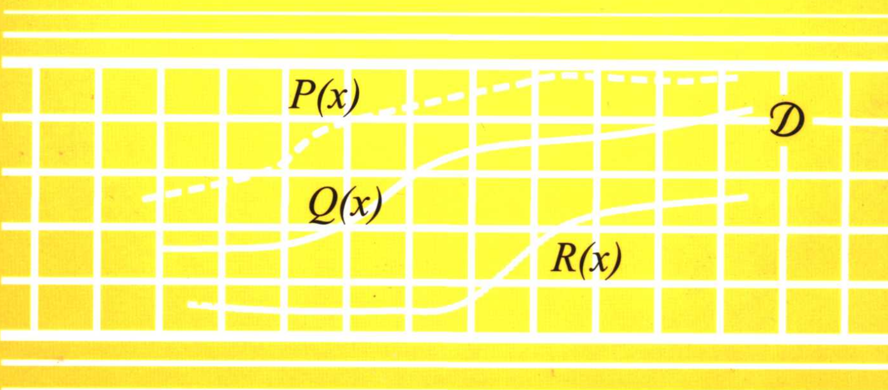
函数S-粗集与系统规律挖掘

史开泉 姚炳学 著

国家自然科学基金资助

山东大学
聊城大学 出版基金资助



科学出版社
www.sciencep.com

函数S-粗集与系统规律挖掘

史开泉　姚炳学　著

国家自然科学基金资助
山东大学出版基金资助
聊城大学出版基金资助

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书给出了S-粗集，函数S-粗集，函数粗集的结构与它们的变异．给出了S-粗集，函数S-粗集，函数粗集与Z. Pawlak粗集的关系．利用函数S-粗集与函数粗集，给出规律传递挖掘-发现，规律遗传-进化挖掘-发现，规律关系挖掘-发现的，规律隐藏挖掘-发现多层面讨论和多个来自实际系统中的例子．本书突出应用与学科渗透，问题分析视野宽，启迪性强．

本书适合经济系统、管理系统、系统识别、系统分析、系统融合辨识、系统通讯、生物医学工程、材料科学与工程、应用数学等众多领域的大学生、研究生、教师及科研工作者阅读．

图书在版编目(CIP)数据

函数S-粗集与系统规律挖掘/史开泉，姚炳学 著．—北京：科学出版社，2007

ISBN 978-7-03-018580-8

I. 函… II. ①史… ②姚… III. ①系统理论… ②控制论… IV. N94 0231

中国版本图书馆CIP数据核字(2007) 第020817号

责任编辑：张 扬 / 责任校对：郑金红
责任印制：赵德静 / 封面设计：陈 敬

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

天时彩色印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2007年4月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2007年4月第一次印刷 印张：15 1/2
印数：1—3 000 字数：292 000

定价：42.00元

序　言

本书面对经济系统、管理系统、通信系统、故障检测 - 识别系统、信息辨识系统、系统状态分析、系统状态识别、系统信息融合、生物医学工程、材料科学与工程、应用数学等领域, 祈盼给正在这些领域内完成博士学业、硕士学业的年青一代提供新的研究思想, 同时也祈盼给那些正在这些领域从事实际工作的人们提供新的分析问题的手段. 从事上述领域理论与应用研究的人们无一不遇到 "系统规律", 如: 经济系统规律、投资系统规律、管理系统规律、故障检测 - 识别系统规律等, 他们正在寻找那些还未被认识的 "系统规律".

什么是规律? $[a,b]$ 区间上的函数 (离散函数, 连续函数) 是 $[a,b]$ 区间上的规律 (离散规律, 连续规律); 简单地说, 函数是一个规律. 人们对一个系统的最终认识, 是要认识这个系统的规律与规律具有的特征并利用这些特征. 有些系统的规律已被人们认识了, 有些系统的规律正在被人们认识, 有些系统的规律潜藏在系统中, 它还未被人们认识.

一个系统在 $[t_1,t_k]$ 上具有规律 w, 人们希望规律 w 在 $[t_1,t_k]$ 上保持不变或稳定; 常常存在这样的事实: 在工程系统中, 一个不被人们事先知道的规律 w'(黑规律 w'), 对系统规律 w 进行攻击 (例如, 通信系统中的随机电磁干扰规律对信息传递规律的攻击), 使得规律 w 发生紊乱, w 变成 w^*. 人们如何从 w^* 中挖掘出 w', 认识 w' 的特征并对 w' 堵截? 把问题反过来, 在紊乱的规律 w^* 中, 一定潜藏着稳定的规律 w,w 还未被人们认识: 从 w^* 中如何发现 w? 问题的正反两个方面归结为本书的讨论主题: 规律挖掘 - 规律发现.

