

积分方程

及其数值方法

魏培君 编著



冶金工业出版社

<http://www.cnmp.com.cn>

积分方程及其数值方法

魏培君 编著

北 京
冶金工业出版社
2007

内 容 简 介

本书系统介绍了积分方程的解析及数值方法基本理论,主要包括第Ⅰ类和第Ⅱ类的 Fredholm 以及 Volterra 型积分方程的解析方法和数值方法,其中涉及的积分核有连续核、平方可积核、对称核、卷积核等。与现有积分方程教材相比,本书在保证积分方程基本理论相对完整的基础上,增加了积分方程数值方法的篇幅,特别是增加了求解不适定的第Ⅰ类积分方程的正则化数值方法。此外,考虑到泛函分析与积分方程的密切关系,还增加了对泛函分析基本知识的介绍。出于篇幅的考虑,本书没有涉及 Cauchy 型奇异积分方程和非线性积分方程。本书适合作为高等院校数学、力学、物理以及工科相关专业大学本科和研究生学习“积分方程”课程的教学用书,也可供广大科技工作者和工程技术人员阅读和参考。

图书在版编目(CIP)数据

积分方程及其数值方法/魏培君编著. —北京:冶金工业出版社,2007.8

ISBN 978-7-5024-4337-5

I. 积… II. 魏… III. 积分方程-数值计算 IV. 0241.83

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 119553 号

出 版 人 曹胜利(北京沙滩嵩祝院北巷 39 号,邮编 100009)

责任编辑 程志宏 美术编辑 李 心 版面设计 张 青

责任校对 侯 珮 李文彦 责任印制 丁小晶

ISBN 978-7-5024-4337-5

北京百善印刷厂印刷;冶金工业出版社发行;各地新华书店经销

2007 年 8 月第 1 版,2007 年 8 月第 1 次印刷

787mm×1092mm 1/16;9.75 印张;233 千字;147 页;1-3000 册

20.00 元

冶金工业出版社发行部 电话:(010)64044283 传真:(010)64027893

冶金书店 地址:北京东四西大街 46 号(100711) 电话:(010)65289081

(本社图书如有印装质量问题,本社发行部负责退换)

序

许多科学和工程问题的数学模型都可归结为积分方程,还有些问题的数学模型既可归结为微分方程也可归结为积分方程。事实上,积分方程与微分方程之间有密切的关系。一般情况下,微分方程与积分方程之间可以相互转化。微分方程和积分方程都是描述研究对象物理规律的数学形式。通常微分方程需附加初值条件或边值条件以形成定解条件。而积分方程本身已经包含了初值或边值信息。这种差别使得积分方程的求解方法与微分方程的求解方法有较大不同。特别是在求方程的数值解时,积分方程往往较微分方程更容易、更直接,而且随着计算机科学和技术的发展,数值计算的新方法也层出不穷。积分方程的各种数值方法都是建立在积分方程的基本理论基础之上的,因而在数值方法越来越得到重视的今天,传统的积分方程基本理论和解析方法依然是不可或缺的。

本书在保证积分方程基本理论相对完整的基础上,相对于其他教材增加了积分方程的数值方法的篇幅,以满足广大科技工作者和各领域工程师的需要。特别是增加了求解不适定的第Ⅰ类积分方程的正则化数值方法。此外,考虑到泛函分析与积分方程的密切关系,为方便读者阅读本书,在第2章对泛函分析基本知识作了简单介绍。出于篇幅的考虑,本书没有涉及Cauchy型奇异积分方程和非线性积分方程。

本书适合作为高等院校数学、力学、物理以及工科相关专业大学本科和研究生学习“积分方程”课程的教学用书。也可供广大科技工作者和工程技术人员阅读与参考。读者具备“高等数学”、“线性代数”、“微分方程”和“积分变换”等课程的知识,就可顺利阅读本教材。

本书是在作者多年教授“积分方程”课程的讲义基础上整理完成的。在编写的过程中,作者的研究生占正强、赵艳萍、郑敏在手稿的文字和数学公式录入以及计算机制图等方面做了大量的工作,对他们的辛勤劳动作者表示衷心的感谢。本书的出版得到国家自然科学基金项目(No. 10672019, No. 10272003)和北京科技大学引进人才基金的联合资助,作者在此一并表示感谢。由于积分方程的解析和数值方法内容覆盖范围很广,加之作者学术水平有限,书中难免有错误、疏漏和不妥之处,请各位同行和读者不吝指正。

作者
2007年5月
于北京科技大学

目 录

1 积分方程引论	1
1.1 积分方程的来源	1
1.2 积分方程的概念与分类	4
1.3 积分方程与微分方程的关系	8
习题	14
2 Hilbert 空间与线性算子	16
2.1 度量空间	16
2.2 线性空间	17
2.3 赋范线性空间与 Banach 空间	19
2.4 内积空间与 Hilbert 空间	19
2.5 线性算子	25
2.6 线性算子的谱	29
习题	30
3 连续或平方可积核积分方程	31
3.1 连续核和平方可积核	31
3.2 退化核积分方程	33
3.3 逐次逼近法	37
3.4 Fredholm 方法	43
3.5 Fredholm 定理	47
习题	51
4 对称核积分方程	53
4.1 标准正交函数系	53
4.2 对称核的特征值与特征函数	55
4.3 Hilbert-Schmidt 展开定理	59
4.4 Hilbert-Schmidt 方法	62
习题	68

