



普通高等教育“十一五”规划教材

高等数学 (上)

刘春凤 主 编

 科学出版社
www.sciencep.com

013/435

:1

2007

普通高等教育“十一五”规划教材

高等数学

(上)

刘春风 主 编

米翠兰 马醒花 副主编

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书遵循教育部高等院校非数学类专业数学基础教学指导分委会修订的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，传承高等数学的结构体系，体现新形势下教材改革的精神，面向普通高校人才培养的需要，集作者多年教学实践的经验编写而成。本套书分上、下两册，上册内容为一元函数微积分和空间解析几何与向量代数（共七章），下册内容为多元函数微积分、级数和常微分方程（共五章）。书末附有习题参考答案。

本书可作为高等院校工学、经济学等专业的教材，也可作为相关教师、工程技术人员用书和参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上/刘春风主编. —北京: 科学出版社, 2007

(普通高等教育“十一·五”规划教材)

ISBN 978-7-03-019507-4

I. 高… II. 刘… III. 高等数学-高等学校-教材 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 117608 号

责任编辑: 韩 洁/责任校对: 赵 燕

责任印制: 吕春珉/封面设计: 耕者设计工作室

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

新 蕾 印 刷 厂 印 刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2007 年 8 月 第 一 版 开本: 787×1092 1/16

2007 年 8 月 第一次印刷 印张: 21 1/4

印数: 1-6 500 字数: 486 000

定价: 28.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换<路通>)

销售部门电话 010-62136131 编辑部电话 010-62138978-8203

编 委 会

主 任 刘保相

副主任 金殿川

编 委 刘春风 万星火 肖继先 张春英
徐秀娟 魏明军 阎红灿 李丽红

前言

高等数学是工科院校最重要的基础课程之一，它不仅为后续课程和科技工作提供必备的数学工具，而且对学生科学素质的形成和分析解决问题能力的提高均有着重要而深远的影响。进入 21 世纪，随着我国高等教育的教育理念由过去的“精英教育”转向了“大众化”教育，教学内容和课程体系的改革在全国深入开展，面向重点大学的具有新思路且含有“数学实验”的新教材陆续出现，对教学改革起到了推动和引领作用。但是，对于普通院校，由于缺乏适合自身的新教材，相当一部分普通院校在选用教材时和重点大学保持一致。然而，培养目标及学生的差异使普通院校呈现传授与接受的“脱节”，教师教的辛苦，学生学的艰难，教学效果事倍功半。

本书遵循教育部高等学校非数学类专业数学基础教学指导分委员会修订的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，立足普通高等院校人才培养的需要，集作者多年教学实践的经验编写而成。突出的特点是：理性、简约、实用。

首先，该教材传承高等数学知识结构，注重培养学生创新思维，适度融入最新的教学改革成果，结构严谨、逻辑清晰、符合认知规律。其次，教材考虑普通工科院校学生对数学的需求，本着“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则，在引入概念之初，注意化抽象为自然，引导学生品味数学源于现实、高于现实的境界；在推导命题之中，注意化冗余为直观，对部分繁琐的推导进行了适度约简，通过几何直观，解释数学命题抽象和深刻的内涵；在阐述方法之时，注意化收敛为发散，由浅入深，启发联想，引导探究，力求使读者融会贯通。

最后，教材介绍了 Mathematica 软件在高等数学中的应用，并适度嵌入了与“高等数学”密切相关的数学实验课题，学生通过使用 Mathematica 软件进行各种运算、绘制图形和完成实验课题，能够体验该软件的强大功能，大大拓宽了高等数学的应用范围，过去学生由于计算技术的局限只能“望洋兴叹”的问题，如今可以通过数学实验轻松解决。总之，教材期望在加强应用能力培养、提高综合分析能力和创新能力方面为学生奠定良好的数学基础。

刘春风任主编，米翠兰、马醒花任副主编，刘春风编写了第 1、2、4、5、7、10、11 章和全书的数学实验，米翠兰编写了第 3、8、12 章，马醒花编写了第 6、9 章，阎少宏、纪楠编写了第 1~6 章的习题，杨爱民、彭亚绵编写了第 7~12 章的习题，全书最后由主编和副主编修改定稿。

在编写过程中，得到了科学出版社的鼎力支持和帮助，得到了河北理工大学领导的关心和指导，北京航空航天大学的李心灿教授为本书的编写提出了很好的意见和建议，在此一并表示衷心的感谢。

