成才驿站高中总复习

高三二轮三基小训练

CHENGCAI YIZHAN
GAOZHONG ZONG FUXI

数学篇

SHUXUEPIAN

主编 于世章

中国海洋大学出版社
CHINA OCEAN UNIVERSITY PRESS

责任编辑/韩玉堂
封面设计/光　禾
终　　审/李学伦

ISBN 978-7-81067-967-1
9 787810 679671 >

全册总定价：54.00元

成才驿站高中总复习

高三二轮三基小训练

主编　于世章

数学篇

中国海洋大学出版社
·青岛·

图书在版编目(CIP)数据

成才驿站高中总复习:高三二轮三基小训练·数学/于世章主编.—青岛:中国海洋大学出版社,2007.3
ISBN 978-7-81067-967-1

Ⅰ.成... Ⅱ.于... Ⅲ.数学课—高中—升学参考资料
Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 032899 号

成才驿站高中总复习·数学篇
于世章 主编

出版发行 中国海洋大学出版社
社 址 青岛市香港东路 23 号 邮政编码 266071
网 址 http://www2.ouc.edu.cn/cbs
电子信箱 cbsjf@ouc.edu.cn
订购电话 0532—82032115
责任编辑 韩玉堂 电 话 85902349
印 制 淄博恒业印务有限公司
版 次 2007 年 3 月第 1 版
印 次 2007 年 3 月第 1 次印刷
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 9.75
字 数 200 千
全册总定价 54.00 元

编委会

编者的话

高三数学第二阶段的复习是高三数学教学的一个重要环节，它对于巩固第一阶段的成果，为第三阶段复习及高考的最后冲刺做好铺垫起着承上启下的作用．结合新课改精神及山东省自主命题的实际情况，中国海洋大学出版社组织长期从事高三教学的特高级骨干教师，依据他们多年来对高考研究的体会及高三毕业班复习的经验，以专题归类的形式出版高三二轮复习《成才驿站　高中总复习·数学篇》。该书把高中数学知识点明晰化、规律化，各专题关注高考的重点、热点、难点，每一专题设考点展望、知识体系整合、知识要点归纳、范例解析、智能检测等内容，以全新的形式展现给一线师生。

本书在编写过程中得到康国、李文展、高峰、苏延红、王考兴、徐鸿雁、李洪云等老师的大力支持，在此一并表示感谢。

2007 年 3 月

序

高三的数学总复习需要解决适量的各种问题来巩固基础、提高能力，以准备高考，这是必要的。但是不应搞“题海战术”，不宜专做大量过去的高考难题，而忽视对基础知识、基本概念、基本能力、基本思想的培养与检测。青岛二中老师根据他们多年的经验精心设计的这套选择题很好地满足了总复习和准备高考的需要。

选择题是“短、平、快”地检测和训练基本概念、基本能力、基本思想的有力工具，充分使用它们可以达到快速加深对基础知识、基本概念的理解与灵活运用，锻炼各种数学能力，领会多种数学思想方法的目的。

怎样解选择题本书作了出色的概括与展示，总结出了解选择题的基本策略：充分利用题设和选择支两方面所提供信息作出判断。一般说来，能定性判定的，就不再使用复杂的定量计算；能使用特殊值判定的，也不必采用常规解法；能使用间接解法的，也不必采用直接解法；对于明显可以否定的选择支，应及早排除，以缩小选择的范围；对于具有多种解题思路的，宜于选择最简解法等。举例说明了常用的基本解题方法：直接求解法，直接判断法，图像法，特殊值法，去缪法，传算法，推理分析法等。先考虑用直接法以外的方法，再考虑使用直接法可以快速准确地解答选择题。

全书十三个专题的选择题全面囊括了对《课标》要求的所有基础知识、基本能力、基本思想的检测和训练的题目。充分使用本书，灵活运用解题策略，可望全面提高解题能力，在高考中取得好成绩。

丁尔升　2007 年 2 月于北京师范大学数学科学学院

目　次

怎样解填空题

一、题型特点

填空题和选择题同属客观性试题，它们有许多共同特点：其形态短小精悍，考查目标集中，答案简短、明确、具体，不必填写解答过程，评分客观、公正、准确等等.