5 第 I 类积分方程	70
5.1 第 I 类 Fredholm 方程的特点	70
5.2 第 I 类积分方程的特征值与特征函数	74
5.3 Schmidt-Picard 定理	80
5.4 两种逐次逼近法	86
5.5 第 I 类 Volterra 型积分方程	89
习题	92
6 卷积核积分方程	94
6.1 傅里叶变换方法	94
6.2 拉普拉斯变换方法	101
6.3 梅林变换方法	107
习题	110
7 第 II 类积分方程的数值方法	112
7.1 未知函数级数展开法	112
7.2 积分核级数展开法	115
7.3 求积公式法	118
7.4 边界元方法	121
7.5 迭代方法	128
8 第 I 类积分方程的数值方法	131
8.1 正则化策略与正则解	131
8.2 连续正则化方法	133
8.3 离散正则化方法	136
8.4 滤波正则化方法	140
8.5 迭代正则化方法	144
参考文献	147

1 积分方程引论

1.1 积分方程的来源

例1 弹性弦问题。

设有一条柔软的弹性弦 AB 长为 l , 两端点 $A(x=0)$ 和 $B(x=l)$ 固定在如图 1.1-1 所示的直角坐标系的横轴上, 弹性弦所承受的分布载荷为 $p(x)$ 。在分布载荷的作用下, 弹性弦发生挠曲, 挠曲曲线用 $y(x)$ 表示。在对弹性弦问题做深入分析之前, 先作如下假设:

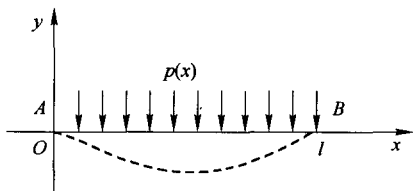


图 1.1-1 均布荷载下的弹性弦

(1) 假设弹性弦十分柔软, 因而由于弯曲和扭转产生的力矩和扭矩均可忽略不计。这里只考虑由于弦的伸长而产生的弹性张力。

(2) 载荷相对于弹性弦的弹性模量是微小的, 因而挠曲变形也是微小的。

(3) 在载荷作用下, 弹性弦各处的张力近似相等。

考虑如下问题。

A 给定载荷分布 $p(x)$, 求弹性弦的挠曲曲线 $y(x)$

首先考虑在弹性弦上的任意一点 $C(x=\xi)$ 处作用集中载荷时的挠曲曲线 $y(x)$ 。如图 1.1-2 所示, 挠曲曲线是三角形, 最大挠度即 CC' 发生在 $x=\xi$ 处。设最大挠度为 δ 。由于假设条件(2), 挠度 δ 相对于 AC 和 CB 是微小的。故近似有:

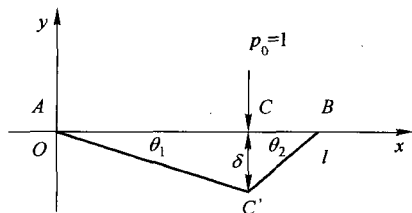


图 1.1-2 集中荷载下的弹性弦

$$\sin\theta_1 \approx \tan\theta_1 = \frac{\delta}{\xi}, \sin\theta_2 \approx \tan\theta_2 = \frac{\delta}{l-\xi} \quad (1.1-1)$$

式中, θ_1 和 θ_2 分别为 AC' , $C'B$ 与 x 轴的夹角。设弹性弦中的张力为 T_0 , 根据静力平衡条件, 在 y 方向有:

$$T_0 \sin\theta_1 + T_0 \sin\theta_2 = P_0 \quad (1.1-2)$$

即

$$T_0 \frac{\delta}{\xi} + T_0 \frac{\delta}{l-\xi} = P_0 \quad (1.1-3)$$

所以

$$\delta = \frac{P_0(l-\xi)\xi}{T_0 l} \quad (1.1-4)$$

当 $0 < x \leq \xi$ 时, 有 $\frac{y}{x} = \frac{\delta}{\xi}$, 即

$$y(x) = \frac{\delta}{\xi} x = \frac{P_0(l-\xi)}{T_0 l} x \quad (1.1-5a)$$

当 $\xi \leq x \leq l$ 时, 有 $\frac{y}{l-x} = \frac{\delta}{l-\xi}$, 即

$$y(x) = \frac{\delta}{l-\xi}(l-x) = \frac{P_0(l-x)}{T_0 l} \xi \quad (1.1-5b)$$

综合式(1.1-5a)和式(1.1-5b)得:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{l-\xi}{T_0 l} x, & 0 \leq x \leq \xi \\ \frac{l-x}{T_0 l} \xi, & \xi \leq x \leq l \end{cases} \quad (1.1-6)$$