数据挖掘 - 知识发现 (data mining-knowledge discovery) 是人们已经熟知的概念和研究领域; 人们正在利用 Z. Pawlak 粗集 (rough sets) 这个新的数学工具, 对数据挖掘 - 知识发现做深入研究, 获得一些令人兴奋的结果. 1982 年波兰数学家 Z. Pawlak 教授提出粗集 (rough sets), 给出粗集的一般性研究, Z. Pawlak 粗集是以 R-元素等价类 $[x]$ 定义的. Z. Pawlak 粗集是一个具有静态特征的元素集合 $X \subset U$ 的粗集.

从某种意义与某个层面上看, 规律挖掘 - 规律发现研究比数据挖掘 - 知识发现

研究更重要, 特别是对于那些重要系统, 挖掘潜藏在这些系统中的规律, 迫在眉睫; 潜藏在这些系统的规律, 还未被人们认识. 利用 Z. Pawlak 粗集能进行系统中规律挖掘 - 规律发现研究吗? 回答是否定的; 或者说, 利用 Z. Pawlak 粗集进行规律挖掘 - 规律发现研究遇到了困难. 这是因为: Z. Pawlak 粗集 (或 R- 元素等价类 $[x]$) 不具有规律 (函数) 特征.

2002 年史开泉对 Z. Pawlak 粗集做出改进, 给出动态 R - 元素等价类 $[x]$ 的概念; 提出了 S - 粗集 (singular rough sets), S - 粗集是以具有动态特征的 R- 元素等价类 $[x]$ 定义的. S - 粗集具有两类基本形式: 单向 S - 粗集 (one direction singular rough sets), 单向 S- 粗集对偶 (dual of one direction singular rough sets), 双向 S - 粗集 (two direction singular rough sets). S- 粗集为动态数据挖掘 - 动态知识发现研究提供了理论支持. 在系统中, 利用 S - 粗集进行规律挖掘 - 规律发现研究也遇到了困难. 这是因为: S - 粗集 (或 R- 元素等价类 $[x]$) 不具有规律 (函数) 特征.

2005 年史开泉把函数这一分析工具, 引入到 S - 粗集中并改进 S - 粗集, 给出具有动态特性的 R - 函数等价类 $[u]$ 的概念, 提出函数 S - 粗集 (function singular rough sets). 函数 S - 粗集是以具有动态特征 (单向动态, 双向动态) 的 R - 函数等价类 $[u]$ 定义的, $u_i \in [u]$ 是一个函数, 函数 u_i 是一个规律. 函数 S - 粗集具有两类基本形式: 函数单向 S - 粗集 (function one direction singular rough sets), 函数单向 S - 粗集对偶 (dual of function one direction singular rough sets), 函数双向 S - 粗集 (function two direction singular rough sets); 函数 S - 粗集具有动态特征 (单向动态, 双向动态). 2005 年作者把函数这一分析工具, 引入到 Z. Pawlak 粗集中, 给出具有静态特性的 R - 函数等价类 $[u]$ 概念, 并对 Z. Pawlak 粗集给出改进, 提出函数粗集 (function singular rough sets), 函数粗集是以具有静态特征的 R - 函数等价类 $[u]$ 定义的. 显然, 在静态 - 动态意义下, 函数粗集是函数 S - 粗集的特例.

函数 S - 粗集, 函数粗集具有了规律 (函数) 特征, 因此, 函数 S - 粗集, 函数粗集成为系统中规律挖掘 - 规律发现研究的一个必备的、重要的数学工具.

从 Z. Pawlak 粗集与 S - 粗集的结构, 函数 S - 粗集的结构, 容易得到这样一个事实: Z. Pawlak 粗集是 S - 粗集的特例, S - 粗集是函数 S - 粗集的特例; 函数 S - 粗集是 S - 粗集的一般形式, S - 粗集是 Z. Pawlak 粗集的一般形式.

本书的取材是作者近几年在国际、国内发表, 待发表的 80 余篇学术论文, 本书的内容从 Z. Pawlak 粗集的简单介绍开始, 逐步给出变异粗集、S - 粗集、变异 S -

粗集、函数 S - 粗集、函数粗集的概念和结构, 给出规律与规律生成、规律分离 - 复原、规律传递、规律遗传 - 进化、规律关系、规律隐藏、规律挖掘 - 规律发现与应用的讨论. 给出这些讨论的存在背景, 启迪读者, 使读者从司空见惯的背景中, 学会找到问题, 分析问题, 研究问题. 在应用讨论中, 给出规律挖掘在系统故障检测 - 识别、投资系统预警分析、经济系统分析、投资系统的利润估计、图像传递、新材料发现、生物医学工程的应用例子, 这些例子具有实际性、启发性.

