普通高等教育"十一五"规划教材

高等数学（上）

刘春凤 主编

科学出版社
www.sciencep.com

普通高等教育“十一五”规划教材

高等数学

（上）

刘春风　主　编
米翠兰　马醒花　副主编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书遵循教育部高等院校非数学类专业数学基础教学指导分委会修订的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，传承高等数学的结构体系，体现新形势下教材改革的精神，面向普通高校人才培养的需要，集作者多年教学实践的经验编写而成。本套书分上、下两册，上册内容为一元函数微积分和空间解析几何与向量代数（共七章），下册内容为多元函数微积分、级数和常微分方程（共五章）。书末附有习题参考答案。

本书可作为高等院校工学、经济学等专业的教材，也可作为相关教师、工程技术人员用书和参考书。

图书在版编目(CIP) 数据

高等数学. 上/刘春凤主编. —北京：科学出版社，2007

（普通高等教育“十一五”规划教材）

ISBN 978-7-03-019507-4

Ⅰ. 高… Ⅱ. 刘… Ⅲ. 高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 117608 号

责任编辑：韩　洁/责任校对：赵　燕

责任印制：吕春珉/封面设计：耕者设计工作室

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2007 年 8 月第 一 版　开本：787×1092　1/16

2007 年 8 月第一次印刷　印张：21 1/4

印数：1- 6 500　字数：486 000

定价：28.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换<路通>）

销售部电话 010-62136131　编辑部电话 010-62138978-8203

编 委 会

前言

高等数学是工科院校最重要的基础课程之一，它不仅为后续课程和科技工作提供必备的数学工具，而且对学生科学素质的形成和分析解决问题能力的提高均有着重要而深远的影响。进入21世纪，随着我国高等教育的教育理念由过去的“精英教育”转向了“大众化”教育，教学内容和课程体系的改革在全国深入开展，面向重点大学的具有新思路且含有"数学实验"的新教材陆续出现，对教学改革起到了推动和引领作用。但是，对于普通院校，由于缺乏适合自身的新教材，相当一部分普通院校在选用教材时和重点大学保持一致。然而，培养目标及学生的差异使普通院校呈现传授与接受的“脱节”，教师教的辛苦，学生学的艰难，教学效果事倍功半。

本套书遵循教育部高等学校非数学类专业数学基础教学指导分委员会修订的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，立足普通高等院校人才培养的需要，集作者多年教学实践的经验编写而成。突出的特点是：理性、简约、实用。

首先，该教材传承高等数学知识结构，注重培养学生创新思维，适度融入最新的教改成果，结构严谨、逻辑清晰、符合认知规律。其次，教材考虑普通工科院校学生对数学的需求，本着“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则，在引入概念之初，注意化抽象为自然，引导学生品味数学源于现实、高于现实的境界；在推导命题之中，注意化冗余为直观，对部分繁琐的推导进行了适度约简，通过几何直观，解释数学命题抽象和深刻的内涵；在阐述方法之时，注意化收敛为发散，由浅入深，启发联想，引导探究，力求使读者融会贯通。

最后，教材介绍了Mathematica软件在高等数学中的应用，并适度嵌入了与“高等数学”密切相关的数学实验课题，学生通过使用Mathematica软件进行各种运算、绘制图形和完成实验课题，能够体验该软件的强大功能，大大拓宽了高等数学的应用范围，过去学生由于计算技术的局限只能"望洋兴叹"的问题，如今可以通过数学实验轻松解决。总之，教材期望在加强应用能力培养、提高综合分析能力和创新能力方面为学生奠定良好的数学基础。

刘春凤任主编，米翠兰、马醒花任副主编，刘春凤编写了第1、2、4、5、7、10、11章和全书的数学实验，米翠兰编写了第3、8、12章，马醒花编写了第6、9章，阎少宏、纪楠编写了第1～6章的习题，杨爱民、彭亚绵编写了第7～12章的习题，全书最后由主编和副主编修改定稿。

在编写过程中，得到了科学出版社的鼎力支持和帮助，得到了河北理工大学领导的关心和指导，北京航空航天大学的李心灿教授为本书的编写提出了很好的意见和建议，在此一并表示衷心的感谢。

由于我们水平有限，书中谬误之处难免，请使用本书的老师、学生和读者们不吝指教。

目　　录

第 1 章　函　　数

1.1　预 备 知 识

1.1.1　常见的实数集与记号

1. 自然数集

$$N=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}\qquad(\text{注意近两年规定：}0\in N)$$