上式中 $G(x, \xi)$ 的含义是在 $x = \xi$ 处作用单位载荷 $P_0 = 1$ 时, 弹性弦的挠曲变形曲线。通常称之为格林函数。格林函数具有对称性, 即

$$G(x, \xi) = G(\xi, x) \quad (1.1-7)$$

对于强度为 $p(x)$ 的连续分布载荷, 作用于 $x = \xi$ 到 $x = \xi + d\xi$ 这一微元上的力为 $P_0 = p(\xi)d\xi$, 所产生的挠曲曲线为 $G(x, \xi)p(\xi)d\xi$ 。在线性小变形的假设条件下, 叠加原理成立, 即在强度为 $p(x)$ 的连续分布载荷下, 弹性弦的挠曲曲线为

$$y(x) = \int_0^l G(x, \xi) p(\xi) d\xi \quad (1.1-8)$$

B 给定挠曲曲线 $y(x)$, 求产生这样的挠曲曲线的分布载荷

这个问题相当于给定式(1.1-8)中的 $y(x)$, 求与之对应的未知函数 $p(x)$, 解决这个问题就需要解决式(1.1-8)所示的积分方程。该种形式的积分方程通常称为第 I 类 Fredholm 积分方程。

注意到问题 A 与问题 B 的已知与未知函数正好相反, 前者是已知 $p(x)$ 求 $y(x)$, 后者是已知 $y(x)$ 求 $p(x)$ 。通常称问题 A 为正问题, 而称问题 B 为反问题。许多数学物理问题都可以归结为积分方程。

C 弹性弦的强迫振动问题

考虑作用于弹性弦上的载荷是随时间简谐变化的情况, 即分布载荷的强度为 $p(\xi) \sin \omega t$ (ω 为圆频率)。在此分布载荷作用下, 弹性弦在平衡位置作微幅振动, 此时弹性弦的挠曲曲线为 $y = y(x) \sin \omega t$ 。设弹性弦的质量密度为 $\rho(x)$, 则在时刻 t , 从点 $x = \xi$ 到 $x = \xi + d\xi$ 这段弦同时受到外力 $p(\xi) \sin \omega t d\xi$ 以及惯性力 $-\rho(\xi) d\xi \frac{d^2 y}{dt^2} = \rho(\xi) y(\xi) \omega^2 \sin \omega t d\xi$ 的作用。相应地, 式(1.1-8)应改为

$$y(x) \sin \omega t = \int_0^l G(x, \xi) [p(\xi) \sin \omega t + \rho(\xi) \omega^2 y(\xi) \sin \omega t] d\xi \quad (1.1-9)$$

设 $\int_0^l G(x, \xi) p(\xi) d\xi = f(x)$, $G(x, \xi) \rho(\xi) = k(x, \xi)$, 化简后可以得到:

$$y(x) = \omega^2 \int_0^l k(x, \xi) y(\xi) d\xi + f(x) \quad (1.1-10)$$

当分布载荷强度 $p(x)$ 和质量密度 $\rho(x)$ 为已知时, 即 $f(x)$ 和 $k(x, \xi)$ 是已知的, 此时, 求弹性弦挠曲曲线 $y(x)$ 的问题就归结为求解以 $y(x)$ 为未知函数的积分方程(1.1-10)。这种形式的方程通常称为第 II 类 Fredholm 积分方程。

例 2 线性系统响应问题。

自然界中有许多现象其物理机理还不是十分的清楚, 难以用现有的物理定理去分析。对于这一类问题, 通常将其作为一个黑箱, 通过研究其输入和输出的对应关系确定黑箱的物理性

质。现考虑一个简单的线性系统。如图 1.1-3 所示,当其输入为单位脉冲函数 $\delta(\tau)$ 时,即

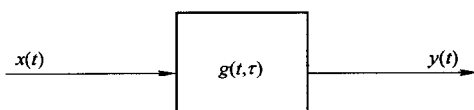


图 1.1-3 线性系统的激励和响应

$$\delta(\tau) = \begin{cases} \infty, & t = \tau \\ 0, & t \neq \tau \end{cases} \quad (1.1-11)$$

且 $\int_0^\infty \delta(\tau) d\tau = 1$, $\int_0^\infty y(t) \delta(t - \tau) dt = y(\tau)$ 。设该系统的输出为 $g(t, \tau)$, 表示在时刻 τ 作用于线性系统一个单位脉冲函数时, 在时刻 t 线性系统的输出响应。即

$$g(t, \tau) = \int_0^\infty g(t, t') \delta(t' - \tau) dt' \quad (1.1-12)$$

这样, 如果已知系统输入, 求系统输出响应时, 则有

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t \int_0^\infty g(t, t') x(t') \delta(t' - \tau) dt' d\tau \\ &= \int_0^t g(t, \tau) x(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (1.1-13)$$

当要求从已知输出信号求输入信号时, 就要求解形如式(1.1-13)的积分方程。该形式积分方程的积分限不只含有常数还含有变量, 属于不定积分, 通常称为第 I 类 Volterra 积分方程。