不过填空题和选择题也有质的区别. 首先，表现为填空题没有备选项. 因此，解答时既有不受诱误的干扰之好处，又有缺乏提示的帮助之不足，对考生独立思考和求解，在能力要求上会高一些，长期以来，填空题的答对率一直低于选择题的答对率，也许这就是一个重要的原因. 其次，填空题的结构，往往是在一个正确的命题或断言中，抽去其中的一些内容（既可以是条件，也可以是结论），留下空位，让考生独立填上，考查方法比较灵活. 在对题目的阅读理解上，较之选择题，有时会显得较为费劲. 当然并非常常如此，这将取决于命题者对试题的设计意图.

填空题与解答题比较，同属提供型的试题，但也有本质的区别. 首先，解答题应答时，考生不仅要提供出最后的结论，还得写出或说出解答过程的主要步骤，提供合理、合法的说明. 填空题则无此要求，只要填写结果，省略过程，而且所填结果应力求简练、概括和准确. 其次，试题内涵，解答题比起填空题要丰富得多. 填空题的考点少，目标集中，否则，试题的区分度差，其考试信度和效度都难以得到保证. 这是因为：填空题要是考点多，解答过程长，影响结论的因素多，那么对于答错的考生便难以知道其出错的真正原因. 有的可能是一窍不通，入手就错了，有的可能只是到了最后一步才出错，但他们在答卷上表现出来的情况一样，得相同的成绩，尽管它们的水平存在很大的差异. 对于解答题，则不会出现这个情况. 这是因为，解答题成绩的评定不仅要看最后的结论，还要看其推演和论证过程，分情况评定分数，用以反映其差别，因而，解答题命题的自由度较之填空题要大得多. 由此可见，填空题这种题型介于选择题与解答题两种题型之间，而且确实是一种独立的题型，有其固有的特点.

二、考查功能

1. 填空题的考查功能大体上与选择题的考查功能相当

同选择题一样，要真正发挥好填空题的考查功能，同样要群体效应. 但是，由于填空题的应答速度难以追上选择题的应答速度，因此在题量的使用上，难免又要受到制约. 从这一点看，一组好的填空题虽然也能在较大的范围内考查基础知识、基本技能和基本思想方法，但在范围的大小和测试的准确性方面填空题的功能要弱于选择题. 不过，在考查的深入程度方面，填空题要优于选择题. 作为数学填空题，绝大多数是计算型(尤其是推理计算型)和概念(性质)判断型的试题，应答时必须按规则进行切实的计算或者合乎逻辑的推演和判断，几乎没有间接方法可言，更是无从猜答，懂就是懂，不懂就是不懂，难有虚假，因而考查的深刻性往往优于选择题. 但与解答题相比其考查的深度还是差得多. 就计算和推理来说，填空题始终都是控制在低层次上的.

2. 填空题的另一个考查功能，就是有效地考查阅读能力、观察和分析能力

在高考数学考试中，由于受到考试时间和试卷篇幅的限制，在权衡各种题型的利弊和考查功能的互补时，填空题由于其特点和功能的限制，往往被放在较轻的位置上，题量不多.

三、思想方法

同选择题一样，填空题也属小题，其解题的基本原则是“小题不能大做”. 解题的基本策略是：巧做. 解题的基本方法一般有：直接求解法，图像法和特殊化法(特殊值法，特殊函数法，特殊角法，特殊数列法，图形特殊位置法，特殊点法，特殊方程法，特殊模型法)等.

