童出版社：哈尔滨市南岗区宣庆小区8号楼　邮编：150090

目　录

第六章　圆 ……………………………… (1)
一　圆的有关性质 ……………………… (1)
6.1　圆(一) …………………………… (1)
6.1　圆(二) …………………………… (3)
6.2　过三点的圆 ……………………… (5)
6.3　垂直于弦的直径(一) ………… (7)
6.3　垂直于弦的直径(二) ………… (9)
6.4　圆心角、弧、弦、弦心距之间的关系 ……………………………… (12)
6.5　圆周角 ………………………… (14)
6.6　圆的内接四边形 ……………… (18)
强化能力　期中检测(一) ……………… (21)
强化能力　期中检测(二) ……………… (23)
二　直线和圆的位置关系 …………… (26)
6.7　直线和圆的位置关系 ………… (26)
6.8　切线的画法、判定和性质(一) ……………………………… (28)
6.8　切线的画法、判定和性质(二) ……………………………… (31)
6.9　三角形的内切圆 ……………… (34)
6.10　切线长定理(一) …………… (37)
6.10　切线长定理(二) …………… (41)
6.11　弦切角 ……………………… (44)
6.12　和圆有关的比例线段(一) ……………………………… (48)
6.12　和圆有关的比例线段(二) ……………………………… (51)
三　圆和圆的位置关系 ……………… (55)
6.13　圆和圆的位置关系 ………… (55)
6.14　两圆的公切线 ……………… (58)
6.15　相切在画图中的应用 ……… (62)
四　正多边形和圆 …………………… (64)
6.16　正多边形和圆 ……………… (64)
6.17　正多边形的有关计算 ……… (66)
6.18　画正多边形 ………………… (68)
6.19　探索性活动:镶嵌(略)
6.20　圆周长、弧长 ……………… (69)
6.21　圆、扇形、弓形的面积 …… (71)
6.22　圆柱的侧面展开图 ………… (74)
6.23　圆锥的侧面展开图 ………… (75)
提升素质　期末评估 ………………… (76)
权威中考预测 ………………………… (79)
参考答案 ……………………………… (80)

第六章　圆

一　圆的有关性质

6.1　圆(一)

点击重点难点

重点

点与圆的位置关系.

难点

点的轨迹的理解.

攻难解疑示例

例 1 如图 6.1－1,以线段 AB 为底的等腰三角形的另一顶点轨迹是什么?画出图形.

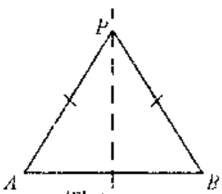

图 6.1－1

点拨思路

若点 P 为等腰△ABC 的另一顶点,则 $PA=PB$,进而得知 P 点到 A、到 B 的距离相等,这说明 P 点的位置必在线段 AB 的垂直平分线上,但 AB 的中点除外,因为 P 在 AB 的中点时 PA、PB 和 AB 构不成三角形.

答案

以 AB 为底的等腰三角形的另一顶点的轨迹是线段 AB 的垂直平分线(AB 的中点除外).

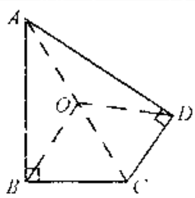

图 6.1－2

例 2 如图 6.1－2,四边形 $ABCD$ 中 $\angle B=\angle D=90°$.求证 A、B、C、D 四点同在一个圆上.

点拨思路

证 A、B、C、D 四点共圆须证明这四个点到某一点(圆心)的距离均相等即可,连 AC 后,这一点必定是 AC 的中点.

答案

证明:连接 AC,取 AC 中点 O 连 OD、OB,Rt△ACD 中,∵ O 为斜边 AC 中点,∴ $OD=\frac{1}{2}AC$,即 $OD=OA=OC$.同理,$OB=OA=OC$,∴ $OA=OB=OC=OD$　∴ A、B、C、D 四点均在同一圆上.

课课达标◇状元陪练

一、选择题

1. 下列命题中不正确的是(　　).

A. 圆是轴对称图形

B. 圆是中心对称图形

C. 圆是轴对称图形,也是中心对称图形

D. 圆既不是轴对称图形,也不是中心对称图形

2. 已知线段 $OA=2$ cm,$OB=5$ cm,$OC=4$ cm,且点 A 在⊙O 内,点 B 在⊙O 外,点 C 在⊙O 上,则⊙O 的直径为(　　).

A. 2 cm　B. 8 cm　C. 5 cm　D. 10 cm

3. 矩形各边的中点(　　).

A. 都在一个半圆上

B. 可以在一个圆上

C. 不在同一圆上

D. 都在同一个圆上

4. 平面几何中点的轨迹是指(　　).

A. 点的轨迹是运动着的点

B. 符合一些条件的点都在图形上

C. 图形是由符合条件的一些点组成的

D. 把符合条件的所有点组成的图形叫做符合这个条件的点的轨迹

5. 经过圆上一点可作圆中最长的弦有(　　).

A. 无数多条　　B.3 条

C.2 条　　D.1 条

6. 下列说法正确的是(　　).

A. 弧是半圆　　B. 直径不是弦

C. 弦是直径　　D. 半圆是弧

7. 如图 6.1－3, $\triangle AOC$ 中, $\angle C=90°$, $AC=4$, $OC=3$, E、F 分别为 AO、AC 的中点,以 O 为圆心,OC 为半径作圆,则(　　).

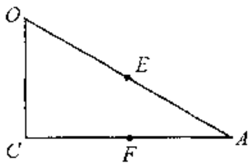

图 6.1－3

A. 点 E 在⊙O 内,点 F 在⊙O 外

B. 点 E 在⊙O 外,点 F 在⊙O 内

C. 点 E 在⊙O 内,点 F 在⊙O 上

D. 点 E 在⊙O 上,点 F 在⊙O 外

8. 如果 AB、CD 是⊙O 的两条直径,则四边形 $ACBD$ 是(　　).