例 3 人口增长问题。

当研究一个国家的人口增长问题时, 由于人口基数很大, 且在任意时刻都有人出生, 也有人死亡, 故可以将人口数看成是时间的连续函数。设在时刻 t_0 时人口总数为 n_0 , $f(t, \tau)$ 表示 τ 时刻出生的人直到 t 时刻仍存活的人数占 τ 时刻出生人数的比例, 通常称 $f(t, \tau)$ 为生存函数。又设 $r(t)$ 表示婴儿的出生率, 则在时刻 t 的人口总数为

$$n(t) = n_0 + \int_{t_0}^t f(t, \tau) r(\tau) d\tau \quad (1.1-14)$$

人口出生率 $r(t)$ 与众多社会因素有关。这里简单假设仅与时刻 t 的人口总数成正比, 即

$$r(t) = kn(t) \quad (1.1-15)$$

式中, k 为比例系数。将式(1.1-15)代入式(1.1-14)得

$$n(t) - k \int_{t_0}^t f(t, \tau) n(\tau) d\tau = n_0 \quad (1.1-16)$$

生存函数 $f(t, \tau)$ 与自然环境、生活水平和医疗卫生条件等因素有关。当生存函数确定后, 求人口总数 $n(t)$ 就要求解形如式(1.1-16)的积分方程。通常称之为第 II 类 Volterra 积分方程。

例 4 等时曲线问题(Tautochrone Problem)。

等时曲线问题又称为 Abel 问题。考虑一质点在重力作用下, 沿 xOy 平面上的一条光滑的曲线 l 从静止开始无摩擦地从高度 h 滑动到 x 坐标轴上的某点, 如图 1.1-4 所

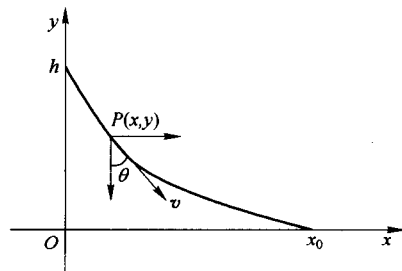


图 1.1-4 等时曲线问题

示。设质点滑动到 x 轴上某点所经历的时间为 $T_0(h)$, 是高度 h 的函数。当 $T_0(h)$ 给定时, 试确定此曲线 l 的形状。

设质点的质量为 m , 重力加速度为 g , 根据机械能转换守恒定律可知, 质点位于高度 h 时, 动能为零, 势能为 mgh 。当滑落到 l 上某点 $P(x, y)$ 处时, 动能为 $\frac{1}{2}mv^2$, 势能减为 mgy 。故有

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(h - y) \quad (1.1-17)$$

即
$$v = \sqrt{2g(h - y(x))} \quad (1.1-18)$$

式中, v 为质点的运动速度, 它是一个矢量, 其方向为曲线 l 在点 $P(x, y)$ 处的切线方向。如图 1.1-4 所示。设角度 $\theta(y)$ 为速度矢量与负 y 轴的夹角, 则速度矢量在负 y 轴方向的分量为:

$$\frac{dy}{dt} = -\sqrt{2g(h - y)} \cos\theta \quad (1.1-19)$$

即
$$dt = -\frac{1}{\sqrt{2g(h - y)}} \cdot \frac{1}{\cos\theta(y)} dy \quad (1.1-20)$$

设 $\varphi(y) = \frac{1}{\cos\theta(y)}$, $T(h) = -\sqrt{2g}T_0(h)$, 并将上式两边从 0 到 h 积分可得:

$$\int_0^h \frac{\varphi(y)}{\sqrt{h - y}} dy = T(h) \quad (1.1-21)$$

当给定高度 h 及相应的滑动时间 $T(h)$ 时, 求曲线的形状就要求解形如 (1.1-21) 的积分方程。

式 (1.1-21) 通常称为 Abel 方程, 是一种特殊的第 I 类 Volterra 积分方程, 也是历史上最早提出的积分方程之一。它的一般形式可以写成:

$$f(x) = \int_0^x (x - t)^{-\alpha} \varphi(t) dt, \quad (0 < \alpha < 1) \quad (1.1-22)$$

1.2 积分方程的概念与分类

1.2.1 积分方程的基本概念

一般地说, 在积分号内出现未知函数的方程就称为积分方程。例如, 下面的方程都是积分方程。

$$\int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt = f(x) \quad (1.2-1)$$

$$\varphi(t) + \lambda \int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt = f(x) \quad (1.2-2)$$

$$\int_a^x k(x, t) \varphi(t) dt = f(x) \quad (1.2-3)$$

$$\varphi(t) + \lambda \int_a^x k(x, t) \varphi(t) dt = f(x) \quad (1.2-4)$$

$$\int_a^b k(x, t, \varphi(t)) dt = f(x) \quad (1.2-5)$$

$$\int_a^b k(x, t) F(t, \varphi(t)) dt = f(x) \quad (1.2-6)$$

$$\varphi(t) + \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{\varphi(t)}{(x-t)^\alpha} dt = f(x), (\alpha > 0) \quad (1.2-7)$$

$$\varphi(t) + \lambda \int_a^\infty k(x, t) \varphi(t) dt = 0 \quad (1.2-8)$$

$$\varphi(t) + \lambda \int_{-\infty}^\infty k(x, t) \varphi(t) dt = 0 \quad (1.2-9)$$

