



毛 纲 源 考 研 数 学 辅 导 系 列

◇题型全面 紧扣大纲

帮你高效复习

◇方法新颖 技巧独特

助君考研成功

毛纲源 编著

2008

考研数学(一)

常考题型解题方法技巧归纳

华中科技大学出版社
<http://www.hustp.com>

012-1111

013-44/138
:2008(1)
2007

毛纲源考研数学辅导系列

考研数学(一) 常考题型解题方法技巧归纳

毛纲源 编著



华中科技大学出版社
中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

考研数学(一)常考题型解题方法技巧归纳/毛纲源 编著.-2版—武汉:
华中科技大学出版社,2007年10月

ISBN 978-7-5609-3173-9

I.考… II.毛… III.高等数学-研究生-入学考试-解题 IV.O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第136854号

考研数学(一)常考题型解题方法技巧归纳

毛纲源 编著

责任编辑:王汉江

封面设计:潘 群

责任校对:陈 骏

责任监印:熊庆玉

出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)

武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87557437

录 排:武汉佳年华科技有限公司

印 刷:湖北恒泰印务有限公司

开本:710mm×1000mm 1/16

印张:33

字数:775 000

版次:2007年10月第2版

印次:2007年10月第3次印刷

定价:39.80元

ISBN 978-7-5609-3173-9/O·318

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

前 言

为使考研者能在较短时间内全面复习,提高考研应试能力和水平,作者根据最新数学考试大纲的要求,深入研究了历年来考研试题,结合作者多年来在考研辅导班的授课经验,编写了《考研数学(数学一)常考题型及其解题方法技巧归纳》一书.该书自问世以来,历经三次全国统考,其内容每年都覆盖了试题的绝大部分题型,现已重印多次,畅销全国,以其题型全面、方法新颖、技巧独特、适于自学等特点深受全国广大考生的青睐.

本书经过此次修订,增加了新增考点的有关内容,同时还纠正了差错,弥补了疏漏,更好地体现了考研数学大纲的思想和要求.

本书有以下几个特点.

首先,本书根据考研数学大纲的要求,将历年来考研数学试题按题型分类,对各类题型的解法进行了归纳总结,使考生能做到举一反三,触类旁通.数学试题是无限的,而题型是有限的,掌握好这些题型及其解题方法与技巧,会减少解题的盲目性,从而提高解题效率,考生的应试能力自然就得到了提高.同时也便于考生掌握考研数学(一)的大部分题型及其解题思路、方法与技巧,因而,本书能起到指航引路、预测考向的作用.

本书特别强调对考研数学大纲划定的基本概念、基本定理、基本方法和基本公式的正确理解.为此每一题型在讲解例题前常对上述“四个基本”进行剖析,便于考生理解、记忆,避免常犯错误.

本书另一特点是总结了许多实用快捷的简便算法,这些简便算法新颖、独特,它们是作者多年来教学经验的总结,会大大提高考生的解题速度和准确性,使考生大大节省时间,因而有助于考生应试能力和水平的提高.

本书还注意培养提高综合应用多个知识点解决问题的能力,对综合型题型进行了较多的分析和解法,以期提高考生在这方面的能力.与此同时,注重一题多解,以期开阔考生的解题思路,使所学知识融会贯通,能灵活地解决问题.

本书的讲述方法由浅入深,适于自学,尽量使选用的例题精而易懂、全而不滥.

为使考生具有扎实的数学基础知识,也为了更好地阅读本书,特向读者推荐一套可以指导你全面、系统、深入复习考研数学的参考书,这就是本人编写的理工类数学学习指导、硕士研究生备考指南丛书:《高等数学解题方法技巧归纳》(上、下册)、《线性代数解题方法技巧归纳》、《概率论与数理统计解题方法技巧归纳》.这套丛书自出版以来一直受到全国广大读者的一致好评,多次印刷,久销不衰.很多已考取的理工类硕士研究生不少都受益于这套丛书.本人在撰写本书时,多处引用了这套丛书的内容和方法,如果能把这套丛书结合起来学习必将收到事半功倍的效果.

由于编者水平有限,加之时间仓促,书中错误、疏漏之处在所难免,恳请专家、读者指正.

