

123456

7890

%7814*11%

30564486

4561245

$\sin x$ $\sqrt{y}$ $\tan$

奥博丛书

高中数学奥林匹克系列

浙江奥数网 www.zjaoshu.com

西泠印社出版社

数列与 数学归纳法

【蔡小雄 编著】

奥博丛书

高中数学奥林匹克系列

一试系列

1. 解析几何
2. 数列与数学归纳法
3. 集合与函数
4. 三角函数
5. 立体几何
6. 复数与向量
7. 不等式
8. 排列组合与概率统计

虞金龙 编著
蔡小雄 编著
李惟峰 编著
张金良 编著
吴国建 编著
吕峰波 编著
郑日锋 编著
许康华 编著

二试系列

1. 平面几何
2. 不等式与最值
3. 组合数学
4. 初等数论
5. 解题研究
6. 我怎样解题
7. 中学数学竞赛导引
8. 数学奥林匹克大集
9. 奥林匹克数学方法选讲
10. 解数学竞赛题的常用策略
11. 奥林匹克数学教育的理论和实践
12. 数学奥林匹克试题背景研究
13. 数学奥林匹克概论
14. 国际数学奥林匹克研究

过伯祥 编著
石世昌 编著
徐士英 编著
冯祖铭 编著
单 埏 编著
单 埏 编著
常庚哲 严镇军 编著
黄宣国 编著
黄国勋 编著
王连笑 编著
冯跃峰 编著
刘培杰 编著
朱华伟 编著
熊 斌 田廷彦 编著

奥 博
教 育

奥博丛书

高中数学奥林匹克系列

浙江奥数网 www.zjaoshu.com

西泠印社出版社

数列与 数学归纳法

【蔡小雄 ○ 编著】



1234567890123456
012478+7866
234556-4534574.45678786
4534234/43454
2137467854678945678
123786453453.1448678
45367896452345(1256456
212315648611
65465156486

图书在版编目(CIP)数据

高中数学联赛一试. 数列与数学归纳法/蔡小雄主
编. —杭州: 西泠印社出版社, 2006. 6

(奥博丛书)

ISBN 7-80735-077-6

I. 高... II. 蔡... III. 代数课—高中—解题

IV. G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 064131 号

丛书序言

一本武功秘籍！

找到它，勤加练习，就能成为武林高手。

这是金庸等人常写的故事。

这套奥博丛书，其中就有若干本或许可以称为解题秘籍。当然，得到它之后，要成为解题高手，还得注意：

一、勤加练习。因为解题是实践性的技能，只能通过模仿和实践来学到它。

二、循序渐进。孔子说：“欲速则不达。”不能操之过急。一个问题或一种方法，彻底弄清楚了，再往下看。切忌囫囵吞枣，食而不化。

三、不要迷信书本。“尽信书，则不如无书。”作者也有可能出错。“乾坤大挪移”第七层心法的一十九句就是“单凭空想而想错了的。”其实要成为真正的高手，不能依赖秘籍，而要自创新招。

这套奥博丛书，不只是解题的秘籍。它的作者阵营庞大，视角不尽相同，写法各有特点。或综述，或专题；或讲思想，或谈策略；或提供翔实材料，或介绍背景知识；……

据我了解，奥博丛书原本并不是一套丛书。它既没有预先设定的宏伟的出书规划，也不能保证其中的每一本都同样精彩。时间，才是考验它们的唯一准则。它不像其他丛书那样，追求在同一时间出齐；而是细水长流，渐渐汇聚成河。除已出的、即出的十余种外，想必还会继续推出新的品种。