A. 菱形　　B. 等腰梯形

C. 矩形　　D. 任意四边形

9. 按下列说法可画出唯一圆的是(　　).

A. 以已知线段 AB 的长为半径画图

B. 以已知线段 AB 的一半长为半径画圆

C. 以已知线段为直径画圆

D. 以已知线段 AB 的长为直径画圆

10. 下列语句正确的是(　　).

A. 圆可以看作是到圆心的距离等于半径的点的集合

B. 圆的内部可以看做是到定点的距离小于定长的点的集合

C. 圆的一部分是弧

D. 能够完全重合的弧叫等弧

二、填空题

1. ⊙O 的直径为 12 cm, 当 $AO=$ ________ 时,A 点在⊙O 上,当 AO ________ 时,A 点在⊙O 内,当 $AO>6$ cm 时,A 点在________.

2. 经过⊙O 上一点可作出⊙O 的最长弦________条.

3. 以直角三角形斜边为直径的圆与直角顶的位置关系是________.

4. 圆的外部可以看作是到圆心的距离________的点的集合.

5. ⊙A 是以 $A(3,4)$ 为圆心,5 为半径的圆,则点 $P(5,2)$ 的位置在⊙A ________.

6. 到已知点 O 的距离不大于 5 cm 的点的集合是________.

7. 经过已知点 P 的圆有________个,圆心是________,半径是________.

8. 一个已知角的平分线是________点的轨迹.

9. 点 P 到圆上的最大距离是 15 cm,最小距离是 3 cm,则此圆半径为________.

10. 半径为 2 cm 的所有圆都经过已知点 A 和 B,则这些圆心轨迹是________.

三、解答题

1. 已知一定点 O,与点 O 的距离不大于 2 cm,且又不小于 1 cm 的点的集合是什么?画图说明.

2. 在直径为 10 的圆中,长为 6 的弦的中点轨迹是什么? 画图解答.

3. 如图 6.1－4,已知半圆的直径 AB 为 10 cm, C 为半圆上一点, $CD\perp AB$ 于 D,且 $CD=3$ cm,求 AD 的长.

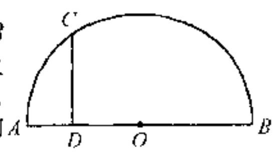

图 6.1－4

4. 已知点 M 是正方形 $ABCD$ 的对角线 BD 上一点,过 M 作正方形的对边的垂线,垂足为 E、F、G、H. 求证: E、F、G、H 在以对角线的交点 O 为圆心的圆上.

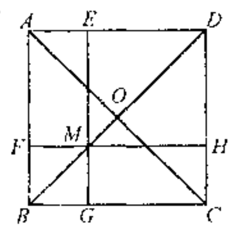

图 6.1－5

5. 如图 6.1-6, AB、CD 是⊙O 的两条直径, $AE // CD$, BE 与 CD 相交于 F,求 AE 与 OF 的比.

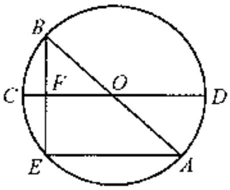

图 6.1-6

6. 如图 6.1-7, 已知 AB 是⊙O 的直径, AC 是弦, $OD // BC$ 交 AC 于 D, $AC = 3\sqrt{2}$ cm,求 DC 长.

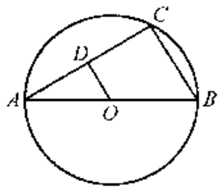

图 6.1-7

7. 求证:等边三角形的三个顶点在以三边的中垂线的交点为圆心的同一个圆上.

6.1 圆(二)

点击重点难点

重点

圆的定义,点与圆的位置关系.

难点

理解轨迹观点定义的圆,圆的轴对称性和旋转不变性.

攻难解疑示例

例 ⊙O 的直径为 2, A、B、C、D、E、F 各点到点 O 的距离分别为 $\sqrt{8}$, $4\cos60^\circ$, $\sin^2 30^\circ$, $\frac{\pi}{2}$, $2\tan60^\circ$, $(\sin30^\circ + \cos60^\circ)$, 在⊙$O$ 内的点是________; 在⊙O 上的点是________;在⊙O 外的点是________.

点拨思路

此题已知⊙O 直径为 2,则半径为 1,而各点与 O 点距离需与半径 1 作大小比较,方知各点与⊙O 的位置关系.

答案

$AO = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} > 1$; $BO = 4\cos60^\circ = 2 > 1$; $CO = \sin^2 30^\circ = \frac{1}{4} < 1$; $DO = \frac{\pi}{2} > 1$; $EO = 2\tan60^\circ = 2\sqrt{3} > 1$; $FO = \sin30^\circ + \cos60^\circ = 1$, ∴ 在⊙$O$ 内的点是 C,在⊙O 上的点是 F,在⊙O 外的点,A、B、E、D.

课课达标◇状元陪练

一、选择题

1. 在直角坐标系中,以点 $O(-1,-4)$为圆心,以 5 cm 为半径的⊙O 与 P 点$(3,-1)$的位置关系(　　).

A. P 在圆内　　B. P 在圆上
C. P 在圆外　　D. 无法确定

2. 两圆的周长比为 5:3,则它们的面积的比为(　　).

A. 5:3　　B. 25:9
C. 9:25　　D. 以上都不对

3. 下列说法中正确的有(　　).