本书力求通俗, 突出应用与学科渗透、嫁接, 使得更多的读者能够轻松地接收本书给出的讨论, 并把这些讨论应用到相关的实际问题研究中. 将 S - 粗集, 函数 S - 粗集, 函数粗集的代数结构, 函数 S - 粗集生成的规律空间, 规律空间的动态变换, 函数 S - 粗集, S - 粗集的随机特性等一些纯理论讨论的内容都从本书中删除, 这些内容都移到另外的书中做专门讨论. 对于那些正在攻读应用类某些领域的硕士、博士们, 本书的内容给他们提供了直接帮助. 对于那些从事粗集的理论类研究的莘莘学子们, 本书给他们提供了新的视觉空间. 如果本书能帮助那些从事实际工作的人们做些事, 提升莘莘学子们的研究能力, 拓展他们思维空间尺度, 作者将会感到由衷的欣慰.

本书仅是对函数 S - 粗集, 规律挖掘 - 规律发现研究的开始, 对于函数 S - 粗集的更多理论与应用研究尚有很大的空间. 或许不久, 一些新的, 令人高兴的结果将出自年轻一代之手, 出自年轻的实际工作者中间, 作者祈盼着这些结果的问世.

感谢国家自然科学基金委员会、山东省自然科学基金委员会、福建省自然科学基金委员会的支持; 感谢山东大学数学与系统科学学院长、长江学者、教育部教学名师、博士生导师刘建亚教授, 聊城大学数学科学学院院长孟广武教授的支持; 感谢聊城大学赵建立教授的帮助. 感谢我的学生: 薛佩军博士, 徐晓静博士, 裴海峰博士, 何童博士, 李健博士, 刘纪芹博士, 黄顺亮博士, 付海艳博士, 郝秀梅博士; 任雪芳硕士, 蔡成闻硕士, 赵俊恺硕士, 杜英玲硕士, 崔明辉硕士, 他们为本书的出版付出的辛苦劳动. 感谢科学出版社的编辑们为本书出版给予的支持.

本书中的疏漏与错误, 敬请同行专家指正.

史开泉

E-mail: shikq@sdu.edu.cn

2007 年 2 月

目　录

第 1 章　Z. Pawlak 粗集与它的变异结构

§1.1　Z. Pawlak 粗集与它的结构

1982 年波兰数学家 Z. Pawlak 教授提出粗集的概念, 给出粗集的一般数学结构.

设 U 是有限元素论域, X 是 U 上的集合, $X \subset U$, R 是 U 上的元素等价关系, $[x]$ 是 R- 元素等价类; 称 $R_-(X)$ 是 $X \subset U$ 的下近似, 而且

$$\begin{aligned} R_-(X) &= \bigcup [x] \\ &= \{x | x \in U, [x] \subseteq X\}, \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

称 $R^-(X)$ 是 $X \subset U$ 的上近似, 而且

$$\begin{aligned} R^-(X) &= \bigcup [x] \\ &= \{x | x \in U, [x] \bigcap X \neq \phi\}, \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

由 $R_-(X)$, $R^-(X)$ 构成的集合对, 称作集合 $X \subset U$ 的 R- 粗集, 简称粗集 (rough sets); 而且

$$(R_-(X), R^-(X)), \tag{1.1.3}$$

称 $Bn_R(X)$ 是 $X \subset U$ 的 R- 边界, 而且

$$Bn_R(X) = R^-(X) - R_-(X). \tag{1.1.4}$$

下面是一个 Z. Pawlak 粗集的例子.

给定论域 $U = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}$, R 是 U 上的元素等价关系, 元素等价类 E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, 而且

$$\begin{aligned} E_1 &= \{x_0, x_1\}, \\ E_2 &= \{x_2, x_6, x_9\}, \\ E_3 &= \{x_3, x_5\}, \\ E_4 &= \{x_4, x_8\}, \\ E_5 &= \{x_7, x_{10}\}. \end{aligned} \tag{1.1.5}$$