在上述方程中, $k(x, t)$ 和 $f(x)$ 为已知函数, $\varphi(t)$ 为未知函数, a, b, λ 为常数。通常称 $k(x, t)$ 为积分方程的核, 它确定了积分方程的性质。 $f(x)$ 称为方程的自由项。 λ 称为积分方程的参数。积分方程可能仅对某些 λ 值有解, 也可能根本无解。

1.2.2 积分方程的分类

(1) 按线性性质可分为线性积分方程和非线性积分方程两大类。例如, 式(1.2-1)、式(1.2-2)、式(1.2-3)、式(1.2-4), 由于其被积函数关于未知函数 $\varphi(t)$ 是线性的, 故称为线性积分方程。又如, 式(1.2-5)和式(1.2-6), 当积分核 $k(x, t, \varphi(t))$ 是关于 $\varphi(t)$ 的非线性泛函或 $F(t, \varphi(t))$ 是关于 $\varphi(t)$ 的非线性泛函, 则称方程式(1.2-5)和式(1.2-6)是非线性积分方程。

(2) 按积分限可以分成弗雷德霍姆(Fredholm)型和沃尔泰拉(Volterra)型积分方程以及奇异积分方程。对于线性积分方程, 若积分限均为常数, 则通常称为 Fredholm 方程, 例如: 式(1.2-1)、式(1.2-2)。若积分限不全为常数, 通常称为 Volterra 积分方程, 例如: 式(1.2-3)、式(1.2-4)。若积分限含有 ∞ , 例如: 式(1.2-8)、式(1.2-9), 则称为奇异积分方程。

(3) 按积分号外是否含有未知函数可以分为第 I 类和第 II 类积分方程。例如: 式(1.2-1)、式(1.2-3)积分号外不含有未知函数, 则方程称为第 I 类 Fredholm 积分方程和第 I 类 Volterra 积分方程。在式(1.2-2)、式(1.2-4)中, 未知函数不仅出现在积分号内, 也出现在积分号外, 则分别称为第 II 类 Fredholm 积分方程和第 II 类 Volterra 积分方程。

(4) 按积分核的性质可以分为奇性(singular)和非奇性(non singular)积分方程。一般对于形如式(1.2-2)的积分方程, 若积分核 $k(x, t)$ 是 (x, t) 的连续函数或者 $k(x, t)$ 在区域 $a \leq x, t \leq b$, 虽然不连续, 但却平方可积, 即满足

$$\int_a^b \int_a^b |k(x, t)|^2 dx dt \leq A, \quad (A \text{ 为有限常数})$$

则称核 $k(x, t)$ 为非奇性核或者 Fredholm 核, 相应的积分方程称为非奇异积分方程, 或者称为 Fredholm 积分方程。

当积分核 $k(x, t)$ 具有如下形式

$$k(x, t) = \frac{h(x, t)}{|x - t|^\alpha}, \quad (0 < \alpha < 1) \quad (1.2-10)$$

式中, $h(x, t)$ 为区域 $a \leq x, t \leq b$ 的连续函数, 此时, 称积分核 $k(x, t)$ 为弱奇性核(weak singularity kernel), 相应的积分方程称为弱奇性积分方程。由于弱奇性核的积分方程与非奇

性核的积分方程性质相似,有时也称弱奇性核的积分方程为拟 Fredholm 积分方程。在弱奇性核中,有一类特殊的核称为平方可积核。即积分核 $k(x, t)$ 在 $a \leq x, t \leq b$ 上虽不连续,但却是平方可积的,即满足

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_a^b |k(x, t)|^2 dx dt &\leq \infty \\ \int_a^b |k(x, t)|^2 dt &< \infty, \quad (a \leq x \leq b) \\ \int_a^b |k(x, t)|^2 dx &< \infty, \quad (a \leq t \leq b) \end{aligned}$$

例如,积分核

$$k(x, t) = \begin{cases} \frac{F(x, t)}{(x-t)^\alpha}, & (x \geq t) \\ 0, & (x < t) \end{cases}$$

式中, $F(x, t)$ 是区域 $a \leq x, t \leq b$ 上的连续函数, 即 $|F(x, t)| \leq M$ (有限常数)

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_a^b |k(x, t)|^2 dx dt &= \int_a^b dx \int_a^x \frac{(F(x, t))^2}{(x-t)^{2\alpha}} dt \leq M^2 \int_a^b dx \int_a^x (x-t)^{-2\alpha} dt \\ &= \frac{M^2}{1-2\alpha} \int_a^b (x-a)^{1-2\alpha} dx \\ &= \frac{M^2 (b-a)^{2-2\alpha}}{2(1-2\alpha)(1-\alpha)} \end{aligned}$$

当 $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ 时, 核 $k(x, t)$ 是平方可积的。

连续核与平方可积核对应的积分方程具有离散的谱(discrete spectrum), 即特征值是有限个, 或者无限可列个, 且每个特征值的秩(rank or index)是有限的, 即每个特征值对应有限个线性无关特征函数。连续核与平方可积核积分方程的这种性质成为区分 Fredholm 积分方程和非 Fredholm 积分方程的依据。例如, 积分区间含 ∞ 的积分方程, 或者具有连续谱, 或者特征值的秩为无穷, 通常归入奇异积分方程。