由于我们水平有限，书中谬误之处难免，请使用本书的老师、学生和读者们不吝指教。

目 录

第 1 章 函数	1
1.1 预备知识	1
1.1.1 常见的实数集与记号	1
1.1.2 实数的绝对值	2
1.1.3 邻域	2
1.1.4 充分必要条件	3
1.1.5 常用三角公式	4
1.1.6 极坐标	4
1.2 函数	7
1.3 具有某种特性的函数	12
1.3.1 奇(偶)函数	12
1.3.2 有界函数	13
1.3.3 单调函数	13
1.3.4 周期函数	14
1.4 反函数	14
1.5 复合函数初等函数	15
1.5.1 基本初等函数	15
1.5.2 复合函数	20
习题	21
第 2 章 极限与连续	23
2.1 数列极限	23
2.1.1 数列的概念	23
2.1.2 有界数列的定义	24
2.1.3 数列有界的几何意义	24
2.1.4 数列单调的定义	24
2.1.5 数列极限的直观描述	24
2.1.6 数列极限的精确刻画	26
2.1.7 数列极限的几何意义	28
2.1.8 数列极限的性质	28
习题 2.1	29
2.2 函数极限	29
2.2.1 自变量 x 趋于无穷大时函数极限的直观描述	31
2.2.2 自变量 x 趋于有限数时函数极限的直观描述	31
2.2.3 单侧极限	32
2.2.4 自变量 x 趋于无穷大时极限的精确刻画 (ε - X 语言)	33
2.2.5 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 的几何意义	34

2.2.6 自变量趋于有限数时函数极限的精确刻画 (ε - δ 语言)	34
2.2.7 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的几何意义	35
习题 2.2	36
2.3 有极限的函数的性质和函数极限的运算法则	37
2.3.1 函数极限的性质	37
2.3.2 极限的运算法则	37
2.3.3 复合函数的极限运算法则	41
习题 2.3	41
2.4 极限的存在准则和两个重要极限	42
2.4.1 极限的存在准则	42
2.4.2 重要极限之一	45
2.4.3 重要极限之二	47
习题 2.4	51
2.5 无穷小与无穷大	52
2.5.1 无穷大的概念	52
2.5.2 无穷小的概念	53
2.5.3 收敛变量与其极限的关系	53
2.5.4 无穷小与无穷大的关系	54
2.5.5 无穷小的性质	54
2.5.6 无穷小阶的比较	56
习题 2.5	59
2.6 函数的连续性	60
2.6.1 函数在一点处的连续性	60
2.6.2 单侧连续	61
2.6.3 区间连续	61
2.6.4 函数的间断点及其类型	62
2.6.5 初等函数的连续性	64
习题 2.6	66
2.7 闭区间上连续函数的性质	67
习题 2.7	69
数学实验一	69
第 3 章 导数与微分	74
3.1 导数概念	74
3.1.1 导数概念的引入	74
3.1.2 导数的定义	75
3.1.3 单侧导数	78
3.1.4 导数的几何意义	81
3.1.5 函数可导与连续的关系	82
习题 3.1	84
3.2 求导法则	85
3.2.1 四则运算法则	85
3.2.2 反函数的求导法则	87

3.2.3 复合函数的求导法则	89
3.2.4 隐函数求导法	92
3.2.5 由参数方程表示函数的导数	95
习题 3.2	96
3.3 高阶导数	98
3.3.1 高阶导数的概念	98
3.3.2 高阶导数的运算法则	101
习题 3.3	104
3.4 函数的微分	105
3.4.1 微分的定义	106
3.4.2 微分的几何意义	107
3.4.3 基本初等函数的微分公式	108
3.4.4 函数和、差、积、商的微分法则	108
3.4.5 微分形式的不变性	109
3.4.6 微分在近似计算中的应用	110
习题 3.4	111
数学实验二	112
第 4 章 中值定理与导数的应用	115
4.1 中值定理	115
4.1.1 罗尔定理	115
4.1.2 拉格朗日中值定理	117
4.1.3 柯西定理	119
习题 4.1	120
4.2 洛必达法则	121
4.2.1 洛必达法则 I ($\frac{0}{0}$ 型不定式)	122
4.2.2 洛必达法则 II ($\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式)	123
4.2.3 其他不定式 ($0 \cdot \infty, \infty_1 - \infty_2, 1^\infty, 0^0, \infty^0$)	124
习题 4.2	127
4.3 函数单调性和凹凸性	128
4.3.1 函数单调性的判定法	128
4.3.2 确定函数单调区间的步骤	129
4.3.3 曲线的凹凸性及其判别法	130
4.3.4 确定函数凹凸区间的步骤	132
习题 4.3	133
4.4 函数的极值与最值	134
4.4.1 函数的极值及其判别条件	134
4.4.2 求函数 $f(x)$ 的极值的步骤	135
4.4.3 闭区间上连续函数最值的求法	138
4.4.4 最值问题举例	138
习题 4.4	140
4.5 不等式的证明	141