2. 整数集

$$Z=\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots,\pm n,\cdots\}$$

其中偶数集：$\{x\,|\,x=2n,n\in Z\}$，奇数集：$\{x\,|\,x=2n-1,n\in Z\}$。

3. 有理数集

$$Q=\{\text{有理数}\}$$

其中：$Q_{+}=\{$正有理数$\}$，$Q_{-}=\{$负有理数$\}$。

4. 无理数集

$$W=\{\text{无理数}\}$$

5. 实数集

$$R=(-\infty,\infty)$$

其中，$R_{+}=(0,\infty)$，$R_{-}=(-\infty,0)$。

6. 二维平面

$$R^2=(-\infty,\infty)\times(-\infty,\infty)=\{(x,y)\,|\,x\in(-\infty,\infty),y\in(-\infty,\infty)\}$$

7. 三维空间

$$\begin{aligned}R^3&=(-\infty,\infty)\times(-\infty,\infty)\times(-\infty,\infty)\\&=\{(x,y,z)\,|\,x\in(-\infty,\infty),y\in(-\infty,\infty),z\in(-\infty,\infty)\}\end{aligned}$$

推而广之，我们将 n 元有序数组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的全体称为 n 维空间，记为 R^n，即

$$R^n=R\times R\times\cdots\times R=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,|\,x_k\in R,k=1,2,\cdots,n\}$$

R^n 中的元素$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$记为 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$。

n 维空间中的每一个元素$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$称为空间中的一个点或一个 n 维向量，数 x_k 称为该点的第 k 个坐标。特别地，当所有 $x_k=0(k=1,2,\cdots,n)$时，称这样的元素为 R^n 中的零元，记为 $\mathbf{0}$ 或 0。

n 维空间 R^n 中两点 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 之间的距离定义为

$$\rho(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$$

特别地，点 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和零元之间的距离为

$$\|x\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$$

1.1.2 实数的绝对值

1. 绝对值的定义

$$|a|=\begin{cases}a & a\geqslant 0\\ -a & a<0\end{cases}$$

2. 绝对值的几何意义

$|a|$ 表示数轴上点 a 与原点之间的距离，如图 1.1 所示。

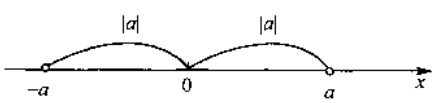


图 1.1

3. 绝对值的性质

(1) $|a|\geqslant 0$

(2) $|a|=\sqrt{a^2}$

(3) $|a|=|-a|$

(4) $-|a|\leqslant a\leqslant |a|$

4. 绝对值的运算性质

(1) $|a+b|\leqslant |a|+|b|$

(2) $|a|-|b|\leqslant |a-b|$

(3) $|ab|=|a||b|$

(4) $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}\quad(|b|\neq 0)$

(5) $|x|<\varepsilon\Leftrightarrow-\varepsilon<x<\varepsilon$，$|x-a|<\varepsilon\Leftrightarrow a-\varepsilon<x<a+\varepsilon$

(6) $|x|>\varepsilon\Leftrightarrow x<-\varepsilon$ 或 $x>\varepsilon$

1.1.3 邻域

邻域是高等数学中一个常用的概念，下面分类讨论之。

1. 直线上的点邻域

定义 1.1 设 $x_0\in R$，R 上所有与 x_0 的距离小于 $\delta>0$ 的点集，称为 x_0 的 δ 邻域，记作 $U(x_0,\delta)$。由定义可见，x_0 的 δ 邻域就是以 x_0 为中心，以 δ 为半径的开区间，即

$$\begin{aligned}U(x_0,\delta)&=\{x\,|\,|x-x_0|<\delta\}\\&=(x_0-\delta,x_0+\delta)\end{aligned}$$

如图 1.2 所示。

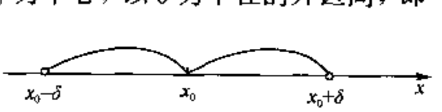


图 1.2

特别地，不包含中心点的邻域称为去心邻

域，记作

$$\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x\,|\,0<|x-x_0|<\delta\}$$