开卷有益。相信这套丛书能很好地普及数学知识，增加读者对数学的理解，提高数学的品味(taste)，也就是鉴赏能力。祝愿这套丛书能够伴随读者度过一段愉快的时光。

单 埏

2006年3月16日

奥博丛书之高中数学奥林匹克一试系列

- 编委会
- | | |
|-----|--|
| 王祖樾 | 中国数学奥林匹克高级教练员 浙江电子科技大学教授 曾任浙江省数学会普及工作委员会主任 |
| 李名德 | 中国数学奥林匹克高级教练员 浙江省学科竞赛委员会委员 浙江大学教授 |
| 徐士英 | 中国数学奥林匹克高级教练员 中国计量学院教授 浙江省数学会普及工作委员会副主任 |
| 王航平 | 中国计量学院副教授 |
| 徐莹 | 奥博丛书总策划 浙江奥数网站站长 |
| 吕峰波 | 嘉兴市第一中学数学教研组长 数学高级教师 |
| 李惟峰 | 杭州外国语学校数学教研组长 数学高级教师 |
| 张金良 | 浙江省教研室数学教研员 数学特级教师 |
| 吴国建 | 东阳中学教务处主任 数学高级教师 |
| 许康华 | 富阳市第二中学数学高级教师 |
| 郑日锋 | 杭州市学军中学数学教研组长 数学高级教师 |
| 虞金龙 | 绍兴市第一中学数学高级教师 |
| 蔡小雄 | 杭州市第二中学数学高级教师 |

本册主编 蔡小雄

丛书总策划 徐莹

丛书审稿 王祖樾 李名德 徐士英 王航平

业务联系 地址：浙江省杭州市学院路83号221室

电话：0571-85028528 85021510

传真：0571-85028578



目 录

第 1 章 知识篇

- 1.1 数列的概念 / 1
- 1.2 等差数列 / 7
- 1.3 等比数列 / 20
- 1.4 斐波那契数列 / 32
- 1.5 分群数列 / 44
- 1.6 周期数列 / 52
- 1.7 阶差数列 / 58

第 2 章 方法篇

- 2.1 递归数列通项公式的求法 / 67
- 2.2 数列前 n 项和的求法 / 82
- 2.3 递推法解题 / 92
- 2.4 数学归纳法 / 101

第 3 章 综合篇

- 3.1 数列新颖题 / 111
- 3.2 数列与不等式交汇题 / 122
- 3.3 数列与解析几何交汇题 / 137

参考答案

第1章

知识篇

1.1 数列的概念



知识概要

按照某一法则,给定了第1个数 a_1 ,第2个数 $a_2, \dots$,对于正整数 n 有一个确定的数 a_n ,于是得到一列有次序的数 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$,我们称它为数列,用符号 $\{a_n\}$ 表示.数列中每一个数称为数列的项,第 n 项 a_n 称为数列的一般项,又称为数列 $\{a_n\}$ 的通项. n 称为足标, $n \in \mathbf{N}^*$.有时,数列第1个数记为 a_0 ,第2个数记为 $a_1, \dots$,这样足标 n 可取非负整数,即 $n \in \mathbf{N}$.

当一个数列的项数为有限时,称这个数列为有限数列;当一个数列的项数为无限时,称这个数列为无穷数列.

对于一个数列,如果从第2项起,每一项都不小于它的前面的一项,即 $a_{n+1} \geq a_n$,这样的数列称为递增数列.如果从第2项起,每一项都不大于它的前面的一项,即 $a_{n+1} \leq a_n$,这样的数列称为递减数列.当以上不等式是严格“ $>$ ”或“ $<$ ”时,则相应地称为严格递增数列和严格递减数列.如果数列 $\{a_n\}$ 的各项都相等,即 $a_n = a_{n+1}$,则称数列 $\{a_n\}$ 为常数数列.

如果数列的每一项的绝对值都小于某一正数,即 $|a_n| < M$,其中 M 是某一正数,则称此数列为有界数列.如果不存在某一个正数能使每一项的绝对值都小于它,则称此数列为无界数列.

如果在数列 $\{a_n\}$ 中,项数 n 与 a_n 具有如下的函数关系 $a_n = f(n)$ ($n \in \mathbf{N}^*$),则这个关系称为数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.从数列的定义中我们看到,数列可以看作是定义域为正整数集的函数.其图象呈散点状态.但是值得注意的是,数列是有序的,如果将数列中的两个不相同的项进行互换,那么得到的数列与原数列是不相同的数列,而函数关系并不要求是有序的.