(1)弦是与圆相交的线段
(2)弧是圆上两点间的部分
(3)圆是轴对称图形,对称轴是直径
(4)圆是中心对称图形,对称中心是⊙O
(5)圆的半径都相等

A. 1个　B. 2个　C. 3个　D. 4个

4. 以 3 cm 为半径的圆的圆心是 O,线段 $AO = 3.8$ cm, $OB = 2.9$ cm, $OC = 3$ cm,则 A、B、C 三点与⊙O 的位置关系(　　).

A. A 点在⊙O 内, B 点在⊙O 上, C 点在⊙O 外

B. A 点在$\odot O$外，B 点在$\odot O$内，C 点在$\odot O$上

C. A 点在$\odot O$外，B 点在$\odot O$上，C 点在$\odot O$内

D. A 点在$\odot O$上，B 点在$\odot O$内，C 点在$\odot O$外

5. 平面几何中圆是指(　　).

A. 一条射线绕着端点旋转一周所组成的图形

B. 到定点的距离等于定长的点的集合

C. 一条线段旋转 360°组成的图形

D. 一条封闭曲线组成的图形

6. 下列说法正确的是(　　).

A. 弦是与圆有两个交点的线段

B. 半径小于弦

C. 经过圆心的弦是直径

D. 弦是经过圆心的直径

7. $\odot O$上不同位置的四点将圆周分成弧的条数是(　　).

A. 12　B. 8　C. 9　D. 4

8. 下列语句不正确的有(　　).

A. 直径是弦

B. 优弧比劣弧长

C. 面积相等的两圆是等圆

D. 长度相等的两弧是等弧

9. 下列命题中的真命题是(　　).

A. 半圆不是弧

B. 两端点重合的弧是等弧

C. 可以画一个圆经过矩形的四个顶点

D. 直角梯形的四个顶点共圆

10. P 为$\odot O$内与 O 不重合的一点，则下列说法对的是(　　).

A. 圆周上有两点到 P 点的距离最大

B. 圆周上有两点到 P 点的距离最小

C. 圆周上有两点到 P 点的距离都等于半径

D. P 到圆周上任一点的距离都小于半径

二、填空题

1. 在同圆或等圆中________的弧叫等弧.

2. A、B 是半径为 r 的$\odot O$上不同两点，则 AB 的取值范围是________.

3. ________的图形叫弓形.

4. 点与圆的位置关系共有________种.

5. 圆 O 的直径是 12 cm，则$\odot O$的内部是________的点的集合.

6. $\odot O$中一条弧所对的弦有________条.

7. 决定圆的大小的是________，决定圆的位置的是圆的________.

8. $\odot O$的面积为 25π cm^2，$OA = 6$ cm，P 为 OA 中点，点 P 与$\odot O$的位置关系是________，当 $OA = 10$ cm 时，P 与$\odot O$的位置关系是________.

9. 半径为 2 cm 的所有圆都经过点 O，这些圆的圆心轨迹是________.

10. P 点到$\odot O$上的点的最小距离为 5 cm，最大距离是 7 cm，则$\odot O$的半径________.

三、解答题

1. 已知两圆的面积分别是 36πcm^2 和 81πcm^2. 求两圆周长的比.

2. 求证：正方形的四边中点共圆.

3. 半径为 5 cm 的圆，说明$\odot O$的圆上，$\odot O$的内部，$\odot O$的外部，分别是具有什么性质的点的集合？

4. 如图 6.1－8，已知 OA、OB 为$\odot O$的半径，C、D 分别是 AO、OB 边上的点，AD、BC 相交于 P，且 $OC = OD$. 求证：$AP = PB$.

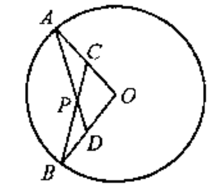

图 6.1－8

5. 如图 6.1－9，AB 为$\odot O$直径，$AB = 26$ cm，$BC = 8$ cm，$DC \perp AB$ 于 C，求 DC 长.

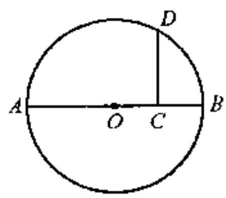

图 6.1－9

6. 求证:直径是圆中最长的弦.

7. 如图 6.1－10, 已知⊙O 半径为 5 cm, △ABC 是⊙O 的内接等腰三角形,底边 BC 与高 AD 的和为 10 cm, 求 AD 的长.

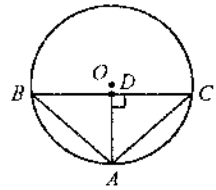

图 6.1－10

6.2 过三点的圆

点击重点难点

重点

确定一个圆的条件——不在同一直线上的三点确定一个圆,反证法,三角形外接圆的有关概念.

难点

反证法的证明步骤的理解和应用.

攻难解疑示例

例 1 求证通过一条直线上三点的圆不存在.已知 A、B、C 是直线 l 上的三点,求证:A、B、C 三点不能在同一个圆上.

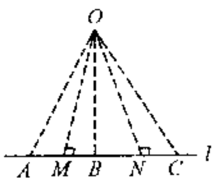

图 6.2－1

点拨思路

从已知条件分析应用反证法,假设过 A、B、C 三点的圆存在,会推出与"过一点有且只有一条线与已知直线垂直"的矛盾.

答案

证明:假设存在一个⊙O 经过 A、B、C 三点,则 OA、OB、OC 均为⊙O 半径,∴ $OA = OB = OC$. ∴若 M、N 分别为 AB、BC 中点,则 OM 与 ON 必分别是弦 AB 和 BC 的中垂线,这与过直线 l 外一点 O 有且只有一条线垂直于已知直线相矛盾,∴经过同一直线上三点的圆不存在.

例 2 △ABC 的三边分别为 5 cm、12 cm、13 cm,求:△ABC 的外接圆半径.

点拨思路

由△ABC 的三边长 5、12、13,是我们很熟悉的勾股数,可断定△ABC 为 Rt△ ∴其外接圆的圆心必是斜边中点,问题解决了.