【例题解析】

一、直接求解法——直接从题设条件出发，利用定义、性质、定理、公式等，经过变形、推理、计算、判断得到结论的方法，称之为直接求解法. 它是解填空题的常用的基本方法. 使用直接法解填空题，要善于透过现象抓本质，自觉地、有意识地采取灵活、简捷的解法.

[例 1] 乒乓球队的 10 名队员中有 3 名主力队员，派 5 名参加比赛. 3 名主力队员要安排在第一、三、五位置，其余 7 名队员选 2 名安排在第二、四位置，那么不同的出场安排共有多少种(用数字作答).

［解］ 三名主力队员的排法有 A_3^3 种，其余 7 名队员选 2 名安排在第二、四位置上有 A_7^2 种排法，故共有排法数 $A_3^3A_7^2=252$ 种.

［例 2］ 已知抛物线的焦点坐标为 $F(2,1)$，准线方程为 $2x+y=0$，则其顶点坐标为________.

［解］ 过焦点 $F(2,1)$作准线的垂线段，由解析几何知识可得抛物线顶点为垂线段的中点. 又由于准线的斜率 $k=-2$，$k_{OF}=\frac{1}{2}$，∴ O 为垂足，从而易得 OF 的中点，即顶点为$\left(1,\frac{1}{2}\right)$.

二、图像法——借助图形的直观形，通过数形结合，迅速作出判断的方法称为图像法. 文氏图、三角函数线、函数的图像及方程的曲线等，都是常用的图形.

［例 1］ 点 $P(x,y)$在以 $A(-3,1)$，$B(-1,0)$，$C(-2,0)$为顶点的$\triangle ABC$ 的内部运动(不包含边界)，则$\frac{y-2}{x-1}$的取值范围是________.

［解］ 由$\frac{y-2}{x-1}$联想到斜率坐标公式，表示点(x,y)与点$(1,2)$连线的斜率的取值范围，由图像可得范围是$\left(\frac{1}{4},1\right)$.

［例 2］ 已知关于 x 的方程 $x^2-2|x|=a-1$ 有四个解，则 a 的取值范围是________.

［解］ 设 $y_1=x^2-2|x|$，$y_2=a-1$，画出两个函数图像，原方程的解表示两个函数图像交点的横坐标，由已知 $0<a<1$.

三、特殊化法——当填空题的结论唯一或其值为定值时，我们只须把题中的参变量用特殊值(或特殊函数、特殊角、特殊数列、图形特殊位置、特殊点、特殊方程、特殊模型等)代替之，即可得到结论.

1. 特殊值法

［例 1］ 设 $a>b>1$，则 $\log_a b$，$\log_b a$，$\log_{ab} b$ 的大小关系是________.

［解］ 考虑到三个数的大小关系是确定的，不妨令 $a=4$，$b=2$，则 $\log_a b=\frac{1}{2}$，$\log_b a=2$，$\log_{ab} b=\frac{1}{3}$， ∴ $\log_{ab} b<\log_a b<\log_b a$.

2. 特殊函数法

［例 2］ 如果函数 $f(x)=x^2+bx+c$ 对任意实数 t 都有 $f(2+t)=f(2-t)$，那么 $f(1)$，$f(2)$，$f(4)$的大小关系是________.

［解］ 由于 $f(2+t)=f(2-t)$，故知 $f(x)$ 的对称轴是 $x=2$. 可取特殊函数 $f(x)=(x-2)^2$，即可求得 $f(1)=1$，$f(2)=0$，$f(4)=4$. $\therefore$ $f(2)<f(1)<f(4)$.

3. 特殊角法

［例 3］ $\cos^2\alpha+\cos^2(\alpha+120°)+\cos^2(\alpha+240°)$ 的值为________.

［解］ 本题的隐含条件是式子的值为定值，即与 α 无关，故可令 $\alpha=0°$，计算得上式值为 $\frac{3}{2}$.

4. 特殊数列法

［例 4］ 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d\neq0$，且 a_1，a_3，a_9 成等比数列，则 $\frac{a_2+a_4+a_6}{a_1+a_3+a_5}$ 的值是________.