编者

2007年5月

目 录

第 1 篇 高等数学

1.1 函数、极限、连续	(1)
1.1.1 求几类函数的表达式	(1)
题型一 求分段函数的复合函数	(1)
题型二 已知 $f[g(x)] = \varphi(x)$, 其中 $\varphi(x)$ 是已知函数, 求 f 或 g	(1)
1.1.2 函数的奇偶性	(2)
题型一 判别(证明)几类函数的奇偶性	(2)
题型二 奇、偶函数性质的应用	(3)
1.1.3 函数有界性的判定	(4)
题型一 判定有限开区间内连续函数的有界性	(4)
题型二 判定无穷区间内连续函数的有界性	(4)
题型三 判定分段连续函数的有界性	(4)
1.1.4 理解极限概念	(5)
题型一 正确理解极限定义中的“ ϵ 、 N ”, “ ϵ 、 δ ”, “ ϵ 、 X ”语言的含义	(5)
题型二 正确区别无穷大量与无界变量	(5)
1.1.5 求未定式极限	(7)
题型一 求 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限	(7)
题型二 求 $0 \cdot \infty$ 型极限	(9)
题型三 求 $\infty - \infty$ 型极限	(9)
题型四 求幂指函数(0^0 型, ∞^0 型, 1^∞ 型)极限	(10)
1.1.6 求数列极限	(12)
题型一 求无穷多项和的极限	(12)
题型二 求由递推关系式给出的数列极限	(14)
1.1.7 求几类特殊子函数形式的函数极限	(15)
题型一 求须先考察左、右极限的函数极限	(15)
题型二 求含根式差的函数极限	(17)
题型三 求含指数函数差的函数极限	(17)
题型四 求含 $\ln f(x)$ 的函数极限, 其中 $\lim_{x \rightarrow \square} f(x) = 1$	(17)
题型五 求含有界变量因子的函数极限	(18)
1.1.8 由含未知函数的一些极限, 求含该函数的另一极限	(18)
1.1.9 已知极限式的极限, 求其待定常数	(19)
题型一 求有理函数极限式中的待定常数	(19)
题型二 确定分式函数极限式中的待定常数	(19)
1.1.10 比较和确定无穷小量的阶	(21)
题型一 比较无穷小量的阶	(22)
题型二 确定无穷小量为几阶无穷小量	(22)
1.1.11 讨论函数的连续性间断点的类型	(23)
题型一 判别函数的连续性	(23)
题型二 讨论分段函数的连续性	(24)
题型三 讨论含参变量的极限式所定义的函数的连续性	(25)
题型四 判别函数间断点的类型	(26)

1.1.12	连续函数性质的两点应用	(27)
题型一	利用连续函数性质证明中值等式命题	(27)
题型二	证明方程实根的存在性	(28)
习题 1.1		(29)
1.2	一元函数微分学	(31)
1.2.1	导数定义的三点应用	(31)
题型一	判断函数在某点的可导性	(31)
题型二	利用导数定义求某些函数的极限	(34)
题型三	利用导数定义讨论函数性质	(35)
1.2.2	讨论分段函数的可导性及其导函数的连续性	(36)
题型一	讨论分段函数的可导性	(36)
题型二	讨论分段函数的导函数的连续性	(37)
题型三	讨论某类特殊的分段函数在其分段点的连续性、 可导性及其导函数的连续性	(37)
1.2.3	讨论含绝对值函数的可导性	(37)
题型一	讨论绝对值函数 $ f(x) $ 的可导性	(37)
题型二	讨论函数 $f(x)= \varphi(x) g(x)$ 的可导性	(38)
1.2.4	求一元函数的导数和微分	(39)
题型一	求复合函数的一阶与二阶导数	(39)
题型二	求反函数的导数	(39)
题型三	求隐函数的导数	(40)
题型四	求分段函数的一阶、二阶导数	(41)
题型五	求幂指函数 $f(x)^{g(x)}$ 的导数	(41)
题型六	求由参数方程所确定的函数的导数	(41)
题型七	求某些简单函数的高阶导数	(42)
题型八	求一元函数的微分	(44)
1.2.5	利用函数的连续性、可导性确定其待定常数	(46)
题型一	利用函数的连续性确定其待定常数	(46)
题型二	根据函数的可导性确定待定常数	(46)
1.2.6	利用微分中值定理的条件及其结论解题	(47)
1.2.7	利用罗尔定理证明中值等式	(49)
题型一	证明存在 $\xi \in (a, b)$ 使 $cf'(\xi) = bg'(\xi)$, 其中 c, b 为常数	(49)
题型二	证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $g(\xi)f'(\xi) + h(\xi)f(\xi) = Q(\xi)$	(50)
题型三	证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f(\xi)g'(\xi) + f'(\xi)g(\xi) = 0$	(50)
题型四	证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi) = 0 (g(x) \neq 0)$	(50)
题型五	证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f'(\xi) + g'(\xi)f(\xi) = 0$	(51)
题型六	证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $nf(\xi) + \xi f'(\xi) = 0 (n \text{ 为正整数})$	(51)
题型七	证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $G(\xi) = 0$	(51)
题型八	证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f'(\xi) + g'(\xi)[f(\xi) - b\xi] = 0$	(52)
题型九	已知函数在端点和在别处的取值情况, 证明有关的中值等式	(53)
题型十	证明题设有定积分等式的中值等式	(53)
题型十一	证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $F^{(k)}(\xi) = 0 (k \geq 2)$	(55)
1.2.8	拉格朗日中值定理的应用	(55)
题型一	证明与函数改变量(增量)有关的中值(不)等式	(55)
题型二	证明函数与其导数的关系	(56)
题型三	求解与函数差值有关的问题	(57)
题型四	证明多个中值所满足的中值等式	(58)
题型五	求中值的极限位置	(58)