取 U 上的集合 $X=\{x_0,x_3,x_4,x_5,x_8,x_{10}\}\subset U$, 则有 X 的下近似 $R_-(X)$, X 的上近似 $R^-(X)$, 而且

$$\begin{aligned}R_-(X)&=\bigcup[x]\\&=\{x|x\in U,[x]\subseteq X\}\\&=E_3\bigcup E_4\\&=\{x_3,x_4,x_5,x_8\}.\end{aligned}\tag{1.1.6}$$

$$\begin{aligned}R^-(X)&=\bigcup[x]\\&=\{x|x\in U,[x]\bigcap X\neq\phi\}\\&=E_1\bigcup E_3\bigcup E_4\bigcup E_5\\&=\{x_0,x_1,x_3,x_4,x_5,x_7,x_8,x_{10}\}.\end{aligned}\tag{1.1.7}$$

$X\subset U$ 的粗集是

$$(R_-(X),R^-(X))=\{\{x_3,x_4,x_5,x_8\},\{x_0,x_1,x_3,x_4,x_5,x_7,x_8,x_{10}\}\}.$$

$X\subset U$ 的 $R-$ 边界

$$Bn_R(X)=R^-(X)-R_-(X)=\{x_0,x_1,x_7,x_{10}\}.\tag{1.1.8}$$

Z. Pawlak 粗集中蕴含着下面的事实:

1° 元素等价类 $[x]$ 上的元素不可分辨, 或者

$$\mathrm{IND}([x]=\{x_1,x_2,\cdots,x_p\}).$$

2° $X\subset U$ 的下近似 $R_-(X)$, 上近似 $R^-(X)$ 都是普通集 (经典集), 不具有模糊性; 换句话说, 近似性不等于模糊性. $R_-(X)$, $R^-(X)$ 具有普通集的特征函数, 图 1.1 给出 $X\subset U$ 的下近似 $R_-(X)$ 的特征函数图像.

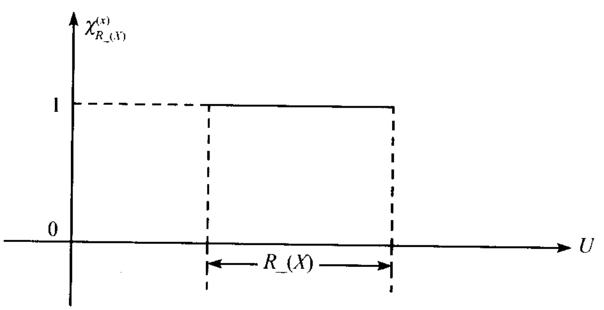


图 1.1　集合 $X\subset U$ 的下近似 $R_-(X)$ 的特征函数 $\chi^{(x)}_{R_-(X)}$; $x\in R_-(X)$, $\chi^{(x)}_{R_-(X)}=1$; $x\overline{\in}R_-(X)$, $\chi^{(x)}_{R_-(X)}=0$

3° 给定元素论域 U, 一定存在属性论域 V; 或者, 元素论域 U 与属性论域 V 共存. 元素论域 U 上的元素集合 $X \subset U$, 一定对应着属性论域 V 上的属性集合 $\alpha \subset V$; 或者, 元素集合 $X \subset U$ 与属性集合 $\alpha \subset V$ 共存.

Z. Pawlak 粗集 $(R_-(X), R^-(X))$ 的直观表示, 如图 1.2.

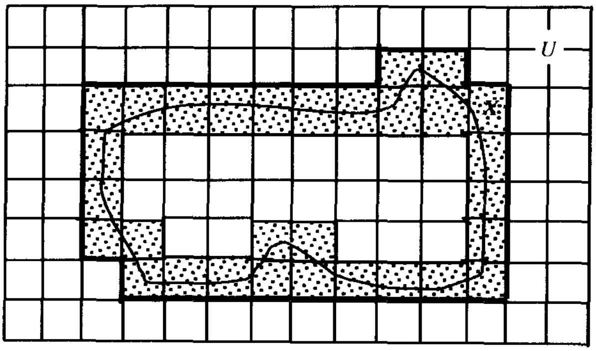


图 1.2 集合 $X \subset U$ 的 R- 粗集直观表示, 图中阴影内的白色方块构成 $X \subset U$ 的下近似 $R_-(X)$, $Bn_R(X) = R^-(X) - R_-(X)$ 是 $X \subset U$ 的 R- 边界

Z. Pawlak 粗集已被应用到下列研究领域: 数据挖掘, 知识发现, 决策简化, 系统分析, 系统状态识别等, 并取得了许多令人兴奋的成果. Z. Pawlak 教授的这一杰出的学术成就被人们接受与认可.

Z. Pawlak 粗集的理论与应用, 读者可阅读论文 [1~20] , 著作 [21~24]; Z. Pawlak 粗集在本书中不做过多的介绍.

§1.2 变异粗集与它的结构

§1.1 中指出: 元素论域 U 与属性论域 V 对应; 元素集合 $X \subset U$ 与属性集合 $\alpha \subset V$ 对应. 利用 Z. Pawlak 粗集, 本节讨论 Z. Pawlak 生成的变异粗集, 简称变异粗集. 变异粗集是依赖下面的背景而存在的.