当积分核具有如下形式:

$$k(x, t) = \frac{h(x, t)}{x-t} \quad (1.2-11)$$

此时, 积分

$$\int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt = \int_a^b \frac{h(x, t)}{x-t} \varphi(t) dt \quad (1.2-12)$$

通常呈发散的, 但如果对 $h(x, t)$ 和 $\varphi(t)$ 附加一些限制条件, 可保证

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_a^{x-\epsilon} k(x, t) \varphi(t) dt + \int_{x+\epsilon}^b k(x, t) \varphi(t) dt \right] \leq A \text{ (有限常数)} \quad (1.2-13)$$

即在 Cauchy 主值积分意义下存在, 故称积分核为 Cauchy 奇性核, 相应的积分方程称为 Cauchy 奇性积分方程。

当积分核具有如下形式:

$$k(x, t) = \frac{h(x, t)}{|x-t|^\alpha}, \quad (\alpha > 1) \quad (1.2-14)$$

此时积分 $\int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt$ 即使在 Cauchy 主值积分意义下也不存在, 通常称为超奇性

积分。为了使超奇性积分 $\int_a^b k(x, t)\varphi(t)dt$ 有意义, 可以将导致积分发散的项分离并删去, 将剩余部分定义为积分的值, 这就是超奇异积分的“有限部积分”。在引入超奇异积分“有限部积分”的概念后, 相应的积分方程称为超奇异积分方程。

在式(1.2-7)中, 根据 α 的不同取值, 方程可为弱奇性积分方程 ($0 < \alpha < 1$), Cauchy 奇异积分方程 ($\alpha = 1$) 和超奇异积分方程 ($\alpha > 1$)。

(5) 按自由项 $f(x)$ 是否为 0 可分成齐次(homogeneous)和非齐次(imhomogeneous)积分方程。当 $f(x) = 0$ 时称相应的积分方程为齐次积分方程; 当 $f(x) \neq 0$ 时称相应的积分方程为非齐次积分方程。对于一个非齐次积分方程, 人为地取自由项为 0, 就得到一个与原非齐次方程伴随的齐次积分方程。非齐次积分方程的解与其相伴齐次积分方程的解有紧密的联系。

由于积分方程形式的多样性, 上述分类并不能包罗所有形式的积分方程。除上述提到的各种类型的积分方程外, 还会经常遇到下列几类积分方程。

(6) 卷积型积分方程(Convolution I. E)。卷积型积分方程的核具有如下性质:

$$k(x, t) = k(x - t) \quad (1.2-15)$$

(7) 对称核积分方程(Symmetric kernels I. E)。对称核积分方程的核具有如下性质:

$$k(x, t) = k(t, x) \quad (1.2-16)$$

除实对称核外, 在复数范围内, 若积分核的共轭满足

$$\overline{k(x, t)} = k(t, x) \quad (1.2-17)$$

则称为 Hermitian 核积分方程。

(8) 退化核积分方程(Degenerate kernels I. E)。退化核可以表示成有限项之和, 其中每一项都是两个因子的乘积, 一个因子仅依赖于 x , 另一个因子仅依赖于 t , 即

$$k(x, t) = \sum_{i=1}^N a_i(x)b_i(t) \quad (1.2-18)$$

可分离核(seperable kernels)可看成是退化核的一个特殊情况, 即 $k(x, t) = a(x)b(t)$ 。具有退化核的积分方程一般都可求得封闭解析解(closed analytical solution)。

(9) Wiener-Hopf 型积分方程。其积分核和积分区间具有如下形式:

$$\int_0^\infty k(x-t)\varphi(t)dt = f(s), (0 \leq x < \infty) \quad (1.2-19a)$$

$$\varphi(x) + \lambda \int_0^\infty k(x-t)\varphi(t)dt = f(x), (0 \leq x < \infty) \quad (1.2-19b)$$

上述方程分别称为第 I 类和第 II 类 Wiener-Hopf 型积分方程。

(10) 积分-微分方程。未知函数不仅出现在积分号内, 也以微分形式出现在方程中。例如

$$y^{(n)}(x) = C_n + \int_0^x F(t, y(t), y'(x), \dots, y^{(n)}(t))dt \quad (1.2-20)$$

以上, 从不同的角度对积分方程进行了分类, 但也应该注意到不同类型的积分方程之间, 有时也存在相互联系。如 Fredholm 积分方程与 Volterra 积分方程之间, 第 I 类和第 II 类 Volterra 积分方程之间, 都存在某种联系, 在特定条件下还可以相互转化, 例如, 当 $t > x$ 时, 积分核 $k(x, t) = 0$, 则 Fredholm 型积分方程

$$\phi(x) + \lambda \int_a^b k(x, t) \phi(t) dt = f(x) \quad (1.2-21)$$

就转化成 Volterra 型积分方程

$$\phi(x) + \lambda \int_a^x k(x, t) \phi(t) dt = f(x) \quad (1.2-22)$$

对于第 I 类 Volterra 型积分方程

$$\int_a^x k(x, t) \phi(t) dt = f(x) \quad (1.2-23)$$

两边对 x 求导得

$$k(x, x) \phi(x) + \int_a^x \frac{\partial k(x, t)}{\partial x} \phi(t) dt = f'(x) \quad (1.2-24)$$