例题精讲

例 1 写出以下数列的前 6 项:

(1) 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = n(n-1) + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$;

(2) 数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = n(n-1)$.

解 (1) 数列 $\{a_n\}$ 的前 6 项分别为 0, 2, 6, 12, 20, 150;

(2) 数列 $\{b_n\}$ 的前 6 项分别为 0, 2, 6, 12, 20, 30.

评注 此例说明, 当两个数列的前面几项相同时, 这两个数列可能不是同一个数列, 这也说明, 若只写出了数列的前几项, 这个数列是不确定的.

例 2 写出下面数列的一个通项公式, 使它的前几项分别是下列各数:

(1) $\frac{3}{2}, \frac{8}{3}, \frac{15}{4}, \frac{24}{5}$;

(2) $2, \frac{5}{2}, \frac{13}{4}, \frac{33}{8}$;

(3) 1, 3, 3, 5, 5, 7, 7, 9, 9;

(4) 7, 3, 7, 3, 7, 3, 7, 3.

解 (1) $a_n = (n+1) - \frac{1}{n+1} = \frac{n^2 + 2n}{n+1}$;

(2) $a_n = n + \frac{1}{2^{n-1}}$;

(3) $a_n = n + \frac{1 + (-1)^n}{2}$;

(4) $a_n = 5 + 2 \cdot (-1)^{n+1}$.

评注 同一个数列的通项公式在形式上不一定唯一, 如数列 1, -1, 1, -1, ... 的通项公式可写成 $a_n = (-1)^{n-1}$, 也可写成 $a_n = \cos(n+1)\pi$ 或

$a_n = \begin{cases} 1, n \text{ 为正奇数} \\ -1, n \text{ 为正偶数} \end{cases}$. 另外, 也要注意, 不是所有的数列都能写出通项公

式.

例 3 如图 1-1, 根据下列图形及相应的点的个数, 找出其中的一种或几种规律, 画出第 4 个图形, 并写出相应的点数, 求这些图形点数的通项公式.

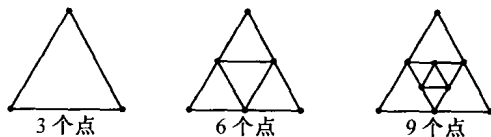
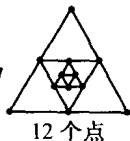


图 1-1

解 第 4 个图



$$a_n = 3n.$$

例 4 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \frac{n^2}{n^2+1}$, 判断该数列的增减性与有界性.

$$\begin{aligned} \text{分析与解} \quad a_{n+1} - a_n &= \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+1} - \frac{n^2}{n^2+1} \\ &= \frac{(n+1)^2(n^2+1) - n^2(n+1)^2 - n^2}{[(n+1)^2+1](n^2+1)} \\ &= \frac{2n+1}{[(n+1)^2+1](n^2+1)} > 0 \end{aligned}$$

得该数列为递增数列,

又由 $|\frac{n^2}{n^2+1}| < 1$, 所以该数列为有界数列.

评注 判断一个数列是否是单调或有界的, 只需根据定义证明.

例 5 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = (n+1)\left(\frac{9}{10}\right)^n$, 试分析是否存在自然数 M , 使得对任意正整数 n , 有 $a_n \leq a_M$ 成立?

$$\begin{aligned} \text{分析与解} \quad a_{n+1} - a_n &= (n+2)\left(\frac{9}{10}\right)^{n+1} - (n+1)\left(\frac{9}{10}\right)^n = 9(n+2) \cdot \frac{9^n}{10^{n+1}} \\ &- 10(n+1) \cdot \frac{9^n}{10^{n+1}} = \frac{9^n}{10^{n+1}}(8-n) \end{aligned}$$

当 $n < 8$ 时, $a_{n+1} > a_n$; 当 $n = 8$ 时, $a_{n+1} = a_n$; 当 $n > 8$ 时, $a_{n+1} < a_n$,
即有 $a_1 < a_2 < \cdots < a_8 = a_9$, 又 $a_9 > a_{10} > a_{11} > \cdots$.