1.2.9	利用柯西中值定理证明中值等式	(59)
题型一	证明两函数差值(增量)比的中值等式	(59)
题型二	证明两函数导数比的中值等式	(59)
1.2.10	泰勒定理的两点应用	(60)
题型一	证明与高阶导数有关的中值(不)等式	(60)
题型二	计算按常规方法不好求的未定式极限	(62)
1.2.11	利用导数证明函数不等式	(63)
题型一	证明含有或可化为函数改变量部分的不等式	(63)
题型二	已知 $F(a) \geq 0$ (或 $F(b) \geq 0$), 证明 $x > a$ (或 $x < b$) 时 $F(x) > 0$	(63)
题型三	证明含常数加项的不等式	(64)
题型四	证明含两个变量(常数)的函数(数值)不等式	(65)
题型五	证明两点函数值组成的(中值)不等式	(65)
1.2.12	讨论函数的性态	(66)
题型一	证明函数在区间 I 上是一个常数	(66)
题型二	证明(判别)函数的单调性	(66)
题型三	利用极限式讨论函数是否取得极值	(66)
题型四	利用二阶微分方程讨论函数是否取极值, 其曲线是否有拐点	(68)
题型五	利用导数不等式, 讨论函数是否取极值, 其曲线是否有拐点	(68)
题型六	求曲线凹凸区间与拐点	(69)
题型七	求函数的单调区间、极值、最值	(70)
题型八	求曲线的渐近线	(72)
1.2.13	利用函数性态讨论方程的根	(73)
题型一	讨论不含参数的方程实根的存在性及其个数	(73)
题型二	讨论含参数的方程实根的存在性及其个数	(74)
1.2.14	函数性态与函数图形	(75)
题型一	利用函数性态作函数图形	(75)
题型二	利用函数的图形, 确定其导函数的图形	(76)
题型三	利用导函数的图形, 确定原来函数的性态	(76)
1.2.15	一元函数微分学的应用	(77)
题型一	求平面曲线的切线方程和法线方程	(77)
题型二	求解与切线在坐标轴上的截距有关的问题	(78)
题型三	求解与两曲线相切的有关问题	(79)
题型四	求解与平面曲线的曲率有关的问题	(79)
习题 1.2		(80)
1.3	一元函数积分学	(83)
1.3.1	原函数与不定积分的关系	(83)
题型一	已知某函数, 求其原函数	(83)
题型二	已知某函数的一个原函数, 求该函数	(83)
1.3.2	计算不定积分	(84)
题型一	计算被积函数仅为一类或为两类不同函数的不定积分	(84)
题型二	计算简单无理函数的不定积分	(85)
题型三	求 $\int \frac{1}{(ax+b)^k} f\left[\frac{1}{(ax+b)^{k-1}}\right] dx$, 其中 $k \neq 1$ 为正实数	(88)
题型四	求 $\int \frac{f(x)}{g(x)} dx$	(88)
题型五	求被积函数的分母相差为常数的两函数乘积的不定积分	(90)
题型六	求三角函数的不定积分	(90)
题型七	求被积函数含反三角函数为因子函数的积分	(91)

1.3.3	利用定积分性质计算定积分	(91)
题型一	利用其几何意义计算定积分	(91)
题型二	计算对称区间上的定积分	(92)
题型三	计算周期函数的定积分	(93)
题型四	利用定积分的常用计算公式计算定积分	(94)
题型五	计算被积函数含函数导数的积分	(95)
题型六	比较和估计定积分的大小	(95)
题型七	求解含积分值为常数的函数方程	(96)
题型八	计算几类须分子区间积分的定积分	(97)
题型九	计算含参数的定积分	(98)
题型十	计算需换元计算的定积分	(99)
题型十一	求连续函数的定积分的极限	(100)
1.3.4	求解与变限积分有关的问题	(100)
题型一	计算含变限积分的极限	(100)
题型二	求变限积分的导数	(102)
题型三	求变限积分的定积分	(104)
题型四	讨论变限积分函数的性态	(105)
1.3.5	证明定积分等式	(105)
题型一	证明定积分的变换公式	(105)
题型二	证明定积分中值等式	(107)
1.3.6	证明积分不等式	(108)
题型一	证明积分限相等时不等式两端成为零的积分不等式	(108)
题型二	证明函数及其导函数所满足的积分不等式	(109)
题型三	证明 $\int_a^b f(x)dx$ (或 $ \int_a^b f(x)dx $) $\leq k$ (或 $\geq k$), k 为常数	(109)
题型四	证明题设中有二阶导数大(或小)于等于零的定积分不等式	(110)
1.3.7	计算反常积分	(110)
题型一	计算无穷区间上的反常积分	(110)
题型二	判别 $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ 与 $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p}$ ($a > 0$) 的敛散性	(112)
题型三	计算无界函数的反常积分	(113)
题型四	判别 $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$ 与 $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ 的敛散性	(114)
1.3.8	定积分的应用	(115)
题型一	已知曲线方程,求其所围平面图形的面积	(115)
题型二	已知曲线所围平面图形的面积(或其旋转体体积)反求该曲线	(116)
题型三	计算平面曲线的弧长	(116)
题型四	计算平行截面面积已知的立体体积	(117)
题型五	求旋转体体积	(117)
题型六	求旋转体的侧(表)面积	(119)
题型七	求解几何应用与最值问题相结合的应用题	(120)
题型八	计算变力所做的功	(121)
题型九	计算液体的侧压力	(122)
题型十	计算细杆对质点的引力	(122)
题型十一	计算函数在区间上的平均值	(123)
习题 1.3		(123)
1.4	向量代数和空间解析几何	(126)
1.4.1	向量代数及其简单应用	(126)
题型一	用坐标表达式进行向量运算	(126)