4.5.1 利用单调性证明不等式	141
4.5.2 利用微分中值定理证明不等式	142
4.5.3 利用函数的凹凸性证明不等式	142
4.5.4 利用函数的极值和最值证明不等式	143
习题 4.5	144
4.6 函数图形的描绘	144
4.6.1 曲线的渐近线	145
4.6.2 函数作图的步骤	146
习题 4.6	147
数学实验三	147
第 5 章 不定积分	150
5.1 不定积分的概念与性质	150
5.1.1 原函数与不定积分的概念	150
5.1.2 不定积分的性质	153
5.1.3 不定积分的几何意义	153
5.1.4 不定积分基本公式	154
习题 5.1	158
5.2 换元积分法	159
5.2.1 第一换元积分法(凑微分法)	159
5.2.2 第二换元积分法	166
习题 5.2	170
5.3 分部积分法	175
5.3.1 分部积分法	175
5.3.2 循环积分与递推公式	178
5.3.3 分部积分速算法——竖式算法	179
习题 5.3	182
5.4 几种特殊函数的积分	183
5.4.1 有理函数的积分	183
5.4.2 三角函数有理式的积分	188
5.4.3 简单无理函数的积分	193
习题 5.4	194
5.5 积分表的使用方法	195
5.5.1 可直接查表的积分	195
5.5.2 进行变量代换,再查表	196
5.5.3 用递推公式	196
习题 5.5	197
第 6 章 定积分及其应用	198
6.1 定积分的概念与性质	198
6.1.1 定积分的定义	199
6.1.2 定积分的几何意义	201
6.1.3 定积分的性质·积分中值定理	202
习题 6.1	204

6.2 定积分的计算	205
6.2.1 变限函数及其导数	205
6.2.2 微积分基本公式	208
6.2.3 定积分的换元积分法	211
6.2.4 定积分的分部积分法	214
习题 6.2	219
6.3 广义积分	221
6.3.1 广义积分的概念	221
6.3.2 广义积分的计算	223
6.3.3 两个重要的广义积分	224
习题 6.3	225
6.4 定积分的应用	226
6.4.1 微元法	226
6.4.2 平面图形的面积	227
6.4.3 旋转体的体积	231
6.4.4 平行截面面积为已知的立体的体积	234
6.4.5 平面曲线的弧长	235
习题 6.4	237
数学实验四	238
第 7 章 空间解析几何与向量代数	242
7.1 空间直角坐标系	242
7.1.1 空间点的直角坐标	242
7.1.2 两点间的距离公式	243
7.1.3 柱坐标系	244
7.1.4 球坐标系	246
习题 7.1	247
7.2 向量及其加减法 数与向量的乘积	248
7.2.1 向量的概念	248
7.2.2 向量及其加减法	249
7.2.3 数与向量的乘积	250
习题 7.2	251
7.3 向量的坐标	251
7.3.1 向量的坐标	251
7.3.2 向量的坐标运算	252
习题 7.3	255
7.4 数量积 向量积 混合积	256
7.4.1 向量的数量积	256
7.4.2 数量积的坐标表示	257
7.4.3 向量的向量积	258
7.4.4 向量积的坐标表示	259
7.4.5 向量的混合积	261
7.4.6 混合积的坐标表示	261