化简后得到第 II 类 Volterra 型积分方程

$$\phi(x) + \frac{1}{k(x, x)} \int_a^x \frac{\partial}{\partial x} k(x, t) \phi(t) dt = \frac{f'(x)}{k(x, x)} \quad (1.2-25)$$

1.3 积分方程与微分方程的关系

微分方程初值问题,通常可化为第 II 类 Volterra 积分方程;而微分方程的边值问题,一般地可化为第 II 类 Fredholm 积分方程。

1.3.1 一阶常微分方程初值问题

对方程

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y) \\ y(0) = c_0 \end{cases} \quad (1.3-1)$$

两边求不定积分立刻得到

$$y(x) = c_0 + \int_0^x f(t, y(t)) dt \quad (1.3-2)$$

这就是与微分方程 (1.3-1) 相对应的积分方程,它是第 II 类 Volterra 型积分方程。当 $f(x, y)$ 关于 y 呈线性时,该 Volterra 积分方程是线性的,当 $f(x, y)$ 关于 y 是非线性的时,该 Volterra 积分方程是非线性的。

1.3.2 二阶常微分方程

$$\begin{cases} y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x) = F(x) \\ y(0) = c_0, y'(0) = c_1 \end{cases} \quad (1.3-3)$$

设

$$y''(x) = \varphi(x) \quad (1.3-4)$$

则两端对 x 积分并利用初始条件 $y'(0) = c_1$ 可得

$$y'(x) = \int_0^x \varphi(t) dt + c_1 \quad (1.3-5)$$

再对两端继续关于 x 积分,并利用初始条件 $y(0) = c_0$ 得

$$y(x) = \int_0^x \left[\int_0^u \varphi(t) dt + c_1 \right] du + c_0 = \int_0^x \left[\int_0^u \varphi(t) dt \right] du + c_1 x + c_0 \quad (1.3-6)$$

上式右端第一项的积分区域如图 1.3-1 中阴影部分所示。交换积分次序后,可得:

$$y(x) = \int_0^x \left[\int_t^x \varphi(t) du \right] dt + c_1 x + c_0$$

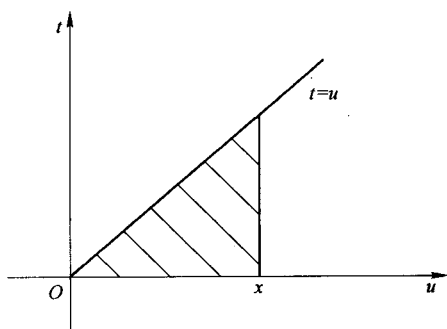


图 1.3-1 交换积分次序的示意图

$$= \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt + c_1x + c_0 \quad (1.3-7)$$

将式(1.3-4), 式(1.3-5)和式(1.3-7)代入式(1.3-3)化简后得:

$$\varphi(x) + \int_0^x k(x,t)\varphi(t)dt = f(x) \quad (1.3-8)$$

式中 $k(x,t) = a_1(x) + a_2(x)(x-t)$;

$$f(x) = F(x) - c_1a_1(x) - c_1xa_2(x) - c_0a_2(x)。$$

方程(1.3-8)是第Ⅱ类 Volterra 型积分方程。求解该积分方程得到 $\varphi(x)$ 后, 代入式(1.3-7)就得原微分方程(1.3-3)的解 $y(x)$ 。

对于 n 阶微分方程的初值问题, 利用公式

$$\int_0^x dx \int_0^x dx \cdots \int_0^x f(x) dx = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-u)^{n-1} f(u) du \quad (1.3-9)$$

亦可化为等价的第Ⅱ类 Volterra 积分方程。

1.3.3 n 阶线性常系数微分方程初值问题

对于方程

$$\begin{cases} y^{(n)}(x) + a_1y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_ny(x) = F(x) \\ y(0) = c_0, y'(0) = c_1, y^{(n-1)}(0) = c_{n-1} \end{cases} \quad (1.3-10)$$

设
则

$$y^{(n)}(x) = \varphi(x) \quad (1.3-11)$$

$$y^{(n-1)}(x) = \int_0^x \varphi(t)dt + c_{n-1} \quad (1.3-12)$$

$$\begin{aligned} y^{(n-2)}(x) &= \int_0^x \left[\int_0^x \varphi(t)dt \right] dx + c_{n-1}x + c_{n-2} \\ &= \int_0^x (x-u)\varphi(u)du + c_{n-1}x + c_{n-2} \end{aligned} \quad (1.3-13)$$

$\vdots$

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^x dx \int_0^x dx \cdots \int_0^x \varphi(x) dx + \frac{c_{n-1}x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{c_{n-2}x^{n-2}}{(n-2)!} + \cdots + c_1x + c_0 \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-u)^{n-1} \varphi(u) du + \frac{c_{n-1}x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{c_{n-2}x^{n-2}}{(n-2)!} + \cdots + c_1x + c_0 \end{aligned} \quad (1.3-14)$$