题型二	计算向量的数量积、向量积、混合积	(127)
题型三	利用向量运算证明(确定)向量关系	(128)
1.4.2	求平面方程	(129)
题型一	求过某已知点的平面方程	(129)
题型二	求过已知直线的平面方程	(130)
题型三	根据平面在坐标轴上的相对位置,求其方程	(130)
题型四	求过两平面交线的平面方程	(131)
1.4.3	求直线方程	(131)
题型一	求过已知点的直线方程	(132)
题型二	求过已知点且与已知直线相交的直线方程	(132)
题型三	求与两直线相交的直线方程	(133)
题型四	求直线在平面上的投影直线方程	(134)
1.4.4	讨论直线与平面的位置关系	(134)
题型一	讨论平面间的位置关系	(134)
题型二	讨论直线与直线的位置关系	(136)
题型三	讨论直线与平面的位置关系	(137)
1.4.5	求二次曲面方程和空间曲线在坐标面上的投影方程	(137)
题型一	求坐标面上曲线绕坐标轴旋转所得的旋转曲面方程	(138)
题型二	求空间曲线绕坐标轴旋转所得的曲面方程	(138)
题型三	求母线平行于坐标轴的柱面方程	(139)
题型四	求空间曲线在坐标面上的投影方程	(140)
1.4.6	求解空间解析几何与线性代数、微积分相结合的综合题	(140)
习题 1.4		(142)
1.5	多元函数微分法及其应用	(144)
1.5.1	正确理解二元函数连续、可偏导及可微之间的关系	(144)
题型一	依定义判别二元函数在某点是否连续、可偏导及可微	(144)
题型二	判别二元函数连续、可偏导、可微之间的关系	(145)
1.5.2	计算多元函数的偏导数和全微分	(146)
题型一	利用隐函数存在定理确定隐函数	(146)
题型二	求抽象复合函数的偏导数	(146)
题型三	计算隐函数的导数	(149)
题型四	作变量代换将偏导数满足的方程变形	(151)
题型五	求方向导数和梯度	(152)
题型六	求二元函数的全微分	(154)
1.5.3	多元函数微分学的应用	(154)
题型一	已知空间曲线的参数方程,求其切线或法平面方程	(154)
题型二	已知空间曲线为两曲面的交线,求其切线或法平面方程	(155)
题型三	已知空间曲面方程,求其切平面或法线方程	(156)
题型四	求二元函数的极值和最值	(157)
题型五	求二(多)元函数的条件极值	(159)
习题 1.5		(161)
1.6	多元函数积分学	(163)
1.6.1	利用区域的对称性化简多元函数的积分	(163)
题型一	计算积分区域具有对称性,被积函数具有奇偶性的重积分	(163)
题型二	计算积分区域关于直线 $y=x$ 对称的二重积分	(165)
题型三	计算积分区域具有轮换对称性的三重积分	(166)
题型四	计算积分曲线(面)具有对称性的第一类曲线(面)积分	(166)
题型五	计算平面积分曲线关于 $y=x$ 对称的第一类曲线积分	(167)

题型六	计算空间积分曲线具有轮换对称性的第一类曲线积分	(167)
题型七	计算积分曲线具有对称性的第二类曲线积分	(168)
题型八	计算积分曲面具有对称性的第二类曲面积分	(169)
1.6.2	交换积分次序及转换二次积分	(170)
题型一	交换二次积分的积分次序	(170)
题型二	转换二次积分	(171)
1.6.3	计算二重积分	(172)
题型一	计算被积函数分区域给出的二重积分	(172)
题型二	计算圆域或部分圆域上的二重积分	(173)
1.6.4	计算三重积分	(175)
题型一	计算积分区域的边界方程均为一次的三重积分	(175)
题型二	计算积分区域为旋转体的三重积分	(175)
题型三	计算积分区域由球面或球面与锥面所围成的三重积分	(176)
题型四	计算被积函数至少缺两个变量的三重积分	(177)
题型五	计算易求出其截面区域上的二重积分的三重积分	(178)
1.6.5	计算曲线积分	(178)
题型一	计算第一类平面曲线积分	(178)
题型二	求解平面上与路径无关的第二类曲线积分有关问题	(179)
题型三	计算平面上与路径有关的第二类曲线积分	(184)
题型四	计算空间第二类曲线积分	(185)
1.6.6	计算曲面积分	(187)
题型一	计算第一类曲面积分	(187)
题型二	计算第二类曲面积分	(190)
题型三	已知第二类曲面积分的值,求被积式中的未知函数	(195)
1.6.7	多元函数积分学的应用	(196)
题型一	计算空间曲线的弧长	(196)
题型二	求曲面面积	(196)
题型三	计算立体体积	(198)
题型四	求质量、重心及转动惯量	(200)
题型五	计算变力沿曲线所做的功	(202)
题型六	计算物体对质点的引力	(203)
题型七	计算向量场的散度与流量(通量)	(204)
题型八	计算向量场的旋度与环流量	(206)
习题 1.6		(207)
1.7	级数	(210)
1.7.1	利用定义及其性质判别级数的敛散性	(210)
题型一	判别一般项由相邻两项代数和组成的级数的敛散性	(210)
题型二	利用级数的性质判别级数的敛散性	(210)
1.7.2	判别三类常数项级数的敛散性	(211)
题型一	判别正项级数的敛散性	(211)
题型二	判别交错级数的敛散性	(214)
题型三	判别任意项级数的敛散性	(215)
1.7.3	证明常数项级数的敛散性	(217)
题型一	证明一般项为相邻两项代数和的级数的敛散性	(217)
题型二	已知一级数收敛,证明相关级数收敛	(217)
题型三	已知一般项有极限,证明该级数的敛散性	(218)
题型四	证明(判别)一般项为(含)定积分的级数的敛散性	(219)
题型五	证明一般项用递推关系式给出的级数的敛散性	(219)