答案

解:∵ $5^2 + 12^2 = 13^2$, ∴△ABC 为 Rt△且斜边长为 13 cm. ∴外接圆半径为$\frac{13}{2}$ cm.

课课达标◇状元陪练

一、选择题

1. 下列命题中假命题是(　　).
A. 过一点可以作一个圆
B. 过两点可以作一个圆
C. 过任意三点都可以作一个圆
D. 过任意四点不可以作一个圆

2. 下列命题中真命题是(　　).
A. 三角形外接圆的圆心必在三角形内部
B. 每一个三角形只有一个外接圆
C. 三点确定一个圆
D. 每个圆只有一个内接三角形

3. 已知两点 M、N 和直线 l,过 M、N 两点且圆心在直线 l 上的圆可作(　　).
A. 1 个　　B. 0 个
C. 无数个　　D. 0 个,1 个或无数个

4. 三角形的外心性质是(　　).
A. 到三边距离相等
B. 到三个顶点距离相等
C. 在三角形的角平分线上
D. 在三角形的中线上

5. 在应用反证法时,首先提出与结论相反的假设,若一个命题的结论是$\angle A > 60°$那么与它相反的假设应该是(　　).
A. $\angle A < 60°$　　B. $\angle A \neq 60°$

C. $\angle A=60°$　　D. $\angle A\leq 60°$

6. 若一个三角形的外心在边上，那么这个三角形是(　　).

A. 直角三角形　B. 锐角三角形

C. 钝角三角形　D. 不可确定

7. 下列图形中一定有外接圆的有(　　).

(1)矩形　(2)菱形　(3)三角形

(4)梯形　(5)正方形

A.1个　B.2个　C.3个　D.4个

8. 下列命题正确的是(　　).

A. 任意平行四边形必有外接圆

B. 菱形一定有外接圆

C. 一个平行四边形不一定有外接圆

D. 一个任意平行四边形一定没有外接圆

9. 等腰三角形底边上的中线与一腰的中垂线的交点是(　　).

A. 这个三角形的垂心

B. 这个三角形的重心

C. 这个三角形的外心

D. 以上都不对

10. 三角形的外心，是这个三角形的三条中位线组成的三角形的(　　).

A. 垂心　　　B. 外心

C. 重心　　　D. 以上都不对

二、填空题

1. 已知 P、Q、M 三点不共线，则经过点 P 可以作________个圆，经过点 P 和点 M 可以作________个圆，经过 P、Q、M 三点可以作________个圆.

2. 过三角形三个顶点的圆叫做三角形的________，这个圆的圆心叫三角形的________.

3. 三角形的外心是三角形的________的交点，三角形的外心________的距离相等.

4. 边长为 5 cm 的等边三角形外接圆的半径为________.

5. 直角三角形的外心在________，锐角三角形的外心在________，钝角三角形的外心在________.

6. 用反证法证明一个命题的步骤是：

(1)________结论不成立.

(2)从这个假设出发经过________得出矛盾.

(3)由矛盾判定________从而肯定命题的________.

7. 若一个圆经过梯形 $ABCD$ 的四个顶点则这个梯形必是________梯形.

8. 如图 6.2－2，四边形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 相交于 P，则圆内接三角形有________个.

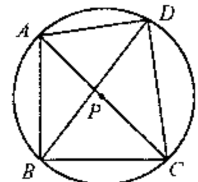

图 6.2－2

三、解答题

1. 如图 6.2－3，平面内有三点 A、B、C，求作过 A、B、C 三点的圆.

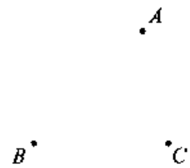

图 6.2－3

2. 如图 6.2－4，已知 $\overset{\frown}{AB}$，求作 $\overset{\frown}{AB}$ 所在的圆的圆心.(写出作法)

图 6.2－4

3. 如图 6.2－5，$\triangle ABC$ 中，D、E 分别在 AC、AB 上，BD 和 CE 相交于 O，求证：BD 与 CE 不可互相平分.

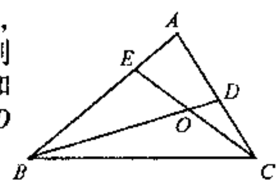

图 6.2－5

4. 如图 6.2－6，已知⊙O 半径 $OA=3$ cm，M 为 OA 上一点，$OM=\sqrt{3}$，B 在⊙O 上，且 $\angle BMO=60°$，求 MB 的长.

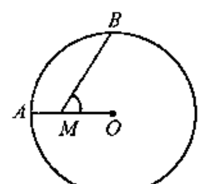

图 6.2－6

5. 如图 6.2－7，求证：正方形一定有外接圆，并且外接圆的半径为边长的$\frac{\sqrt{2}}{2}$倍.

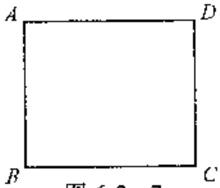

图 6.2－7

6. 求证：等腰三角形的两底角一定是锐角.

7. 求证：三角形中至少有一角不大于 60°.

6.3 垂直于弦的直径(一)

点击重点难点

重点

理解圆是轴对称图形，掌握垂径定理和其推论.

难点

学会应用垂径定理及其推论.

攻难解疑示例

例 1 如图 6.3－1，已知⊙O 的弦 BA 的延长线上一点 P，且 $PA = AB = 6$，$OP = 10$，求⊙O 的半径.

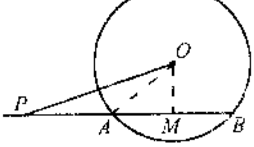

图 6.3－1

点拨思路

过 O 作 $OM \perp AB$ 于 M，可利用垂径定理、勾股定理求出 OM，再连 OA，在 Rt△OAM 中求半径 OA 的长.