因此, 存在自然数 $M = 8$ 或 9 , 使得对任意正整数 n , 有 $a_n \leq a_M$ 成立.

例 6 设 $\{a_n\}$ 是首项为 1, 各项均为正数的数列, 且 $(n+1)a_{n+1}^2 - na_n^2 +$



$a_{n+1}a_n=0$ ($n=1,2,3,\dots$), 求它的通项公式 a_n .

解法一 注意到 $a_n>0$, 将条件等式两边同除以 a_n^2 , 得

$$(n+1)\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^2 + \frac{a_{n+1}}{a_n} - n = 0, \text{ 解关于 } \frac{a_{n+1}}{a_n} \text{ 的二次方程得 } \frac{a_{n+1}}{a_n} = -1 \text{ (舍去) 或 } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1}.$$

$$\text{即 } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1}, \text{ 因此, } na_n = (n-1)a_{n-1} = \dots = 2a_2 = a_1, \text{ 由 } a_1=1 \text{ 得 } a_n = \frac{1}{n}.$$

解法二 由 $(n+1)a_{n+1}^2 - na_n^2 + a_{n+1}a_n = 0$, 因式分解, 得 $(a_{n+1} + a_n)[(n+1)a_{n+1} - na_n] = 0$.

注意到 $a_n>0$, 所以有 $(n+1)a_{n+1} - na_n = 0$, 即 $(n+1)a_{n+1} = na_n$, 以下同解法一.

例 7 已知 $a_1=1, a_2=3, a_{n+2}=(n+3)a_{n+1}-(n+2)a_n$, 若当 $m \geq n, a_m$ 的值都能被 9 整除, 求 n 的最小值.

分析与解 由 $a_{n+2} - a_{n+1} = (n+3)a_{n+1} - (n+2)a_n - a_{n+1}$

$$= (n+2)a_{n+1} - (n+2)a_n$$

$$= (n+2)(a_{n+1} - a_n)$$

$$= (n+2)(n+1)(a_n - a_{n-1})$$

$$= \dots$$

$$= (n+2)(n+1) \cdots 4 \cdot 3 \cdot (a_2 - a_1)$$

$$= (n+2)!$$

所以, $a_n = a_1 + (a_2 - a_1) + \dots + (a_n - a_{n-1}) = 1 + 2! + 3! + \dots + n! \quad (n \geq 1)$

由于 $a_1=1, a_2=3, a_3=9, a_4=33, a_5=153$, 而 153 能被 9 整除, 并且, 当 $m \geq 6$ 时, $9|m!$, 所以, 当 $m \geq 5$ 时, $9|a_m$, 但 $9 \nmid a_4$, 因此, n 的最小值为 5.

评注 本题通过配凑得到 $a_{n+2} - a_{n+1}$ 与 $a_n - a_{n-1}$ 的关系式, 再利用递推关系求得数列的通项 a_n , 由通项分析数列的有关性质就显得心应手了.

练习精选

1 写出下面数列的一个通项公式, 使它的前 4 项分别是下列各数:

(1) $0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$;

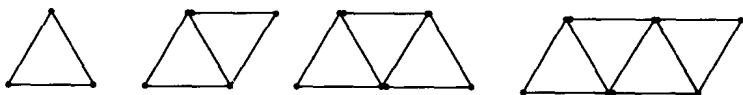
(2) $6, 66, 666, 6666, 66666, \dots$;





(3) 15, 1515, 151515, 15151515, ...