题型六	已知函数高阶可导,证明由该函数值组成的级数的敛散性	(219)
1.7.4	幂级数的收敛半径、收敛区间及收敛域的求法	(220)
1.7.5	求级数的和	(222)
题型一	求 $\sum_{n=1}^{\infty} P(n)x^n$ 的和函数, $P(n)$ 为 n 的多项式	(223)
题型二	求 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{Q(n)} x^n$ 的和函数, $Q(n)$ 为 n 的多项式	(224)
题型三	求含阶乘因子的幂级数的和函数	(226)
题型四	求数值级数的和	(228)
1.7.6	将简单函数间接展开成幂级数	(230)
题型一	求反三角函数的幂级数展开式	(231)
题型二	将对数函数展成幂级数	(232)
题型三	将有理分式函数展成幂级数	(232)
题型四	将三角函数展成幂级数	(232)
1.7.7	傅里叶级数	(233)
题型一	将周期函数展为傅里叶级数	(233)
题型二	求傅里叶系数	(237)
题型三	求傅里叶级数的和函数在某点的值	(238)
习题 1.7		(238)
1.8	常微分方程	(241)
1.8.1	求解一阶线性微分方程	(241)
题型一	求解可分离变量的微分方程	(241)
题型二	求解齐次方程	(241)
题型三	求解一阶线性方程	(242)
题型四	求解几类可化为一阶线性方程的方程	(242)
题型五	求解方程 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$	(244)
题型六	求解由变量的增量关系给出的一阶方程	(245)
题型七	求满足某种性质的一阶微分方程的特解	(245)
1.8.2	求解线性微分方程	(247)
题型一	利用线性微分方程解的结构和性质求解有关问题	(247)
题型二	求解可降阶的二阶微分方程	(248)
题型三	求解常数系数齐次线性方程	(249)
题型四	求解二阶常数系数非齐次线性方程	(250)
题型五	求解欧拉方程	(253)
题型六	求解含变限积分的方程	(254)
1.8.3	已知特解反求其常数系数线性方程	(254)
题型一	已知特解反求其齐次方程	(254)
题型二	已知特解反求其非齐次方程	(255)
1.8.4	用微分方程求解几何和物理中的简单应用题	(256)
习题 1.8		(260)

第2篇 线性代数

2.1	计算行列式	(262)
2.1.1	计算数字型行列式	(262)
题型一	计算非零元素主要在一条或两条对角线上的行列式	(262)
题型二	计算非零元素在三条线上的行列式	(263)
题型三	计算行(列)和相等的行列式	(264)
题型四	计算范德蒙行列式	(265)

题型五	求代数余子式线性组合的值	(265)
题型六	求行列式中含某因子的所有项	(266)
2.1.2	计算抽象矩阵的行列式	(267)
题型一	求由行(列)向量表示的矩阵的行列式的值	(267)
题型二	计算与伴随矩阵有关的矩阵行列式	(268)
题型三	计算含零子块的四分块矩阵的行列式	(269)
题型四	证明方阵的行列式等于零,或不等于零	(269)
2.1.3	克莱姆法则的应用	(270)
习题 2.1		(272)
2.2	矩阵	(273)
2.2.1	证明矩阵的可逆性	(273)
题型一	已知一矩阵等式证明有关矩阵可逆,并求其逆矩阵	(273)
题型二	证明矩阵 A 可逆,且 $A^{-1}=B$	(274)
题型三	证明和(差)矩阵可逆	(275)
题型四	求矩阵的逆矩阵,该矩阵含一(些)矩阵的逆矩阵	(275)
题型五	证明方阵为不可逆矩阵	(276)
2.2.2	矩阵元素给定,求其逆矩阵的方法	(276)
2.2.3	求解与伴随矩阵有关的问题	(277)
题型一	计算与伴随矩阵有关的矩阵行列式	(278)
题型二	求与伴随矩阵有关的矩阵的逆矩阵	(279)
题型三	求与伴随矩阵有关的矩阵的秩	(279)
题型四	求伴随矩阵	(279)
2.2.4	计算 n 阶矩阵的高次幂	(280)
题型一	计算能分解为一列向量与一行向量相乘的矩阵的高次幂	(280)
题型二	计算能相似对角化的矩阵的高次幂	(280)
题型三	计算能分解为两可交换矩阵之和的矩阵的高次幂	(281)
题型四	计算其平方等于原矩阵或单位矩阵倍数的矩阵高次幂	(282)
2.2.5	求矩阵的秩	(282)
题型一	求元素具体给定的矩阵的秩	(282)
题型二	求抽象矩阵的秩	(283)
题型三	已知矩阵的秩,求其待定常数	(285)
2.2.6	分块矩阵乘法运算的应用举例	(286)
2.2.7	求解矩阵方程	(287)
题型一	求解含单位矩阵加项的矩阵方程	(287)
题型二	求解只含一个未知矩阵的矩阵方程	(288)
题型三	求解含多个未知矩阵的矩阵方程	(289)
题型四	求与已知矩阵可交换的所有矩阵	(291)
题型五	已知一矩阵方程,求方程中某矩阵的行列式	(291)
2.2.8	初等变换与初等矩阵的关系的应用	(292)
题型一	用初等矩阵表示相应的初等变换	(292)
题型二	利用初等矩阵的逆矩阵的性质计算矩阵	(293)
习题 2.2		(293)
2.3	向量	(296)
2.3.1	判别向量组线性相关与线性无关	(296)
题型一	用线性相关性定义做选择题、填空题	(296)
题型二	判别分量已知的向量组的线性相关性	(297)
题型三	证明几类向量组的线性相关性	(298)
题型四	已知向量组的线性相关性,求其待定常数	(302)