邻域的左半部和右半部分别称为左邻域和右邻域，记作

$$左邻域：U^-(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0)$$

$$右邻域：U^+(x_0,\delta)=(x_0,x_0+\delta)$$

2. 平面上的点邻域

设 $P(x_0,y_0)\in R^2$，R^2 上所有与 $P(x_0,y_0)$ 的距离小于 $\delta>0$ 的点集，称为 $P(x_0,y_0)$ 的 δ 邻域，记作 $U(P,\delta)$。$U(P,\delta)$ 的几何意义是：以 $P(x_0,y_0)$ 为中心，以 δ 为半径的开圆域，如图 1.3 所示。

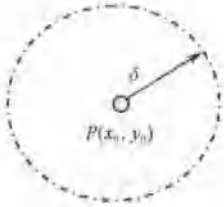


图 1.3

3. 平面上的直线的邻域

设 $y=A\in R^2$，R^2 上所有与 $y=A$ 的距离小于 $\varepsilon>0$ 的点集，称为 $y=A$ 的 ε-邻域，记作 $U(A,\varepsilon)$。$U(A,\varepsilon)$ 的几何意义是：以 $y=A$ 为中心，以 ε 为半径的带形区域，如图 1.4 所示。

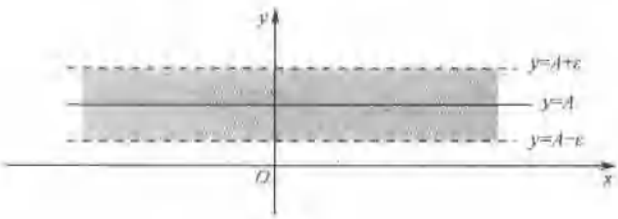


图 1.4

4. 空间的邻域

三维空间的点邻域是以 $P(x_0,y_0,z_0)$ 为中心，以 δ 为半径的开球，即

$$U(P_0,\delta)=\{(x,y,z)\,|\,\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}<\delta\}$$

注：请读者想一想，三维空间的线邻域应当如何定义？其几何意义是什么？

1.1.4 充分必要条件

一个数学命题，由条件和结论两部分组成，通常我们用 A 表示条件，B 表示结论。

1. 充分和必要条件

如果命题为“若 A 则 B”，那么称 A 为 B 的充分条件，B 为 A 的必要条件，记作 $A\Rightarrow B$。

2. 充要条件

如果命题“若 A 则 B”与“若 B 则 A”同时成立，那么称 A 与 B 互为充分必要条件，简称充要条件，记作 $A\Leftrightarrow B$。

1.1.5　常用三角公式

在高等数学的学习过程中，会用到一些初等三角函数公式，为使用方便，我们把常用的三角公式列举如下。

1. 两角和差公式

$$\sin(x \pm y) = \sin x\cos y \pm \cos x\sin y$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x\cos y \mp \sin x\sin y$$
$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x\tan y}$$

2. 倍角公式

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

3. 降幂公式

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$
$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

4. 积化和差公式

$$\sin x\sin y = -\frac{1}{2}[\cos(x + y) - \cos(x - y)]$$
$$\cos x\cos y = \frac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)]$$
$$\sin x\cos y = \frac{1}{2}[\sin(x + y) + \sin(x - y)]$$
$$\cos x\sin y = \frac{1}{2}[\sin(x + y) - \sin(x - y)]$$

1.1.6　极坐标

1. 极坐标系

平面直角坐标系是最简单又常用的一种坐标系，但不是唯一的坐标系。下面介绍一种利用角和距离建立的坐标系——极坐标系。

在平面内取一个定点 O，叫做极点，引一条射线 Ox，叫做极轴，再选定一个长度单位和角度的正方向(取逆时针方向)。对于平面内任意一点 P，用 r 表示线段 OP 的长度，θ 表示从 Ox 到 OP 的角度，r 称为点 P 的极径(恒取正值)，θ 称为点 P 的极角，有序数对 (r,θ) 称为 P 点的**极坐**