答案

作 $OM \perp AB$ 于 M，连 OA，Rt△OPM 中 $OP = 10$，$PM = 6 + 3 = 9$，$\therefore OM = \sqrt{10^2 - 9^2} = \sqrt{19}$，在 Rt△$OAM$ 中 $OA = \sqrt{(\sqrt{19})^2 + 3^2} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

$\therefore$⊙O 半径为 $2\sqrt{7}$

例 1 如图 6.3－2，已知△ABC 中∠C = 90°，以 C 为圆心，AC 为半径的⊙C 交 AB 于 D，若 $AC = 3$ cm，$BC = 4$ cm，求 AD 的长.

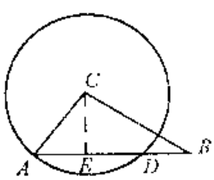

图 6.3－2

点拨思路

可由勾股定理求出 Rt△ABC 的斜边 AB 的长为 5，再利用 $AC^2 = AE \cdot AB$，求出 AE 长，$AD = 2AE$.

答案

Rt△ABC 中，$AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$，又 $\because$ △ACE∽△ABC.

$\therefore AC^2 = AE \cdot AB$ 即 $3^2 = AE \cdot 5$. $\therefore AE = \frac{9}{5}$

$\because CE \perp AD$.

$\therefore AD = 2AE = 2 \times \frac{9}{5} = \frac{18}{5} = 3.6$. $\therefore AD$ 长为 3.6 cm.

课课达标◇状元陪练

一、判断题

1. 平分弦的直径垂直于弦，并且平分弦所对的两条弧.（　　）

2. 每个圆有无数条对称轴是它的每一条直径.（　　）

3. 圆的圆心就是它的对称中心.（　　）

4. 同圆的两条平行弦所夹的弧相等.（　　）

5. 经过已知弦的中点的弦必是直径.（　　）

6. 垂直于弦的直径必平分弦，并且平分弦所对的弧.（　　）

7. 平分弦的直线必过弦所在圆的圆心.（　　）

8. 平分弦的直线必垂直于弦.（　　）

9. 圆有一个对称中心和一条对称轴.（　　）

10. 两个同心圆中，大圆的半径 OA、OB 分别交小圆于 C、D，那么 $\overset{\frown}{AB}$ 和 $\overset{\frown}{CD}$ 相等．(　　)

二、选择题

1. 下列说法错误的是(　　).

A. 平分弦的直径垂直于弦，并且平分弦所对的弧

B. 圆的两条平行弦所夹的弧相等

C. 过圆心并与弦垂直的线段平分这条弦

D. 弦的垂直平分线必过圆心

2. ⊙O 的直径是 15 cm，过圆心 O，且垂直弦 AB 于 M，$OM:OB=3:5$，则 $AB=$ (　　).

A. 3 cm　B. 6 cm　C. 12 cm　D. 24 cm

3. 如图 6.3－3，AB 是⊙O 直径，弦 CD 垂直平分 OA 于 E，则 $\overset{\frown}{CAD}$ 的度数(　　).

A. 60°　　B. 90°

C. 120°　　D. 150°

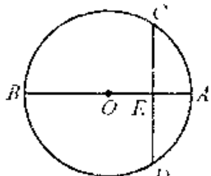

图 6.3－3

4. 如图 6.3－4，在直径为 20 cm 的⊙O 中 $\overset{\frown}{AB}$ 是 60°，则 AB 的弦心距为(　　).

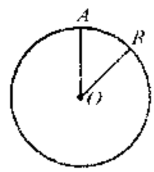

图 6.3－4

A. $\frac{15}{2}\sqrt{3}$ cm

B. $\frac{5}{2}\sqrt{3}$ cm

C. $10\sqrt{3}$ cm　　D. $5\sqrt{3}$ cm

5. 如果圆内两弦互相平分，则他们的关系是(　　).

A. 互相垂直　　B. 正方形对角线

C. 相交成 45°

D. 圆的两条直径

6. 下列命题中正确的是(　　).

A. 过三点可做一个且只可作一个圆

B. 平分弦的直径垂直于弦

C. 三角形的外心是三边中垂线交点

D. 圆是轴对称图形，它的对称轴是它的一条直径

7. CD 是⊙O 直径，AB 为弦，$AB\perp CD$ 于 M，若 $CM=6$，$DM=4$，则 AB 等于(　　).

A. $2\sqrt{6}$　B. $3\sqrt{2}$　C. $4\sqrt{6}$　D. $2\sqrt{21}$

8. 已知 P 为⊙O 内一点，$OP=2$ cm，若⊙O 半径是 3 cm，那过 P 点的最短的弦等于(　　).

A. 1 cm　B. 2 cm　C. $\sqrt{5}$ cm　D. $2\sqrt{5}$ cm

9. 如图 6.3－5，EF 是⊙O 直径，$OE=5$ cm，弦 $MN=8$ cm，则 E、F 两点到直线 MN 的距离之和为(　　).

A. 12 cm　B. 6 cm

C. 8 cm　D. 3 cm

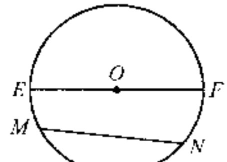

图 6.3－5

10. 在直径为 8 的圆中垂直平分半径的弦长为(　　).

A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　C. $2\sqrt{3}$　D. $4\sqrt{3}$

三、填空题

1. 圆有________条对称轴，有________条直径.

2. 如图 6.3－6，EF 为⊙O 直径，弦 $MN\perp EF$ 于 G，据垂径定理可得________＝________；________＝________；________＝________.