在数据挖掘中, 被挖掘的数据十分庞大而且结构又非常复杂, 挖掘这样的数据非常困难. 这个庞大的数据 (数据集合) 对应的属性集却十分简单. 我们能否采用一个变通的方法, 不去挖掘这个庞大的数据而去挖掘这个庞大的数据对应的属性数据? 属性数据找到了, 庞大数据也就找到了. 一个例子: 要到一座大楼里去认识一个人, 找到这个人并认识这个人却十分困难, 一个简单的方法是去认识这个人的

照片, 或者认识某人的照片 = 认识某人. 一个例子: $\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\}=X$ 是筐子里具有属性 $\alpha_1=$ 红色, $\alpha_2=$ 产地山东的苹果; 反之, 以属性集 $\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2\}$ 能在筐中挑出满足 α_1,α_2 的苹果 $x_1\sim x_8$. 显然, 在 U 中寻找元素数据 $\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\}$ 与在 V 中寻找属性数据 $\{\alpha_1,\alpha_2\}$ 是等价的.

约定: V 是属性论域, γ 是属性等价关系, $[\alpha]$ 是属性等价类.

定义 1.2.1 给定属性集 $\beta\subset V$, 称 $X_-(\beta)$ 是 $\beta\subset V$ 的下近似, 而且

$$\begin{aligned}X_-(\beta)&=\bigcup[\alpha]\\&=\{\alpha|\alpha\subset V,[\alpha]\subseteq\beta\}.\end{aligned}\tag{1.2.1}$$

定义 1.2.2 给定属性集 $\beta\subset V$, 称 $X^-(\beta)$ 是 $\beta\subset V$ 的上近似, 而且

$$\begin{aligned}X^-(\beta)&=\bigcup[\alpha]\\&=\{\alpha|\alpha\subset V,[\alpha]\bigcap\beta\neq\phi\}.\end{aligned}\tag{1.2.2}$$

定义 1.2.3 由 $X_-(\beta),X^-(\beta)$ 构成的集合对, 称作 $X\subset U$ 的粗集 (Z. Pawlak 粗集)$(R_-(X),R^-(X))$ 的变异粗集, 而且

$$(X_-(\beta),X^-(\beta)).\tag{1.2.3}$$

如果 $\cup[\alpha]$ 是 U 上的 R-元素等价类族 $\cup[x]$ 生成的 V 上的 γ-属性等价类族.

定义 1.2.4 称 $Bnr(\beta)$ 是属性集 $\beta\subset V$ 的 γ-边界, 而且

$$Bnr(\beta)=X^-(\beta)-X_-(\beta).\tag{1.2.4}$$

这里指出: "变异" 一词取自生物学. 为了简化, 又不产生误解, $(X_-(\beta),X^-(\beta))$ 称作 $(R_-(X),R^-(X))$ 的变异, 显然, $(X_-(\beta),X^-(\beta))$ 是 $(R_-(X),R^-(X))$ 变异对偶形式.

容易得到:

定理 1.2.1(下近似变异－对偶定理) 设 V 是属性论域, $\beta\subset V$ 是属性集, $[\alpha]$ 是 γ- 属性等价类; U 是元素论域, $X\subset U$ 是元素集, $[x]$ 是 R- 元素等价类, 则 $X_-(\beta)$ 与 $R_-(X)$ 对偶, 而且

$$X_-(\beta)\rightleftharpoons R_-(X).\tag{1.2.5}$$

定理 1.2.2(上近似变异－对偶定理) 设 V 是属性论域, $\beta\subset V$ 是属性集, $[\alpha]$ 是 γ- 属性等价类; U 是元素论域, $X\subset U$ 是元素集, $[x]$ 是 R- 元素等价类, 则 $X^-(\beta)$ 与 $R^-(X)$ 对偶, 而且

$$X^{-}(\beta) \rightleftharpoons R^{-}(X). \tag{1.2.6}$$

定理 1.2.3(边界变异－对偶定理) 设 V 是属性论域, $\beta \subset V$ 是属性集, $Bnr(\beta)$ 是 $\beta \subset V$ 的 γ- 边界; U 是元素论域, $X \subset U$ 是元素集, $Bn_R(X)$ 是 $X \subset U$ 的 R-边界, 则 $Bnr(\beta)$ 与 $Bn_R(X)$ 对偶, 而且