用火柴棒按下图的方法搭三角形：



按图示的规律搭下去，试写出所用火柴棒数 a_n 与所搭三角形的个数 n 之间的关系式。



3 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = \begin{cases} a_1 = 1 (n=1) \\ 1 + \frac{1}{a_{n-1}} (n \geq 2) \end{cases}$ ，写出这个数列的前 5 项。

已知 $a_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$ ，把数列 $\{a_n\}$ 的各项排成三角形状

		a_1			
		a_2	a_3	a_4	
	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
			...		

记 $A(m, n)$ 表示第 m 行，第 n 列的项，求 $A(10, 8)$ 。

5 数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 = 1, x_2 = \frac{2}{3}, \frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{x_{n+1}} = \frac{2}{x_n} (n \geq 2)$ ，求 x_n 。



已知数列的通项公式为 $a_n = -0.3n^2 + 2n + 7\frac{2}{3}$, 求它的数值最大的项.

7 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2^2}a_2 + \cdots + \frac{1}{2^n}a_n = 2n + 5 (n \in \mathbf{N}^*)$, 求 a_n .

已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2^n - 3n + 1 (n = 1, 2, \cdots)$, 求此数列中奇数项所组成的数列 $a_1, a_3, \cdots, a_{2n-1}, \cdots$ 的通项公式.

9 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \frac{10^n - 1}{9}$, 求证: $a_{2n} + 4a_n + 1$ 是完全平方数.

已知数列 $\{a_n\}$, 其中 $a_1 = 1, a_2 = a_1 + \frac{1}{a_1}, \cdots, a_n = a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}}$, 证明: $14 < a_{100} < 18$.

11 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_0 = 0, a_{n+1} = ka_n + \sqrt{(k-1)a_n^2 + 1}, n = 0, 1, 2, \cdots$, 其中 k 为给定的正整数, 证明: 数列 $\{a_n\}$ 的每一项都是整数, 且 $2k | a_{2n}, n = 0, 1, 2, \cdots$.

证明: 数列 $y_0 = 1, y_{n+1} = \frac{1}{2}(3y_n + \sqrt{5y_n^2 - 4}) (n \geq 0)$ 是整数数列.



1.2 等差数列



知识概要

一般地,如果一个数列从第2项起,每一项与它前一项的差等于同一个常数,这个数列就叫做等差数列,这个常数就叫做等差数列的公差,常用字母“ d ”表示.

等差数列的通项公式: $a_n = a_1 + (n-1)d$ 或 $a_n = a_m + (n-m)d$

等差数列的前 n 项和公式: $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$ 或 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)d}{2}$

等差数列的主要性质:

- (1) 公差为非零的等差数列的通项公式为 n 的一次函数;
- (2) 公差为非零的等差数列的前 n 项和公式为 n 的不含常数项的二次函数;
- (3) 设 $\{a_n\}$ 是等差数列,则 $\{\lambda a_n + b\}$ (λ, b 是常数)是等差数列;
- (4) 设 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 是等差数列,则 $\{\lambda_1 a_n + \lambda_2 b_n\}$ (λ_1, λ_2 是常数)也是等差数列;
- (5) 设 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 是等差数列且 $b_n \in \mathbb{N}^+$, 则 $\{a_{b_n}\}$ 也是等差数列(即等差数列中等距离分离出的子数列仍为等差数列);
- (6) 若 $m+n=p+q$, 则 $a_m + a_n = a_p + a_q$, 特别地: 若 $m+n=2p$, 则 $a_m + a_n = 2a_p$;
- (7) 设 $A = a_1 + \cdots + a_n, B = a_{n+1} + \cdots + a_{2n}, C = a_{2n+1} + \cdots + a_{3n}$, 则有 $2B = A + C$;
- (8) 对于项数为 $2n$ 的等差数列 $\{a_n\}$, 记 $S_{\text{偶}}, S_{\text{奇}}$ 分别表示前 $2n$ 项中的偶数项和与奇数项和, 则 $S_{\text{偶}} - S_{\text{奇}} = nd, \frac{S_{\text{奇}}}{S_{\text{偶}}} = \frac{a_n}{a_{n+1}}$;
- (9) 对于项数为 $2n-1$ 的等差数列 $\{a_n\}$, 有 $S_{\text{奇}} - S_{\text{偶}} = a_n, \frac{S_{\text{奇}}}{S_{\text{偶}}} = \frac{n}{n-1}$;
- (10) S_n 是等差数列的前 n 项和, 则 $S_{2n-1} = (2n-1)a_n$;
- (11) 其他衍生等差数列: 若已知等差数列 $\{a_n\}$, 公差为 d , 前 n 项和为 S_n , 则: ① $a_p, a_{p+t}, a_{p+2t}, \cdots, a_{p+(n-1)t}, \cdots$ 为等差数列, 公差为 td ;