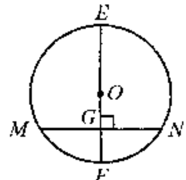

图 6.3－6

3. 圆的两条平行弦所夹的________.

4. 已知⊙O 半径 OA 为 20 cm，OB 为半径，$\angle AOB=120°$，则 $\triangle AOB$ 面积是________.

5. 如图 6.3－7，⊙O 的直径 $AB\perp CD$ 于 O，$\angle ECO=30°$，则 $DE:OB=$________.

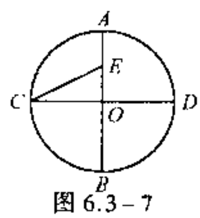

图 6.3－7

6. ⊙O 内一条弦交直径成 30°角，且分直径为 1 cm 和 5 cm 两段，这条弦的长度为________.

7. 点 P 在⊙O 内，过 P 点的最长弦为 10 cm，$PO=4$ cm，则过点 P 的最短弦长________.

8. 如图 6.3－8，AB 是直径，$OA=2.5$，$BC=1$，$DC\perp AB$ 于 C，则 $DC=$________.

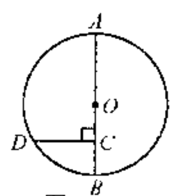

图 6.3－8

9. 如图 6.3－9，有一圆弧形桥拱，拱形

半径 $OA=10$ m，桥拱的跨度 $AB=16$ m，则拱高 $CD=$______.

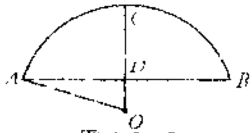
图 6.3－9

10. $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=3$ cm，$BC=4$ cm，以点 C 为圆心，CA 为半径画弧交斜边 AB 于 D，则 AD 的长为______.

三、解答题

1. 如图 6.3－10，已知⊙O 的半径为 5，点 P 在⊙O 外，$PO=8$，$\angle APO=30°$，求 AB 和 PB 的长.

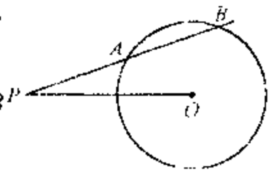
图 6.3－10

2. 已知⊙O 的直径为 8 cm，弦 AB 为 4 cm，求圆心 O 到 AB 的距离.

3. 如图 6.3－11，圆管内原有积水，水平面宽 $CD=10$ cm，水深 $GF=1$ cm，后水面上升 1 cm（即 $EG=1$ cm）问此时水面宽 AB 为多少？

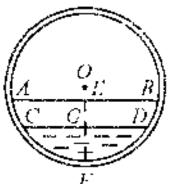
图 6.3－11

4. 如图 6.3－12，求作四等分 $\overset{\frown}{AB}$.（只保留作图痕迹）

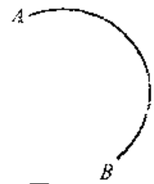
图 6.3－12

5. 如图 6.3－13，⊙O 中两弦 AB、CD 为相等弦，延长 AB、CD 分别至 E、F，使 $BE=DF$，求证：EF 的垂直平分线必过圆心 O 点.

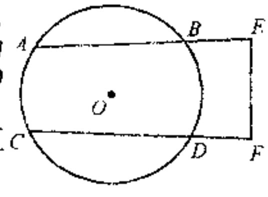
图 6.3－13

6. 如图 6.3－14，在⊙O 中，直径 AB 与弦 CD 相交. 分别过 O、A、B 向 CD 引垂线，垂足分别是 F、G、E，求证：$CE=DG$.

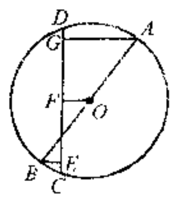
图 6.3－14

6.3 垂直于弦的直径（二）

点击重点难点

重点

垂径定理及其推论的熟练应用.

难点

理解定理和推论，学会应用其解题证题.

攻难解疑示例

例 1 如图 6.3－15，已知⊙O 的直径 AB 和弦 CD 相交于 E，且 $AE=1$ cm，$BE=5$ cm，$\angle DEB=60°$，求 CD 的长.

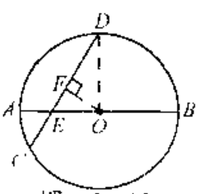
图 6.3－15

点拨思路

取 CD 中点 F，连 OF、OD 得 Rt△OFD，利用勾股定理和含 30°Rt△的性质得 FD 的长，进而求出 CD 长.

答案

连 OD，作 $OF\perp CD$ 于 F，Rt△EOF 中，$\angle DEO=60°$，∴ $\angle FOE=30°$. ∵ $AE=1$ cm，$BE=5$ cm，∴ $EO=\frac{1+5}{2}-1=2$. ∴ $OF=\sqrt{3}$，又 $OD=\frac{1+5}{2}=3$，∴ $FD=\sqrt{OD^2-OF^2}=\sqrt{9-3}=\sqrt{6}$.

∴弦 CD 的长为 $2\sqrt{6}$.

例 2 已知 P 为⊙O 内一点，弦 AB 通过 P 并且垂直 OP，直径 CD 通过 P，EF 为通过 P 的任意弦. 求证：$AB<EF<CD$.

点拨思路

比较三条线段的大小，首先应考虑三条线段各长多少，可利用勾股定理用半径和 OP、OQ 的关系表示三条线段的长去比较.

答案

如图 6.3－16，连 OE、OA，作 $OQ\perp EF$ 于 Q，据垂径定理：$EF=2\sqrt{OA^2-OQ^2}$，而 $OE=OA=$ 半径 r　$OQ<OP$，∴ $EF>AB$，而 $CD=2r$. ∴ CD 最长.

∴ $AB<EF<CD$.