2.3.2	判定向量能否由向量组线性表示	(302)
题型一	判定分量已知的向量能否由向量组线性表示	(302)
题型二	判断一抽象向量能否由向量组线性表示	(304)
题型三	判别一向量组能否由另一向量组线性表示	(305)
2.3.3	两向量组等价的常用证法	(305)
2.3.4	向量组的秩与极大线性无关组	(308)
题型一	求分量给出的向量组的秩及其极大线性无关组	(309)
题型二	将向量用极大线性无关组表示	(310)
题型三	证明抽象向量组的秩有关问题	(310)
题型四	证某向量组为一极大无关组	(311)
2.3.5	向量空间	(312)
题型一	求解空间的基、标准正交基(规范正交基)	(312)
题型二	求过渡矩阵	(314)
题型三	求向量在某组基下的坐标	(314)
习题 2.3		(316)
2.4	线性方程组	(318)
2.4.1	判定线性方程组解的情况	(318)
题型一	判定齐次线性方程组解的情况	(318)
题型二	判定非齐次线性方程组解的情况	(320)
2.4.2	由其解反向求方程组或其参数	(321)
题型一	已知 $AX=0$ 的解的情况,反求 A 中参数	(322)
题型二	已知 $AX=b$ 的解的情况,反求方程组中参数	(322)
题型三	已知其基础解系,求该方程组的系数矩阵	(323)
2.4.3	证明一组向量为基础解系	(324)
2.4.4	基础解系和特解的简便求法	(325)
2.4.5	求解含参数的线性方程组	(326)
题型一	求解方程个数与未知数个数相等的含参数的线性方程组	(327)
题型二	求解方程个数与未知数个数不等的含参数的线性方程组	(328)
题型三	求解参数仅出现在常数项的线性方程组	(328)
题型四	求含参数的方程组满足一定条件的通解	(329)
2.4.6	求抽象线性方程组的通解	(330)
题型一	A 没有具体给出,求 $AX=0$ 的通解	(330)
题型二	已知 $AX=b$ 的特解,求其通解	(331)
题型三	利用线性方程组的向量形式求(证明)其解	(332)
2.4.7	求两线性方程组的非零公共解	(333)
题型一	求两齐次线性方程组的非零公共解	(333)
题型二	证明两齐次线性方程组有非零公共解	(334)
题型三	讨论两方程组同解的有关问题	(335)
习题 2.4		(336)
2.5	矩阵的特征值、特征向量	(339)
2.5.1	求矩阵的特征值、特征向量	(339)
题型一	求元素给出的矩阵的特征值、特征向量	(339)
题型二	证明(判别)抽象矩阵的特征值、特征向量	(341)
2.5.2	由特征值和(或)特征向量反求其矩阵	(342)
题型一	由特征值和(或)特征向量反求矩阵的待定常数	(342)
题型二	已知特征值、特征向量,反求其矩阵	(343)
题型三	计算 $A^* \beta$, 其中 β 为列向量, A 为方阵	(345)
2.5.3	求相关联矩阵的特征值、特征向量	(345)

2.5.4	判别同阶方阵是否相似	(347)
题型一	判别方阵是否可对角化	(347)
题型二	判别两同阶方阵是否相似	(349)
2.5.5	相似矩阵性质的简单应用	(350)
2.5.6	与两矩阵相似有关的计算	(351)
题型一	矩阵 A 可相似对角化, 求 A 中待定常数及可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, 其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为 A 的特征值	(351)
题型二	A 为实对称矩阵, 求 A 中待定常数及正交矩阵 Q , 使 $Q^{-1}AQ = Q^T AQ = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, 其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为 A 的特征值	(352)
题型三	已知矩阵 A 和可逆矩阵 P 满足一等式, 求矩阵 B , 使 $P^{-1}AP = B$	(353)
习题 2.5		(354)
2.6	二次型	(356)
2.6.1	化二次型为标准形	(356)
题型一	化二次型为标准形	(356)
题型二	已知二次型为标准形, 确定该二次型	(359)
2.6.2	判别或证明实二次型(实对称矩阵)的正定性	(360)
题型一	判别具体给定的二次型的正定性	(360)
题型二	判别或证明抽象的二次型(实对称矩阵)的正定性	(361)
题型三	确定待定常数使二次型或其矩阵正定	(362)
题型四	证明与正定矩阵相关联矩阵的正定性	(363)
2.6.3	合同矩阵	(363)
题型一	判别两实对称矩阵合同	(363)
题型二	讨论矩阵等价、相似及合同的关系	(365)
习题 2.6		(366)