习题 7.4	263
7.5 平面及其方程	263
7.5.1 平面的方程及其方程的几种类型	264
7.5.2 两平面的位置关系	267
7.5.3 点到平面的距离	268
习题 7.5	270
7.6 空间直线及其方程	271
7.6.1 直线方程的几种类型	271
7.6.2 两直线的夹角	274
7.6.3 直线与平面的位置关系	275
7.6.4 点到直线的距离	276
7.6.5 杂例	278
习题 7.6	279
7.7 曲面及其方程	280
7.7.1 一般曲面	280
7.7.2 旋转曲面	281
7.7.3 柱面	282
7.7.4 二次曲面	284
习题 7.7	291
7.8 空间曲线及其方程	292
7.8.1 空间曲线的一般方程	292
7.8.2 空间曲线的参数方程	293
7.8.3 空间曲线在坐标面上的投影	294
习题 7.8	295
数学实验五	296
习题参考答案	300
参考文献	328

第 1 章 函 数

1.1 预 备 知 识

1.1.1 常见的实数集与记号

1. 自然数集

$$N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\} \quad (\text{注意近两年规定: } 0 \in N)$$

2. 整数集

$$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm n, \dots\}$$

其中偶数集: $\{x | x=2n, n \in Z\}$, 奇数集: $\{x | x=2n-1, n \in Z\}$ 。

3. 有理数集

$$Q = \{\text{有理数}\}$$

其中: $Q_+ = \{\text{正有理数}\}$, $Q_- = \{\text{负有理数}\}$ 。

4. 无理数集

$$W = \{\text{无理数}\}$$

5. 实数集

$$R = (-\infty, \infty)$$

其中, $R_- = (0, \infty)$, $R_+ = (-\infty, 0)$ 。

6. 二维平面

$$R^2 = (-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty) = \{(x, y) | x \in (-\infty, \infty), y \in (-\infty, \infty)\}$$

7. 三维空间

$$\begin{aligned} R^3 &= (-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty) \\ &= \{(x, y, z) | x \in (-\infty, \infty), y \in (-\infty, \infty), z \in (-\infty, \infty)\} \end{aligned}$$

推而广之, 我们将 n 元有序数组 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的全体称为 n 维空间, 记为 R^n , 即

$$R^n = R \times R \times \dots \times R = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_k \in R, k = 1, 2, \dots, n\}$$

R^n 中的元素 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 记为 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 。

n 维空间中的每一个元素 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 称为空间中的一个点或一个 n 维向量, 数 x_k 称为该点的第 k 个坐标。特别地, 当所有 $x_k = 0 (k = 1, 2, \dots, n)$ 时, 称这样的元素为 R^n 中的零元, 记为 $\mathbf{0}$ 或 0 。

n 维空间 R^n 中两点 $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 和 $y=(y_1, y_2, \dots, y_n)$ 之间的距离定义为

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

特别地, 点 $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 和零元之间的距离为

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

1.1.2 实数的绝对值

1. 绝对值的定义

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

2. 绝对值的几何意义

$|a|$ 表示数轴上点 a 与原点之间的距离, 如图 1.1 所示。

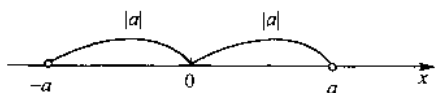


图 1.1

3. 绝对值的性质

- (1) $|a| \geq 0$
- (2) $|a| = \sqrt{a^2}$

$$(3) |a| = |-a|$$

$$(4) -|a| \leq a \leq |a|$$

4. 绝对值的运算性质

$$(1) |a+b| \leq |a| + |b|$$

$$(2) |a| - |b| \leq |a-b|$$

$$(3) |ab| = |a| |b|$$

$$(4) \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (|b| \neq 0)$$

$$(5) |x| < \epsilon \Leftrightarrow -\epsilon < x < \epsilon, \quad |x-a| < \epsilon \Leftrightarrow a-\epsilon < x < a+\epsilon$$

$$(6) |x| > \epsilon \Leftrightarrow x < -\epsilon \text{ 或 } x > \epsilon$$

1.1.3 邻域

邻域是高等数学中一个常用的概念, 下面分类讨论之。

1. 直线上的点邻域

定义 1.1 设 $x_0 \in R$, R 上所有与 x_0 的距离小于 $\delta > 0$ 的点集, 称为 x_0 的 δ -邻域, 记作 $U(x_0, \delta)$ 。由定义可见, x_0 的 δ -邻域就是以 x_0 为中心, 以 δ 为半径的开区间, 即

$$\begin{aligned} U(x_0, \delta) &= \{x \mid |x - x_0| < \delta\} \\ &= (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \end{aligned}$$