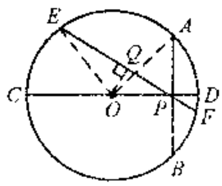

图 6.3－16

课课达标◇状元陪练

一、选择题

1. 在⊙O 中下列所叙直线过圆心的是(　　).

A. 垂直于弦的直线

B. 过弦中点的直线

C. 过弦中点且垂直于弦的直线

D. 经过弦所对的一条弧的中点的直线

2. 如图 6.3－17，已知 $AB=12$ cm，弓形高 $CD=4$ cm，则该圆的直径(　　).

A. 6.5 cm　B. 9 cm

C. 13 cm　D. 5 cm

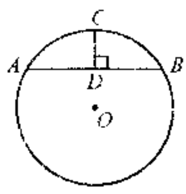

图 6.3－17

3. 如图 6.3－18，CD 是⊙O 直径，一直线交⊙O 于 A、B 两点，$CE\perp AB$ 于 E，$DF\perp AB$ 于 F，则有(　　).

A. $AE>BF$

B. $AE<BF$

C. $AE=BF$

D. 不可能确定

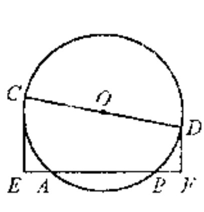

图 6.3－18

4. 已知 P 为⊙O 内一点，且 OP 为 2 cm，若⊙O 直径为 6 cm，则过 P 点的最短的弦长为(　　).

A. $2\sqrt{5}$ cm　B. $\sqrt{5}$ cm　C. 2 cm　D. 1 cm

5. 在直径为 10cm 的⊙O 中，有长 5 cm 的弦 AB，则 O 到 AB 的距离为(　　).

A. $\frac{5}{2}\sqrt{3}$　B. $\frac{5}{4}\sqrt{3}$　C. $\sqrt{3}$　D. $5\sqrt{3}$

6. AB 为⊙O 直径，C 为⊙O 上一点，作 $CD\perp AB$ 于 D 并延长至点 E，使 $OE=2CD$，则 E 点在(　　).

A. ⊙O 内　　B. ⊙O 外

C. ⊙O 上　　D. 不可确定

7. 如图 6.3－19，长为 8 cm 的直径 AB 与弦 CD 交于 OB 的中点 E，$\angle AEC=30°$，则点 O 到 CD 的距离和 CD 的长分别为(　　).

A. 1 cm、1 cm

B. 1 cm、$2\sqrt{15}$ cm

C. $2\sqrt{15}$ cm、$\sqrt{15}$ cm

D. $2\sqrt{15}$ cm、1 cm

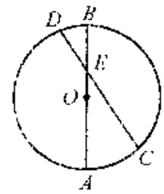

图 6.3－19

8. 如图 6.3－20，同心圆中大圆的弦 AB 交小圆于 CD，已知：$AB=4$，$CD=2$，O 到 AB 距离为 1，则两圆的半径之比(　　).

A. 5∶4　B. $\sqrt{5}:\sqrt{2}$

C. $\sqrt{5}:2$　D. 3∶2

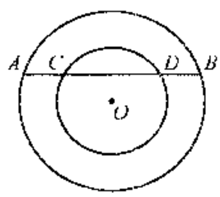

图 6.3－20

9. 如图 6.3－21，⊙O 中两弦 AB、CD 互相垂直，垂足为 E，若 $DE=3$ cm，$CE=7$ cm，则弦 AB 与圆心 O 的距离为(　　).

A. 3 cm　B. 2 cm

C. 7 cm　D. 4 cm

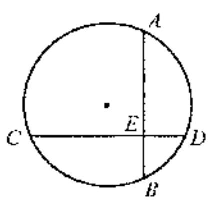

图 6.3－21

10. 如图 6.3－22，△ABC 内接⊙O，$AB=AC$，$\angle BAD=\angle CAD$，则结论 (1) D 是 $\overset{\frown}{AC}$ 中点；(2) $BC\perp$

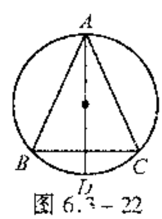

图 6.3－22

AD;(3)$\overparen{BD}=\overparen{DC}$;(4)$AD$ 是⊙O 直径;(5)$\overparen{AB}=\overparen{AC}$,正确的有(　　).

A.2个　B.3个　C.4个　D.5个

二、填空题

1. 弦的垂直平分线经过________且平分________.

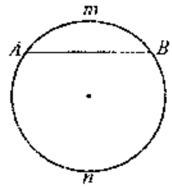

图 6.3-23

2. 如图 6.3-23,已知弦 AB 将⊙O 分成两条弧,$\overparen{AmB}:\overparen{AnB}=3:5$,则$\overparen{AmB}$所对的圆心角的度数为________.

3. 如图 6.3-24,⊙O 的直径为 10 cm,CD 过圆心 O 且垂直弦 AB 于 E,$CE:ED=5:3$,则 $AB=$________.

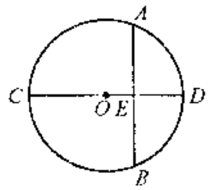

图 6.3-24

4. 已知圆⊙O 的半径为 25 cm,⊙O 的两条平行弦 $AB=40$ cm,$CD=48$ cm,则弦 AB 与 CD 间距离为________或________.

5. 若⊙O 中等于 120°的劣弧所对的弦是 $12\sqrt{3}$ cm 则⊙O 的半径为________.

6. 半径为 2 cm 的圆中,过半径中点而垂直于半径的弦长为________.

7. 已知⊙O 的两条平行弦与圆心的距离分别是 2 cm 和 5 cm,则这两条弦之间的距离________.

8. 若直径为 4 cm 的圆中的一条弦长为 $2\sqrt{3}$ cm,则此弦的中点到此弦所对的弧的中点的距离为________.