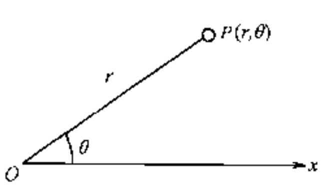


图 1.5

标，这样建立的坐标系称为极坐标系，如图 1.5 所示。

当点 P 在极点时，它的极径 $r=0$，极角 θ 可以取任意值。

例如，如图 1.6 所示，在下面的极坐标系中，点 A、B、C、D、E、F、G 的坐标分别为

$A(3,0)$　　$B\left(2,\frac{\pi}{4}\right)$

$C\left(4,\frac{\pi}{2}\right)$　　$D\left(1,\frac{3\pi}{4}\right)$

$E(5,\pi)$　　$F\left(4,\frac{5\pi}{4}\right)$

$G\left(5,\frac{7\pi}{4}\right)$

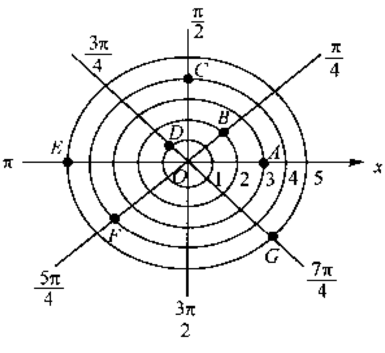


图 1.6

注：(1) 在极坐标系中，角度也可以取负值(顺时针方向为负)，例如，B、D、G 的坐标也可以写成$B\left(2,-\frac{7\pi}{4}\right)$，$D\left(2,-\frac{5\pi}{4}\right)$，$G\left(5,-\frac{\pi}{4}\right)$。

(2) 极坐标系与直角坐标系不同的是，给定 r 和 θ，可以确定一个点 P，但是给定一个点 P，可以对应的极坐标有无数种表示方法。这是因为(r,θ)和$(r,\theta-2k\pi)$是同一点的极坐标。为确定起见，我们规定：$0<r<+\infty$，$0\leqslant\theta<2\pi$(或$-\pi<\theta\leqslant\pi$)，那么除极点外，平面内的点和极坐标就可以一一对应了。

2. 极坐标与直角坐标的互化

在平面上，同一个点可以有直角坐标，也可以有极坐标；同一条曲线可以有直角坐标方程，也可以有极坐标方程。研究问题时，有时需要把在一种坐标系中的方程转化成另一种坐标系的方程，所以掌握极坐标与直角坐标的关系是必要的。

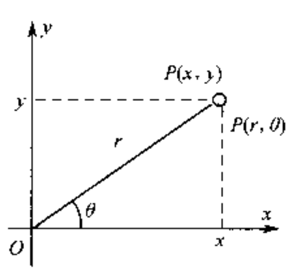


图 1.7

在平面上，让直角坐标系的原点 O 与极坐标系的极点重合，选直角坐标系的 Ox 轴的正半轴作为极轴，并在两种坐标系的坐标轴上取相同的长度单位。设 P 为平面上任意一点，它的直角坐标为(x,y)，极坐标为(r,θ)，由图 1.7 不难看出两种坐标系的结构以及两种坐标的关系。

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$0\leqslant r<+\infty$$

$$0\leqslant\theta<2\pi$$

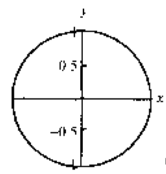
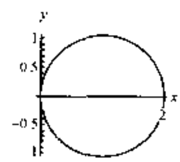
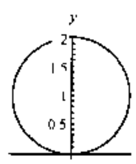
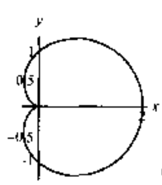
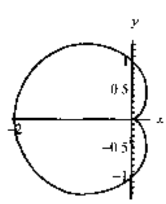
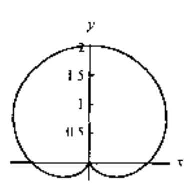
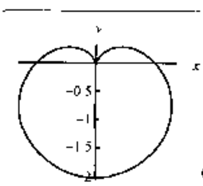
$$x^2+y^2=r^2$$

$$\tan\theta=\frac{y}{x}$$

$$\theta=\arctan\frac{y}{x}$$

为了读者使用方便，我们把常用的平面曲线的直角坐标方程和极坐标方程列成表，如表 1.1 所示。

表 1.1

曲线名称	图　形	直角坐标方程	极坐标方程
圆	 $(a=2)$	$x^2+y^2=a^2$	$r=a$
	 $(a=1)$	$x^2+y^2=2ax$	$r=2a\cos\theta$
	 $(a=1)$	$x^2+y^2=2ay$	$r=2a\sin\theta$
心形线	 $(a=1)$	$x^2+y^2=a(x+\sqrt{x^2+y^2})$	$r=a(1+\cos\theta)$
	 $(a=1)$	$x^2+y^2=a(-x+\sqrt{x^2+y^2})$	$r=a(1-\cos\theta)$
	 $(a=1)$	$x^2+y^2=a(y+\sqrt{x^2+y^2})$	$r=a(1+\sin\theta)$
	 $(a=1)$	$x^2+y^2=a(-y+\sqrt{x^2+y^2})$	$r=a(1-\sin\theta)$