［解］ 考虑到 a_1，a_3，a_9 的下标成等比数列，故可令 $a_n=n$，又易知它满足题设条件，于是 $\frac{a_2+a_4+a_6}{a_1+a_3+a_5}=\frac{4}{3}$.

5. 图形特殊位置法

［例 5］ 已知 SA，SB，SC 两两所成角均为 $60°$，则平面 SAB 与平面 SAC 所成的二面角为________.

［解］ 取 $SA=SB=SC$，将问题置于正四面体中研究，不难得出平面 SAB 与平面 SAC 所成的二面角为 $\arccos\frac{1}{3}$.

6. 特殊模型法

［例 6］ 已知 m，n 是直线，α，β，γ 是平面，给出下列命题：

① 若 $\alpha\perp\gamma$，$\beta\perp\gamma$，则 $\alpha/\!/\beta$；

② 若 $n\perp\alpha$，$n\perp\beta$，则 $\alpha/\!/\beta$；

③ 若 α 内不共线的三点到 β 的距离都相等，则 $\alpha/\!/\beta$；

④ 若 $n/\!/\alpha$，$m/\!/\alpha$，且 $n/\!/\beta$，$m/\!/\beta$，则 $\alpha/\!/\beta$；

⑤ 若 m，n 为异面直线，$n\in\alpha$，$n/\!/\beta$，$m\in\beta$，$m/\!/\alpha$，则 $\alpha/\!/\beta$.

则其中正确的命题是________.（把你认为正确的命题序号都填上）

［解］ 依题意可构造正方体 AC_1，在正方体中逐一判断各命题易得正确命题是②⑤.

还有特殊点法、特殊方程法等，在此不一一赘述.

【巩固与练习】

1. 函数与不等式

［例 1］ 已知函数 $f(x)=\sqrt{x}+1$，则 $f^{-1}(3)=$________.

[讲解] 由 $3=\sqrt{x}+1$，得 $f^{-1}(3)=x=4$，应填 4.

请思考为什么不必求 $f^{-1}(x)$ 呢？

[例 2] 集合 $M=\left\{x\left|-1\leqslant\log_{\frac{1}{x}}10<-\frac{1}{2},x\in\mathbf{N}^*\right.\right\}$ 的真子集的个数是____.

[讲解] $M=\{x\,|\,1\leqslant\lg x<2,x\in\mathbf{N}^*\}=\{x\,|\,10\leqslant x<100,x\in\mathbf{N}\}$，显然集合 M 中有 90 个元素，其真子集的个数是 $2^{90}-1$，应填 $2^{90}-1$.

快速解答此题需要记住小结论：对于含有 n 个元素的有限集合，其真子集的个数是 2^n-1.

[例 3] 若函数 $y=x^2+(a+2)x+3,x\in[a,b]$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称，则 $b=$________.

[讲解] 由已知抛物线的对称轴为 $x=-\frac{a+2}{2}$，得 $a=-4$，而 $\frac{a+b}{2}=1$，有 $b=6$，故应填 6.

[例 4] 如果函数 $f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$，那么

$$f(1)+f(2)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f(3)+f\left(\frac{1}{3}\right)+f(4)+f\left(\frac{1}{4}\right)=\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

[讲解] 容易发现 $f(t)+f\left(\frac{1}{t}\right)=1$，这就是我们找出的有用的规律，于是原式 $=f(1)+3=\frac{7}{2}$，应填 $\frac{7}{2}$.

本题是 2002 年全国高考题，十分有趣的是，2003 年上海春季考题中也有一道类似题：设 $f(x)=\frac{1}{2^x+\sqrt{2}}$，利用课本中推导等差数列前 n 项和的公式的方法，可求得

$$f(-5)+f(-4)+\cdots+f(0)+\cdots+f(5)+f(6)=\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

2. 三角函数

[例 5] 已知点 $P(\tan\alpha,\cos\alpha)$ 在第三象限，则角 α 的终边在第________象限.