9. 圆的弦与直径交角为 30°,并且分直径为 2 cm 和 8 cm 两部分,则这个弦长________.

10. 求顶角为 120°,腰长为 10 cm 的等腰三角形的外接圆直径的长________.

三、解答题

1. 如图 6.3-25,⊙O 中弦 AB 的长为 24 cm,M 为 AB 上一点,$OM=6$,$OB=13$,求 AM、BM 的长.

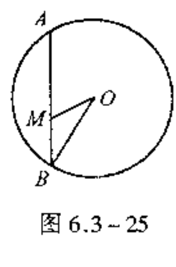

图 6.3-25

2. 如图 6.3-26,已知⊙O 直径为 5,弦 $AB=CD=8$,弦 AB 与 CD 垂直相交于 P.求 OP 的长.

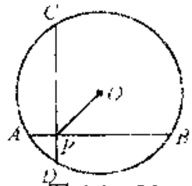

图 6.3-26

3. 如图 6.3-27,⊙O 中,直径 CD 与弦 AB 相交,$CM\perp AB$ 于 M,$DN\perp AB$ 于 N.求证:$OM=ON$.

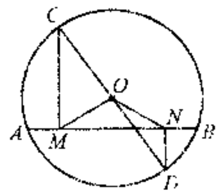

图 6.3-27

4. 如图 6.3-28,∠CAN 的两边交⊙O 于 B、C、M、N,AG 平分∠CAN 交⊙O 于 D、G,E、F 分别是$\overparen{BC}$与$\overparen{MN}$的中点.求证:$EF\perp AG$.

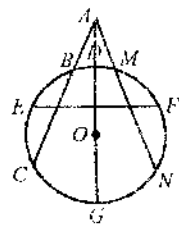

图 6.3-28

5. 如图 6.3-29,P 是⊙O 与⊙O' 的一个交点,M 是 OO' 的中点,过 P 点的直线交⊙O 于 A,交⊙O' 于 A',点 Q 是 AA' 的中点.求证:$MQ=MP$.

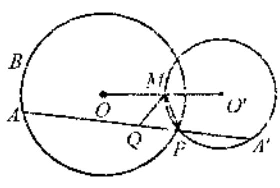

图 6.3-29

6.4 圆心角、弧、弦、弦心距之间的关系

点击重点难点

重点

掌握圆心角、弧、弦、弦心距之间的相等关系定理及其推论.

难点

在理解以上定理的基础上,熟练应用定理和推论.

攻难解疑示例

例1 如图6.4-1,已知⊙O的两弦$AB=CD$,M、N分别在AB、CD上,且$AM=CN$,求证:$\angle AMN=\angle CNM$.

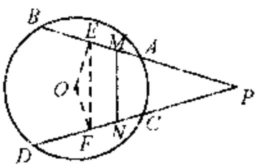

图6.4-1

点拨思路

本题与垂径定理有密切的联系,由垂径定理可求$\left.\begin{matrix}AE=CF\\AM=CN\end{matrix}\right\}\Rightarrow EM=FN\Rightarrow MN\parallel EF$

从而可证明$\angle AMN=\angle CNM$.

答案

作$OE\perp AB$于E,$OF\perp DC$于F,连接EF.

由$OE=OF\Rightarrow\angle OEF=\angle OFE$

$\left.\begin{matrix}OE\perp AB\\OF\perp DC\end{matrix}\right\}\Rightarrow\angle OEA=\angle OFC=\text{Rt}\angle$ $\Rightarrow$

$\angle AEF=\angle CFE$

$\left.\begin{matrix}AB=CD\\OE\perp AB,OF\perp CD\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}AE=CF\\AM=CN\end{matrix}\right\}\Rightarrow$

$EM=FN\Rightarrow EF\parallel MN$

$\Rightarrow\angle AMN=\angle CNM$.

例2 如图6.4-2,已知⊙O中$\overset{\frown}{AB}=3\overset{\frown}{CD}$,弦$AB$与弦$CD$关系如何.

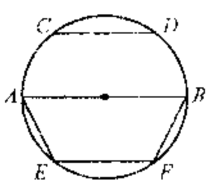

图6.4-2

点拨思路

在$\overset{\frown}{AB}$取三等分点E、F,连AE、EF、FB显然$AB<$折线的和.

答案

解:$\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{EF}=\overset{\frown}{FB}=\overset{\frown}{CD}$,连$AE$、$EF$、$FB$.

则$AE=EF=BF$(弧等弦等).

$\because AE+EF+FB>AB$即$3CD>AB$,

$\therefore AB$与CD的关系为$AB<3CD$.

课课达标◇状元陪练

一、判断题

1. 顶点在圆心的角叫圆心角.(　　)

2. 圆有一个对称中心,一条对称轴.(　　)

3. 弦心距是弦的中点与圆心间的线段的长.(　　)

4. 弦的垂线必过圆心.(　　)

5. 相等的圆心角所对的弦相等.(　　)

6. 度数相等的两段弧所对的弦也相等.(　　)

7. 如图6.4-3,若C、D三等分⊙O的弦AB,则过CD两点的垂线也能等分$\overset{\frown}{AB}$.(　　)

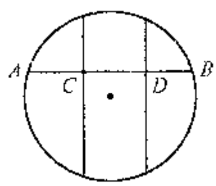

图6.4-3

8. 在同圆或等圆中,相等的两弦,弦心距也相等.(　　)

二、选择题

1. 下列说法正确的是(　　).

A. 两弧相等,这两弧所对的弦就相等

B. 若一条弧的度数为80°,则这个圆上余下的弧度数为280°

C. 圆是轴对称图形,每一条直径都是它的对称轴

D. 120°圆心角所对的弦长是此圆半径的一半

2. OE是⊙O半径,OE的中垂线交⊙O