如图 1.2 所示。

特别地, 不包含中心点的邻域称为去心邻

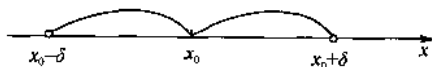


图 1.2

域, 记作

$$U(x_0, \delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$$

邻域的左半部和右半部分别称为左邻域和右邻域, 记作

$$\text{左邻域: } U^-(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0)$$

$$\text{右邻域: } U^+(x_0, \delta) = (x_0, x_0 + \delta)$$

2. 平面上的点邻域

设 $P(x_0, y_0) \in R^2$, R^2 上所有与 $P(x_0, y_0)$ 的距离小于 $\delta > 0$ 的点集, 称为 $P(x_0, y_0)$ 的 δ -邻域, 记作 $U(P, \delta)$. $U(P, \delta)$ 的几何意义是: 以 $P(x_0, y_0)$ 为中心, 以 δ 为半径的开圆域, 如图 1.3 所示。



图 1.3

3. 平面上的直线的邻域

设 $y=A \in R^2$, R^2 上所有与 $y=A$ 的距离小于 $\varepsilon > 0$ 的点集, 称为 $y=A$ 的 ε -邻域, 记作 $U(A, \varepsilon)$. $U(A, \varepsilon)$ 的几何意义是: 以 $y=A$ 为中心, 以 ε 为半径的带形区域, 如图 1.4 所示。

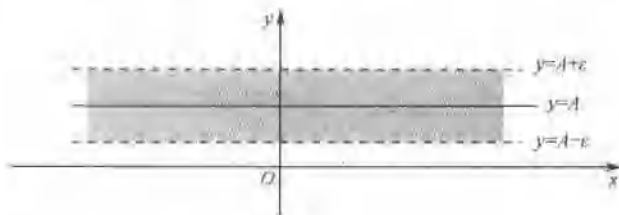


图 1.4

4. 空间的邻域

三维空间的点邻域是以 $P(x_0, y_0, z_0)$ 为中心, 以 δ 为半径的开球, 即

$$U(P_0, \delta) = \{(x, y, z) \mid \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} < \delta\}$$

注: 请读者想一想, 三维空间的线邻域应当如何定义? 其几何意义是什么?

1.1.4 充分必要条件

一个数学命题, 由条件和结论两部分组成, 通常我们用 A 表示条件, B 表示结论。

1. 充分和必要条件

如果命题为“若 A 则 B ”, 那么称 A 为 B 的充分条件, B 为 A 的必要条件, 记作 $A \Rightarrow B$ 。

2. 充要条件

如果命题“若 A 则 B ”与“若 B 则 A ”同时成立, 那么称 A 与 B 互为充分必要条件, 简称充要条件, 记作 $A \Leftrightarrow B$ 。

1.1.5 常用三角公式

在高等数学的学习过程中,会用到一些初等三角函数公式,为使用方便,我们把常用的三角公式列举如下。

1. 两角和差公式

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

2. 倍角公式

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

3. 降幂公式

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

4. 积化和差公式

$$\sin x \sin y = -\frac{1}{2} [\cos(x+y) - \cos(x-y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

$$\cos x \sin y = \frac{1}{2} [\sin(x+y) - \sin(x-y)]$$

1.1.6 极坐标

1. 极坐标系

平面直角坐标系是最简单又常用的一种坐标系,但不是唯一的坐标系。下面介绍一种利用角和距离建立的坐标系——极坐标系。

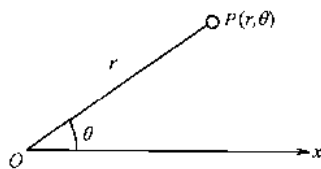


图 1.5

在平面内取一个定点 O , 叫做极点, 引一条射线 Ox , 叫做极轴, 再选定一个长度单位和角度的正方向(取逆时针方向)。对于平面内任意一点 P , 用 r 表示线段 OP 的长度, θ 表示从 Ox 到 OP 的角度, r 称为点 P 的极径(恒取正值), θ 称为点 P 的极角, 有序数对 (r, θ) 称为 P 点的极坐