$$Bnr(\beta) \rightleftharpoons Bn_R(X). \tag{1.2.7}$$

定理 1.2.4(变异粗集与 Z. Pawlak 粗集变异－对偶定理) 设 V 是属性论域, $\beta \subset V$ 是属性集, $[\alpha]$ 是 γ-属性等价类; U 是元素论域, $X \subset U$ 是元素集, $[x]$ 是 R-元素等价类, 则变异粗集 $(X_{-}(\beta), X^{-}(\beta))$ 与 Z. Pawlak 粗集 $(R_{-}(X), R^{-}(X))$ 对偶, 而且

$$(X_{-}(\beta), X^{-}(\beta)) \rightleftharpoons (R_{-}(X), R^{-}(X)). \tag{1.2.8}$$

容易得到:

Z. Pawlak 粗集的变异－对偶原理

$X \subset U$ 的粗集 $(R_{-}(X), R^{-}(X))$ 的存在, 伴随着 $\beta \subset V$ 粗集 $(X_{-}(\beta), X^{-}(\beta))$ 的生成; 它们具有相同结构, 具有不同特性.

元素集的变异－对偶原理

元素论域 U 上的元素集 X 的存在, 伴随着属性论域 V 上的属性集 β 的生成; 论域 V 上的属性集 β 的存在, 伴随着元素论域 U 上的元素集 X 的生成; 它们各自独立存在, 而且 $X \cap \beta = \phi$.

变异粗集 $(X_{-}(\beta), X^{-}(\beta))$ 的直观表示, 如图 1.3.

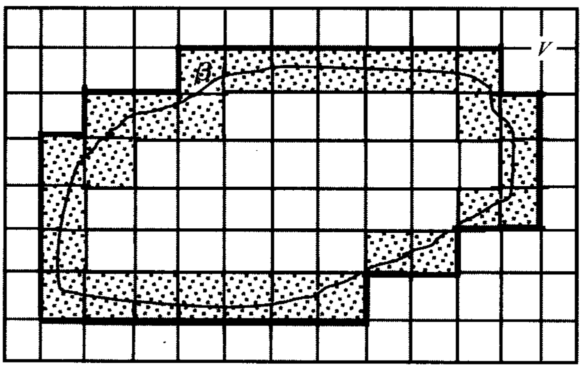


图 1.3 属性集合 $\beta \subset V$ 的 γ- 粗集直观表示, 图中阴影内的白色方块构成 $\beta \subset V$ 的下近似 $X_{-}(\beta)$, $Bnr(\beta) = X^{-}(\beta) - X_{-}(\beta)$ 是 $\beta \subset V$ 的 γ- 边界

§1.3　元素知识依赖与属性知识依赖的对偶特性

定义 1.3.1　设 $[x] \in U$ 是元素知识, 称 $\mathrm{GRD}([x])$ 是 $[x]$ 的粒度, 而且

$$\mathrm{GRD}([x]) = \mathrm{card}([x])/\mathrm{card}(U). \tag{1.3.1}$$

定义 1.3.2　设 $[\alpha] \in V$ 是属性知识, 称 $\mathrm{GRD}([\alpha])$ 是 $[\alpha]$ 的粒度, 而且

$$\mathrm{GRD}([\alpha]) = \mathrm{card}([\alpha])/\mathrm{card}(V). \tag{1.3.2}$$

定义 1.3.3　设 $[x]_i, [x]_j \in U$ 是元素知识, 称 $[x]_j$ 单依赖于 $[x]_i$, 而且

$$[x]_i \Rightarrow [x]_j, \tag{1.3.3}$$

如果

$$\mathrm{GRD}([x]_i) \leqslant \mathrm{GRD}([x]_j). \tag{1.3.4}$$

显然, 若 $\mathrm{GRD}([x]_i) \leqslant \mathrm{GRD}([x]_j)$, 则 $\mathrm{card}(\mathrm{IND}([x]_i)) \leqslant \mathrm{card}(\mathrm{IND}([x]_j))$, $\mathrm{IND}([x]_i) \subseteq \mathrm{IND}([x]_j)$.

这里 “$\Rightarrow$” 取自数理逻辑中的符号.