第3篇 概率论与数理统计

3.1	随机事件和概率	(368)
3.1.1	随机事件间的关系及运算	(368)
题型一	描绘随机试验的样本空间	(368)
题型二	用式子表示事件关系及其运算	(368)
题型三	利用事件运算的性质或图示法简化事件算式	(369)
题型四	求满足一定条件的事件关系	(369)
3.1.2	直接计算随机事件的概率	(370)
题型一	计算古典型概率	(370)
题型二	计算几何型概率	(371)
题型三	计算伯努利概率中事件的概率	(373)
3.1.3	间接计算随机事件的概率	(373)
题型一	计算和、差、积事件的概率	(373)
题型二	求与包含关系有关的事件的概率	(375)
题型三	计算与互斥事件有关的事件的概率	(376)
题型四	求与条件概率有关的事件的概率	(376)
题型五	求与他事件有关的单个事件的概率	(376)
题型六	判别或证明事件概率不等式	(377)
3.1.4	几个计算概率公式的实际应用	(377)
题型一	用加法公式求解实际应用题	(377)
题型二	用条件概率与概率的乘法公式求解实际应用题	(378)
题型三	用全概公式和逆概(贝叶斯)公式求解实际应用题	(378)
题型四	利用抽签原理计算事件概率	(381)

3.1.5	判别事件的独立性	(382)
题型一	判别(证明)两事件相互独立	(382)
题型二	判别(证明) $n(n>2)$ 个事件相互独立	(383)
习题 3.1		(384)
3.2	一维随机变量及其分布	(387)
3.2.1	分布列、概率密度及分布函数性质的应用	(387)
题型一	判别分布列、概率密度及分布函数	(388)
题型二	证明某实函数为某随机变量的分布函数	(389)
题型三	利用分布的性质,确定待定常数或所满足的条件	(389)
题型四	求随机变量落在某点或某区间上的概率	(390)
3.2.2	求分布列(概率分布)、概率密度及分布函数	(390)
题型一	求概率分布(分布律)及其分布函数	(390)
题型二	求连续型随机变量的分布函数或其取值	(392)
题型三	求概率密度	(393)
3.2.3	利用常见分布计算有关事件的概率	(393)
题型一	利用二项分布计算伯努利概率中事件的概率	(394)
题型二	利用超几何分布计算事件的概率	(396)
题型三	利用几何分布计算事件的概率	(396)
题型四	利用泊松分布计算事件的概率	(396)
题型五	利用均匀分布计算事件的概率	(397)
题型六	利用指数分布计算事件的概率	(398)
题型七	利用正态分布计算事件的概率	(399)
3.2.4	随机变量函数的分布	(402)
题型一	已知一离散型随机变量的分布,求其函数(另一离散型随机变量)的分布	(402)
题型二	已知一连续型随机变量的分布,求其函数(另一连续型随机变量)的分布	(403)
题型三	已知一连续型随机变量的分布,求其函数(离散型随机变量)的分布	(405)
题型四	讨论随机变量函数分布的性质	(406)
习题 3.2		(407)
3.3	二维随机变量的联合概率分布	(409)
3.3.1	求二维随机变量的分布	(409)
题型一	求二维离散型随机变量的联合分布律	(409)
题型二	求二维随机变量的边缘分布	(412)
题型三	由联合分布、边缘分布求条件分布	(414)
题型四	由条件分布反求联合分布、边缘分布	(417)
题型五	已知分区域定义的联合密度,求其分布函数	(418)
3.3.2	随机变量的独立性	(419)
题型一	判别两随机变量的独立性	(419)
题型二	利用独立性确定联合分布中的待定常数	(423)
3.3.3	计算二维随机变量取值的概率	(424)
题型一	计算两离散型随机变量运算后取值的概率	(424)
题型二	求二维连续型随机变量落入平面区域内的概率	(425)
题型三	求与 $\max(X,Y)$ 或(和) $\min(X,Y)$ 有关的概率	(426)
题型四	求系数为随机变量的二次方程有根、无根的概率	(426)
3.3.4	求二维随机变量函数的分布	(427)
题型一	已知 (X,Y) 的联合分布律,求 $Z=g(X,Y)$ 的分布律	(427)
题型二	求两连续型随机变量的简单函数的分布	(428)
题型三	已知 X,Y 的分布,求 $\max(X,Y)$ 或(和) $\min(X,Y)$ 的分布	(432)
习题 3.3		(434)