② $a_1 + a_2 + \cdots + a_m, a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{2m}, \cdots$ (即 $S_m, S_{2m} - S_m, S_{3m} - S_{2m}, \cdots$) 为等差数列, 公差 $m^2 d$;

③ $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ (即 $\frac{S_1}{1}, \frac{S_2}{2}, \frac{S_3}{3}, \cdots$) 为等差数列, 公差 $\frac{d}{2}$.



例题精讲

例 1 各项都是正数的数列 $\{a_n\}$ 中, 若前 n 项的和 S_n 满足 $2S_n = a_n + \frac{1}{a_n}$, 求此数列的通项公式.



分析与解 $n \geq 2$ 时, 将 $a_n = S_n - S_{n-1}$ 代入 $2S_n = a_n + \frac{1}{a_n}$, 得 $2S_n = S_n -$

$$S_{n-1} + \frac{1}{S_n - S_{n-1}},$$

整理得 $S_n^2 - S_{n-1}^2 = 1 (n \geq 2)$, 且 $S_1 = a_1 = 1$,

所以数列 $\{S_n^2\}$ 是首项为 1, 公差为 1 的等差数列,

即 $S_n^2 = 1 + (n-1) \cdot 1 = n$, 由 $a_n > 0$ 知 $S_n > 0$, 因此 $S_n = \sqrt{n}$, 从而 $a_n = S_n - S_{n-1} = \sqrt{n} - \sqrt{n-1} (n \geq 2)$,

当 $n=1$ 时, 由 $2S_1 = a_1 + \frac{1}{a_1}$, 得 $a_1 = 1$ 也满足 $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$.

因此, 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$.

评注 对于 S_n 与 a_n 的混合式, 应整理成数列 $\{S_n\}$ 的递推式或数列 $\{a_n\}$ 的递推式, 然后用递推关系式先求出 S_n , 再求 a_n , 或直接求 a_n .

例 2 已知数列 $\{a_n\}$ 中 $a_1 = \frac{3}{5}, a_n = 2 - \frac{1}{a_{n-1}} (n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*)$, 数列 $\{b_n\}$ 满

足 $b_n = \frac{1}{a_n - 1}$,

(1) 求证: 数列 $\{b_n\}$ 是等差数列;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 中的最大项与最小项, 并说明理由;

(3) 记 $S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)b_n}{S_{n+1}}$.

分析与解

(1) 将 $a_n = 2 - \frac{1}{a_{n-1}}$ 代入 $b_n = \frac{1}{a_n - 1}$, 得 $b_n = \frac{1}{a_n - 1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{a_{n-1}}} = \frac{a_{n-1}}{a_{n-1} - 1}$,



而 $b_{n-1} = \frac{1}{a_{n-1}-1}$,

$$\therefore b_n - b_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{a_{n-1}-1} - \frac{1}{a_{n-1}-1} = 1 (n \in \mathbf{N}^*).$$

$\therefore \{b_n\}$ 是首项为 $b_1 = \frac{1}{a_1-1} = -\frac{5}{2}$, 公差为 1 的等差数列.