[讲解] 由已知得

$$\begin{cases}\tan\alpha<0,\\ \cos\alpha<0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sin\alpha>0,\\ \cos\alpha<0,\end{cases}$$

从而角 α 的终边在第二象限，故应填二.

[例 6] 不等式 $(\lg 20)^{2\cos x}\geqslant 1\,(x\in(0,\pi))$ 的解集为________.

［讲解］ 注意到 $\lg 20>1$，于是原不等式可变形为 $2\cos x\geqslant 0\Leftrightarrow\cos x\geqslant 0$.

而 $0<x<\pi$，所以 $0<x\leqslant\frac{\pi}{2}$，故应填 $\left\{x\,\middle|\,0<x\leqslant\frac{\pi}{2},x\in\mathbf{R}\right\}$.

［例 7］ 如果函数 $y=\sin 2x+a\cos 2x$ 的图像关于直线 $x=-\frac{\pi}{8}$ 对称，那么 $a=$________.

［讲解］ （方法一）$y=\sqrt{1+a^2}\sin(2x+\varphi)$，其中 $\tan\varphi=a$.

$\because x=-\frac{\pi}{8}$ 是已知函数的对称轴，

$\therefore 2\left(-\frac{\pi}{8}\right)+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}$，

即 $\varphi=k\pi+\frac{3\pi}{4},k\in\mathbf{Z}$，

于是 $a=\tan\varphi=\tan\left(k\pi+\frac{3\pi}{4}\right)=-1$. 故应填 -1.

在解题的过程中，我们用到如下小结论：

函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 和 $y=A\cos(\omega x+\varphi)$ 的图像关于过最值点且垂直于 x 轴的直线分别成轴对称图形.

（方法二）特值法，利用 $f(0)=f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

3. 数列、排列组合与二项式定理

［例 8］ 已知 $\{a_n\}$ 是公差不为零的等差数列，如果 S_n 是 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，那么 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{na_n}{S_n}=$________.

［讲解］ 特别取 $a_n=n$，有 $S_n=\frac{n(n+1)}{2}$，于是有

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{na_n}{S_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n(n+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=2$. 故应填 2.

［例 9］ 数列 $\{a_n\}$ 中，$a_n=\begin{cases}\frac{1}{5^n},(n\text{ 是奇数})\\ -\frac{2}{5^n},(n\text{ 是偶数})\end{cases}$ $S_{2n}=a_1+a_2+\cdots+a_{2n}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=$________.

［讲解］ 分类求和，得

$\because S_{2n}=(a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1})+(a_2+a_4+\cdots+a_{2n})$，

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_{2n}=\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5^2}}+\frac{-\frac{2}{5^2}}{1-\frac{1}{5^2}}=\frac{1}{8}$$，故应填$\frac{1}{8}$.

[例 10] 某商场开展促销活动，设计一种对奖券，号码从 000000 到 999999. 若号码的奇位数字是不同的奇数、偶位数字均为偶数时，为中奖号码，则中奖面(即中奖号码占全部号码的百分比)为________.

[讲解] 中奖号码的排列方法是：奇位数字上排不同的奇数有 P_5^3 种方法，偶位数字上排偶数的方法有 5^3，从而中奖号码共有 $P_5^3\times5^3$ 种，于是中奖面为$\frac{P_5^3\times5^3}{1\ 000\ 000}\times100\%=0.75\%$，

故应填 0.75%.

[例 11] $(x^2+1)(x-2)^7$ 的展开式中 x^3 的系数是________.

[讲解] 由$(x^2+1)(x-2)^7=x^2(x-2)^7+(x-2)^7$ 知，所求系数应为$(x-2)^7$的 x 项的系数与 x^3 项的系数的和，即有 $C_7^6(-2)^6+C_7^4(-2)^4=1\ 008$，故应填 1 008.