定义 1.3.4　设 $[x]_i, [x]_j \in U$ 是元素知识, 称 $[x]_j$ 双依赖于 $[x]_i$, 而且

$$[x]_i \Leftrightarrow [x]_j, \tag{1.3.5}$$

如果

$$\mathrm{GRD}([x]_i) = \mathrm{GRD}([x]_j). \tag{1.3.6}$$

显然, 若 $\mathrm{GRD}([x]_i) = \mathrm{GRD}([x]_j)$, 则有 $\mathrm{card}(\mathrm{IND}([x]_i)) = \mathrm{card}(\mathrm{IND}([x]_j))$, $\mathrm{IND}([x]_i) = \mathrm{IND}([x]_j)$.

这里 “$\Leftrightarrow$” 取自数理逻辑中的符号.

定义 1.3.5　设 $[\alpha]_i, [\alpha]_j \in V$ 是属性知识, 称 $[\alpha]_j$ 单依赖于 $[\alpha]_i$, 而且

$$[\alpha]_i \Rightarrow [\alpha]_j, \tag{1.3.7}$$

如果

$$\mathrm{GRD}([\alpha]_i) \leqslant \mathrm{GRD}([\alpha]_j). \tag{1.3.8}$$

定义 1.3.6 设 $[\alpha]_i, [\alpha]_j \in V$ 是属性知识, 称 $[\alpha]_j$ 双依赖于 $[\alpha]_i$, 而且

$$[\alpha]_i \Leftrightarrow [\alpha]_j, \tag{1.3.9}$$

如果

$$\mathrm{GRD}([\alpha]_i) = \mathrm{GRD}([\alpha]_j). \tag{1.3.10}$$

定理 1.3.1(单依赖对偶定理) 若 $[x]_i, [x]_j \in U$, $[\alpha]_i, [\alpha]_j \in V$, 则 $[x]_j$ 单依赖于 $[x]_i$ 与 $[\alpha]_i$ 单依赖于 $[\alpha]_j$ 对偶, 而且

$$[x]_i \Rightarrow [x]_j \rightleftharpoons [\alpha]_j \Rightarrow [\alpha]_i. \tag{1.3.11}$$

这里 $[\alpha]_i$ 是 $[x]_i$ 生成的属性知识.

证明 因为 $[x]_i \Rightarrow [x]_j$, 则有

$$\mathrm{IND}([x]_i) \subseteq \mathrm{IND}([x]_j),$$
$$\mathrm{GRD}([x]_i) \leqslant \mathrm{GRD}([x]_j),$$

因为, $[\alpha]_j \Rightarrow [\alpha]_i$ 则有

$$\mathrm{IND}([\alpha]_j) \subseteq \mathrm{IND}([\alpha]_i),$$
$$\mathrm{GRD}([x]_j) \leqslant \mathrm{GRD}([x]_i),$$
$$\mathrm{GRD}([x]_i) \leqslant \mathrm{GRD}([x]_j) \rightleftharpoons \mathrm{GRD}([x]_j) \leqslant \mathrm{GRD}([x]_i)$$

或者 $$[x]_i \Rightarrow [x]_j \rightleftharpoons [\alpha]_j \Rightarrow [\alpha]_i.$$

由定理 1.3.1 直接得到:

定理 1.3.2 (双依赖对偶定理) 若 $[x]_i, [x]_j \in U$, $[\alpha]_i, [\alpha]_j \in V$, 则 $[x]_j$ 双依赖于 $[x]_i$ 与 $[\alpha]_j$ 双依赖于 $[\alpha]_i$ 对偶, 而且

$$[x]_i \Leftrightarrow [x]_j \rightleftharpoons [\alpha]_i \Leftrightarrow [\alpha]_j. \tag{1.3.12}$$

定理 1.3.3 (扩张单依赖对偶定理) 若 $[x]_i, [x]_j \in U$, $[\alpha]_i, [\alpha]_j \in V$ 分别满足

$$[x]_i \Rightarrow [x]_j,$$
$$[\alpha]_j \Rightarrow [\alpha]_i, \tag{1.3.13}$$

则 $[\alpha]_i$ 单依赖于 $[\alpha]_j \cup [\alpha]_i$ 与 $[x]_j$ 单依赖于 $[x]_i \cup [x]_j$ 对偶, 而且

$$[x]_i \bigcup [x]_j \Rightarrow [x]_j \rightleftharpoons [\alpha]_j \bigcup [\alpha]_i \Rightarrow [\alpha]_i. \tag{1.3.14}$$