(2) 依题意有 $a_n - 1 = \frac{1}{b_n}$, 而 $b_n = -\frac{5}{2} + (n-1) \cdot 1 = n - 3.5$,

$$\therefore a_n - 1 = \frac{1}{n - 3.5}.$$

对于函数 $y = \frac{1}{x - 3.5}$, 在 $x > 3.5$ 时, $y > 0, y' < 0$, 因此, $y = \frac{1}{x - 3.5}$ 在

$(3.5, +\infty)$ 上为减函数, 因此, 当 $n = 4$ 时, $a_n = 1 + \frac{1}{n - 3.5}$ 取最大值 3.

而函数 $y = \frac{1}{x - 3.5}$ 在 $x < 3.5$ 时, $y < 0, y' = -\frac{1}{(x - 3.5)^2} < 0$, 在 $(-\infty, 3.5)$ 上也为减函数, 因此, 当 $n = 3$ 时, a_n 取最小值 $a_3 = -1$.

$$(3) S_{n+1} = \frac{(n+1)\left(-\frac{5}{2} + \frac{2n-5}{2}\right)}{2} = \frac{(n+1)(n-5)}{2}, b_n = n - 3.5,$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n-1)b_n}{S_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2(n-1)(n-3.5)}{(n+1)(n-5)} = 2.$$

例 3 函数 $f(x)$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $f(x) + f(1-x) = \frac{1}{2}$.

(1) 数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_n = f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) + f(1)$,

数列 $\{a_n\}$ 是等差数列吗? 请给予证明;

(2) 令 $b_n = \frac{4}{4a_n - 1}$, $T_n = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \cdots + b_n^2$, $S_n = 32 - \frac{16}{n}$, 试比较 T_n 与 S_n 的大小.

分析与解

(1) 因为 $f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(1 - \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, 所以 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

令 $x = \frac{1}{n}$, 得 $f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$, 即 $f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{2}$.

$$a_n = f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) + f(1)$$



$$\text{又 } a_n = f(1) + f\left(\frac{n-1}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{n}\right) + f(0)$$

两式相加

$$2a_n = [f(0) + f(1)] + \left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right] + \cdots + [f(1) + f(0)] = \frac{n+1}{2}.$$

$$\text{所以 } a_n = \frac{n+1}{4}, n \in \mathbf{N}^*,$$

$$\text{又 } a_{n+1} - a_n = \frac{n+1+1}{4} - \frac{n+1}{4} = \frac{1}{4}. \text{ 故数列 } \{a_n\} \text{ 是等差数列.}$$

$$(2) b_n = \frac{4}{4a_n - 1} = \frac{4}{n},$$

$$T_n = b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2 = 16 \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \right)$$

$$\leq 16 \left[1 + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n-1)} \right]$$

$$= 16 \left[1 + \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \right]$$

$$= 16 \left(2 - \frac{1}{n} \right)$$

$$= 32 - \frac{16}{n}$$

$$= S_n, \text{ 所以 } T_n \leq S_n.$$

评注 求通项 a_n 时用的是“倒序相加法”，第(2)小题比较大小时用的是“裂项相消法”，以上两种方法都是数列求和的常用方法，学习时需认真领会。

例4 设 $S = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$, A 为至少含有两项且公差为正的等差数列，其项都在 S 中，且添加 S 的其他元素于 A 后均不能构成与 A 有相同公差的等差数列，求这种 A 的个数(这里只有两项的数列也看作等差数列)。

分析 可先通过对特殊的 n (如 $n = 1, 2, 3$)，通过列举求出 A 的个数，然后总结规律，找出 a_n 的递推关系，从而解决问题；也可以就 A 的公差 $d = 1, 2, \cdots, n-1$ 时，讨论 A 的个数。

解法一 设 A 的公差为 d ，则 $1 \leq d \leq n-1$ ，分两种情况讨论：

(i) 设 n 为偶数，则当 $1 \leq d \leq \frac{n}{2}$ 时，公差为 d 的 A 有 d 个；当 $\frac{n}{2} + 1 \leq d$