4. 立体几何

[例 12] 过长方体一个顶点的三条棱长为 3，4，5，且它的八个顶点都在同一球面上，这个球的表面积是________.

[讲解] 长方体的对角线就是外接球的直径 $2R$，即有

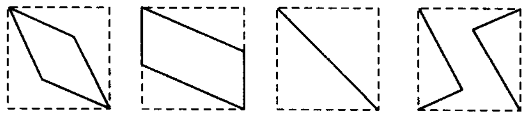
$(2R)^2=4R^2=3^2+4^2+5^2=50$，

从而 $S_{球}=4\pi R^2=50\pi$，故应填 50π.

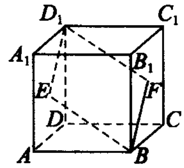
[例 13] 若四面体各棱的长是 1 或 2，且该四面体不是正四面体，则其体积是________(只需写出一个可能的值).

[讲解] 本题是一道很好的开放题，解题的开窍点是：每个面的三条棱是怎样构造的，依据“三角形中两边之和大于第三边”，就可否定$\{1,1,2\}$，从而得出$\{1,1,1\}$，$\{1,2,2\}$，$\{2,2,2\}$三种形态，再由这三类面构造满足题设条件的四面体，最后计算出这三个四面体的体积分别为：$\frac{\sqrt{11}}{6}$，$\frac{\sqrt{11}}{12}$，$\frac{\sqrt{14}}{12}$，故应填$\frac{\sqrt{11}}{6}$，$\frac{\sqrt{11}}{12}$，$\frac{\sqrt{14}}{12}$中的一个即可.

[例 14] 如下图，E、F 分别是正方体的面 ADD_1A_1、面 BCC_1B_1 的中心，则四边形 BFD_1E 在该正方体的面上的射影可能是________.(要求：把可能的图的序号都填上)



①　　②　　③　　④



［讲解］ 因为正方体是对称的几何体，所以四边形 BFD_1E 在该正方体的面上的射影可分为：上下、左右、前后三个方向的射影，也就是在面 $ABCD$、面 ABB_1A_1、面 ADD_1A_1 上的射影.

四边形 BFD_1E 在面 $ABCD$ 和面 ABB_1A_1 上的射影相同，如图②所示；

四边形 BFD_1E 在该正方体对角面的 ABC_1D_1 内，它在面 ADD_1A_1 上的射影显然是一条线段，如图③所示. 故应填②③.

4. 解析几何

［例 15］ 直线 $y=x-1$ 被抛物线 $y^2=4x$ 截得线段的中点坐标是________.

［讲解］ 由 $\begin{cases} y=x-1, \\ y^2=4x \end{cases}$ 消去 y，化简得 $x^2-6x+1=0$，

设此方程二根为 x_1,x_2，所截线段的中点坐标为 (x_0,y_0)，则

$\left.\begin{array}{l} x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}=3, \\ y_0=x_0-1=2. \end{array}\right.$ 故应填 $(3,2)$.

［例 16］ 椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ 上的一点 P 到两焦点的距离的乘积为 m，则当 m 取最大值时，点 P 的坐标是________.

［讲解］ 记椭圆的二焦点为 F_1,F_2，有 $|PF_1|+|PF_2|=2a=10$，

则知 $m=|PF_1|\cdot|PF_2|\leqslant\left(\frac{|PF_1+|PF_2|}{2}\right)^2=25$.

显然当 $|PF_1|=|PF_2|=5$，即点 P 位于椭圆的短轴的顶点处时，m 取得最大值 25. 故应填 $(-3,0)$ 或 $(3,0)$.

填空题的类型一般可分为完形填空题、多选填空题、条件与结论开放的填空题. 这说明填空题是数学高考命题改革的试验田，创新型的填空题将会不断出现. 因此，我们在备考时，既要关注这一新动向，又要做好应试的技能准备.