事实上, 由 (1.3.13), $[x]_i \Rightarrow [x]_j$, $\mathrm{IND}([x]_i) \subseteq \mathrm{IND}([x]_j)$, $\mathrm{IND}([x]_i \bigcup [x]_j) \subseteq \mathrm{IND}([x]_j \bigcup [x]_j) = \mathrm{IND}([x]_j)$, 或者 $[x]_i \bigcup [x]_j \Rightarrow [x]_j$. 同理, 由 (1.3.13), $[\alpha]_j \Rightarrow [\alpha]_i$, 则 $\mathrm{IND}([\alpha]_j \bigcup [\alpha]_i) \subseteq \mathrm{IND}([\alpha]_i \bigcup [\alpha]_i) = \mathrm{IND}([\alpha]_i)$. 显然, 存在 $[x]_i \bigcup [x]_j \Rightarrow [x]_j$ 的对偶形式: $[\alpha]_j \bigcup [\alpha]_i \Rightarrow [\alpha]_i$, 或者

$$[x]_i \bigcup [x]_j \Rightarrow [x]_j \rightleftharpoons [\alpha]_j \bigcup [\alpha]_i \Rightarrow [\alpha]_i.$$

由定理 1.3.3 直接得到:

定理 1.3.4 (单依赖传递对偶定理)　若 $[x]_i, [x]_j, [x]_k \in U$, $[\alpha]_i, [\alpha]_j, [\alpha]_k \in V$ 分别满足

$$\begin{aligned} &[x]_i \Rightarrow [x]_j, [x]_j \Rightarrow [x]_k, \\ &[\alpha]_k \Rightarrow [\alpha]_j, [\alpha]_j \Rightarrow [\alpha]_i, \end{aligned} \tag{1.3.15}$$

则 $[\alpha]_i$ 单依赖于 $[\alpha]_k$ 与 $[x]_k$ 单依赖于 $[x]_i$ 对偶, 而且

$$[x]_i \Rightarrow [x]_k \rightleftharpoons [\alpha]_k \Rightarrow [\alpha]_i. \tag{1.3.16}$$

这里: $[\alpha]_i$ 是 $[x]_i$ 生成的属性知识.

定理 1.3.5 (单依赖传递-扩张依赖对偶定理)　若 $[x]_i, [x]_j, [x]_k \in U$, $[\alpha]_i, [\alpha]_j, [\alpha]_k \in V$ 分别满足

$$\begin{aligned} &[x]_i \Rightarrow [x]_j, [x]_j \Rightarrow [x]_k, \\ &[\alpha]_k \Rightarrow [\alpha]_j, [\alpha]_j \Rightarrow [\alpha]_i, \end{aligned} \tag{1.3.17}$$

则 $[\alpha]_i$ 单依赖于 $[\alpha]_k \cup [\alpha]_j$ 与 $[x]_k$ 单依赖于 $[x]_i \cup [x]_j$ 对偶, 而且

$$[x]_i \cup [x]_j \Rightarrow [x]_k \rightleftharpoons [\alpha]_k \cup [\alpha]_j \Rightarrow [\alpha]_i. \tag{1.3.18}$$

证明　由 (1.3.17), $[x]_i \Rightarrow [x]_j$, $[x]_j \Rightarrow [x]_k$, $\mathrm{IND}([x]_i) \subseteq \mathrm{IND}([x]_j)$, $\mathrm{IND}([x]_j) \subseteq \mathrm{IND}([x]_k)$ 或者 $\mathrm{IND}([x]_i \bigcup [x]_j) \subseteq \mathrm{IND}([x]_j \bigcup [x]_k)$, 则有 $\mathrm{IND}([x]_i \bigcup [x]_j) \subseteq \mathrm{IND}([x]_k)$. 显然有 $[x]_i \bigcup [x]_j \Rightarrow [x]_k$. 同理, 由 (1.3.17), $[\alpha]_k \Rightarrow [\alpha]_j$,$[\alpha]_j \Rightarrow [\alpha]_i$, 则 $\mathrm{IND}([\alpha]_k) \subseteq \mathrm{IND}([\alpha]_j)$, $\mathrm{IND}([\alpha]_j) \subseteq \mathrm{IND}([\alpha]_i)$, 或者 $\mathrm{IND}([\alpha]_k \bigcup [\alpha]_j) \subseteq \mathrm{IND}([\alpha]_j \bigcup [\alpha]_i)$, 则有 $\mathrm{IND}([\alpha]_k \cup [\alpha]_j) \subseteq \mathrm{IND}([\alpha]_i)$. 显然, 存在 $[x]_i \bigcup [x]_j \Rightarrow [x]_k$ 的对偶形式: $[\alpha]_k \cup [\alpha]_j \Rightarrow [\alpha]_i$, 或者

$$[x]_i \cup [x]_j \Rightarrow [x]_k \rightleftharpoons [\alpha]_k \cup [\alpha]_j \Rightarrow [\alpha]_i.$$