将式(1.3-11)~式(1.3-14)代入式(1.3-10)并化简得:

$$\varphi(x) + \int_0^x k(x,t)\varphi(t)dt = f(x) \quad (1.3-15)$$

$$\text{式中 } k(x,t) = \sum_{k=1}^n a_k \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$f(x) = F(x) - a_1 c_{n-1} - a_2 (c_{n-1}x + c_{n-2}) - \dots - a_n \left[c_{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + c_{n-2} \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + c_1 x + c_0 \right] \quad (1.3-16)$$

1.3.4 二阶常微分方程边值问题

$$\begin{cases} y''(x) + \lambda y(x) = f(x) \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases} \quad (1.3-17)$$

设

$$y''(x) = \varphi(x) \quad (1.3-18)$$

则

$$y'(x) = \int_0^x \varphi(t)dt + c_1 \quad (1.3-19)$$

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^x du \int_0^u \varphi(t)dt + c_1 x + c_2 \\ &= \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt + c_1 x + c_2 \end{aligned} \quad (1.3-20)$$

利用边值条件知:

$$c_1 = - \int_0^1 (1-t)\varphi(t)dt \quad (1.3-21a)$$

$$c_2 = 0 \quad (1.3-21b)$$

代入式(1.3-20)得

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt - \int_0^1 x(1-t)\varphi(t)dt \\ &= \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt - \int_0^x x(1-t)\varphi(t)dt - \int_x^1 x(1-t)\varphi(t)dt \\ &= \int_0^x t(x-1)\varphi(t)dt + \int_x^1 x(t-1)\varphi(t)dt \\ &= \int_0^1 G(x,t)\varphi(t)dt \end{aligned} \quad (1.3-22)$$

式中

$$G(x,t) = \begin{cases} t(x-1), & 0 \leq t \leq x \\ x(t-1), & x \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (1.3-23)$$

将式(1.3-18)~式(1.3-22)代入式(1.3-17),化简后得

$$\varphi(x) + \lambda \int_0^1 G(x,t)\varphi(t)dt = f(x) \quad (1.3-24)$$

这是第Ⅱ类 Fredholm 积分方程。

1.3.5 一般形式二阶线性微分方程的初值问题

考虑如下形式二阶线性微分方程

$$Ly(x) = F(x), (0 \leq x \leq l) \quad (1.3-25)$$

式中, L 是微分算子,由下式给定

$$L = \frac{d}{dx} \left\{ p(x) \frac{d}{dx} \right\} + q(x) \quad (1.3-26)$$

对于初值问题,一般给定 $y(0)$ 和 $y'(0)$,下面推导与该微分方程等价且包含初值条件的积分方程。

$$\text{令} \quad \phi(x) = \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (1.3-27)$$

则

$$\frac{dy}{dx} = y'(0) + \int_0^x \phi(s) ds \quad (1.3-28)$$

$$\begin{aligned} y(x) &= y(0) + xy'(0) + \int_0^x \left[\int_0^s \phi(s) ds \right] dx \\ &= y(0) + xy'(0) + \int_0^x \left[\int_s^x \phi(s) dx \right] ds \\ &= y(0) + xy'(0) + \int_0^x (x-s)\phi(s) ds \end{aligned} \quad (1.3-29)$$

将式(1.3-27)~式(1.3-29)代入式(1.3-25),化简后得

$$\phi(x) + \int_0^x k(x,s)\phi(s) ds = f(x) \quad (1.3-30)$$

$$\text{式中} \quad f(x) = \frac{1}{p(x)} [F(x) - y'(0)p'(x) - y(0)q(x) - xq(x)y'(0)];$$

$$k(x,s) = \frac{1}{p(x)} [p'(x) + (x-s)q(x)].$$

这是第Ⅱ类 Volterra 积分方程。

1.3.6 一般形式二阶线性微分方程的边值问题

考虑下列形式微分方程边值问题

$$\begin{cases} Ly(x) = F(x, y), (0 < x < l) \\ \alpha y(0) + \beta y'(0) = 0 \\ \alpha y(l) + \beta y'(l) = 0 \end{cases} \quad (1.3-31)$$

式中, L 是形式如式(1.3-26)的微分算子。端点条件亦采用最一般形式, α, β 为给定常数。下面推导与其等价的积分方程。

引入两个线性独立的辅助函数 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$, 满足齐次微分方程

$$Ly_i(x) = 0, (i=1, 2) \quad (1.3-32)$$

并分别满足式(1.3-31)中的端点 $x=0$ 和端点 $x=l$ 处的边界条件。一般地, 与式(1.3-31)等价的积分方程是

$$y(x) = \int_0^l G(x,s)F(s, y(s)) ds \quad (1.3-33)$$

式中

$$G(x,s) = \begin{cases} \frac{1}{A} y_1(x) y_2(s), & x \leq s \\ \frac{1}{A} y_2(x) y_1(s), & x \geq s \end{cases} \quad (1.3-34)$$

通常被称为问题的格林函数(Green's function), 其中, A 为确定常数。下面说明如何确定常数 A , 从而间接说明了等价性。