3.4	随机变量的数字特征	(437)
3.4.1	求一维随机变量的数字特征	(437)
题型一	求随机变量的数学期望与方差	(437)
题型二	求随机变量函数的数学期望	(440)
题型三	计算随机变量的矩	(442)
3.4.2	求二维随机变量的数字特征	(443)
题型一	求 (X,Y) 的函数 $g(X,Y)$ 的数学期望和方差	(443)
题型二	计算协方差和相关系数	(444)
3.4.3	计算两类分布的数字特征	(448)
题型一	计算正态分布的数字特征	(448)
题型二	计算 $Z=\max(X,Y)$ 或(和) $W=\min(X,Y)$ 的数字特征	(449)
3.4.4	讨论随机变量相关性与独立性的关系	(451)
题型一	确定两随机变量相关与不相关	(451)
题型二	讨论相关性与独立性的关系	(452)
3.4.5	已知数字特征,求分布中的待定常数	(453)
3.4.6	求解两类综合应用题	(455)
题型一	求解与数字特征有关的实际应用题	(455)
题型二	求解概率论与其他数学分支的综合应用题	(456)
习题 3.4		(458)
3.5	大数定律和中心极限定理	(460)
3.5.1	用切比雪夫不等式估计事件的概率	(460)
3.5.2	大数定律成立的条件和结论	(462)
题型一	利用三个大数定律成立的条件解题	(464)
题型二	求随机变量序列依概率的收敛值	(466)
3.5.3	两个中心极限定理的简单应用	(467)
题型一	利用棣莫弗-拉普拉斯定理近似计算事件概率	(467)
题型二	已知随机变量取值的概率,估计取值范围	(468)
题型三	应用列维-林德伯格中心极限定理的条件、结论解题	(469)
题型四	近似计算 n 个随机变量之和取值的概率	(470)
题型五	已知 n 个随机变量之和取值的概率,求个数 n	(470)
习题 3.5		(471)
3.6	数理统计初步	(473)
3.6.1	求统计量的分布	(473)
题型一	求统计量的分布及其分布参数	(474)
题型二	求统计量取值的概率	(477)
题型三	求统计量的数字特征	(478)
题型四	求经验分布函数	(479)
3.6.2	参数估计	(480)
题型一	求总体分布中未知参数的矩估计量(值)	(480)
题型二	求未知参数的极(最)大似然估计量(值)	(481)
题型三	判别估计量的无偏性、有效性和一致性(相合性)	(484)
题型四	求正态总体参数的置信区间及其有关参数	(487)
3.6.3	假设检验	(492)
题型一	计算简单情形下的两类错误概率	(493)
题型二	对单个正态总体参数进行假设检验	(494)
题型三	对两个正态总体参数进行假设检验	(495)
题型四	用检验方法及其结论做填空题与选择题	(497)
习题 3.6		(498)
习题答案与提示		(501)

第1篇 高等数学

1.1 函数、极限、连续

1.1.1 求几类函数的表达式

题型一 求分段函数的复合函数

常用代入法或分段代入法求之.

设 $f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \leq \varphi_1(x), \\ f_2(x), & x > \varphi_2(x); \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} g_1(x), & x \leq \psi_1(x), \\ g_2(x), & x > \psi_2(x). \end{cases}$ 为求 $f[g(x)]$, 先将 $g(x)$ 代入 $f(x)$ 表达式中的所有 x , 得到

$$f[g(x)] = \begin{cases} f_1[g(x)], & g(x) \leq \varphi_1[g(x)], \\ f_2[g(x)], & g(x) > \varphi_2[g(x)]. \end{cases} \quad \textcircled{1}$$

②

再将 $g(x)$ 的分段表达式 $g_1(x)$ 分别代入式①、式②中右端的 $g(x)$, 并将所得不等式与 $g_1(x)$ 的自变量的变化范围 $x \leq \psi_1(x)$ 求交. 对 $g(x)$ 的另一分段表达式 $g_2(x)$ 也同样处理, 于是得到

$$f[g(x)] = \begin{cases} f_1[g_1(x)], & g_1(x) \leq \varphi_1[g_1(x)], & x \leq \psi_1(x), & \textcircled{3} \\ f_2[g_1(x)], & g_1(x) > \varphi_2[g_1(x)], & x \leq \psi_1(x), & \textcircled{4} \\ f_1[g_2(x)], & g_2(x) \leq \varphi_1[g_2(x)], & x > \psi_2(x), & \textcircled{5} \\ f_2[g_2(x)], & g_2(x) > \varphi_2[g_2(x)], & x > \psi_2(x). & \textcircled{6} \end{cases}$$

分别求解式③、式④、式⑤、式⑥中的不等式组(其中有些不等式组可能无解), 即得复合函数 $f[g(x)]$ 各段自变量的取值范围.

例1[2001年1,2]* 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$ 则 $f[f(x)] = \underline{\hspace{2cm}}$.

解一 用代入法求之, 得到

$$f[f(x)] = \begin{cases} 1, & |f(x)| \leq 1, \\ 0, & |f(x)| > 1 \end{cases} = \begin{cases} 1, & |1| \leq 1, & |x| \leq 1, & \textcircled{1} \\ 0, & |1| > 1, & |x| \leq 1, & \textcircled{2} \\ 1, & |0| \leq 1, & |x| > 1, & \textcircled{3} \\ 0, & |0| > 1, & |x| > 1. & \textcircled{4} \end{cases}$$

其中上式最右端的不等式组②与④无解, 因而得到

$$f[f(x)] = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 1, & |x| > 1 \end{cases} = 1 \quad (-\infty < x < +\infty).$$

解二 由于对任意实数 x , 均有 $|f(x)| \leq 1$, 根据 $f(x)$ 的定义有 $f[f(x)] = 1$.

题型二 已知 $f[g(x)] = \varphi(x)$, 其中 $\varphi(x)$ 是已知函数, 求 f 或 g

* 例1[2001年1,2]表示例1是2001年数学一和数学二的考题. 下同.