标, 这样建立的坐标系称为极坐标系, 如图 1.5 所示。

当点 P 在极点时, 它的极径 $r=0$, 极角 θ 可以取任意值。

例如, 如图 1.6 所示, 在下面的极坐标系中, 点 A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 F 、 G 的坐标分别为

$$A(3, 0) \quad B\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$$

$$C\left(4, \frac{\pi}{2}\right) \quad D\left(1, \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$E(5, \pi) \quad F\left(4, \frac{5\pi}{4}\right)$$

$$G\left(5, \frac{7\pi}{4}\right)$$

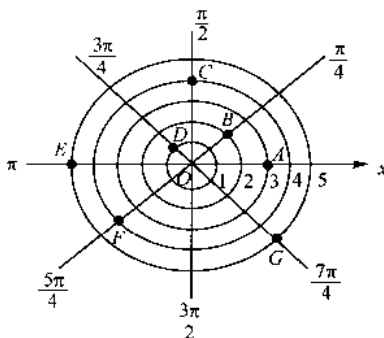


图 1.6

注: (1) 在极坐标系中, 角度也可以取负值(顺时针方向为负), 例如, B 、 D 、 G 的坐标

也可以写成 $B\left(2, -\frac{7\pi}{4}\right)$, $D\left(2, -\frac{5\pi}{4}\right)$, $G\left(5, -\frac{\pi}{4}\right)$ 。

(2) 极坐标系与直角坐标系不同的是, 给定 r 和 θ , 可以确定一个点 P , 但是给定一个点 P , 可以对应的极坐标有无数种表示方法。这是因为 (r, θ) 和 $(r, \theta - 2k\pi)$ 是同一点的极坐标。为确定起见, 我们规定: $0 < r < +\infty$, $0 \leq \theta < 2\pi$ (或 $-\pi < \theta \leq \pi$), 那么除极点外, 平面内的点和极坐标就可以一一对应了。

2. 极坐标与直角坐标的互化

在平面上, 同一个点可以有直角坐标, 也可以有极坐标; 同一条曲线可以有直角坐标方程, 也可以有极坐标方程。研究问题时, 有时需要把在一种坐标系中的方程转化成另一种坐标系的方程, 所以掌握极坐标与直角坐标的关系是必要的。

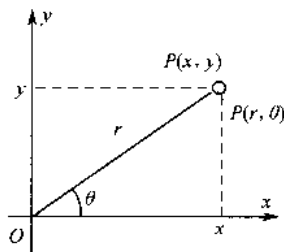


图 1.7

在平面上, 让直角坐标系的原点 O 与极坐标系的极点重合, 选直角坐标系的 Ox 轴的正半轴作为极轴, 并在两种坐标系的坐标轴上取相同的长度单位。设 P 为平面上任意一点, 它的直角坐标为 (x, y) , 极坐标为 (r, θ) , 由图 1.7 不难看出两种坐标系的构造以及两种坐标的关系。

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

$$0 \leq r < +\infty$$

$$0 \leq \theta < 2\pi$$

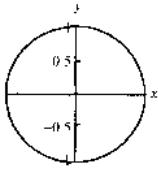
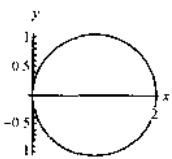
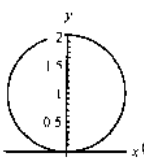
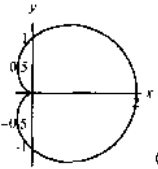
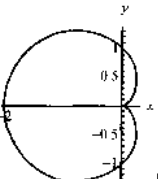
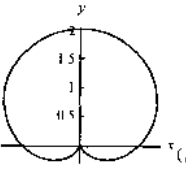
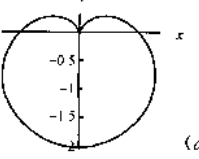
$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

$$\theta = \arctan \frac{y}{x}$$

为了读者使用方便,我们把常用的平面曲线的直角坐标方程和极坐标方程列成表,如表 1.1 所示。

表 1.1

曲线名称	图 形	直角坐标方程	极坐标方程
圆	 ($a=2$)	$x^2 + y^2 = a^2$	$r = a$
	 ($a=1$)	$x^2 + y^2 = 2ax$	$r = 2a \cos \theta$
	 ($a=1$)	$x^2 + y^2 = 2ay$	$r = 2a \sin \theta$
心形线	 ($a=1$)	$x^2 + y^2 = a(x + \sqrt{x^2 + y^2})$	$r = a(1 + \cos \theta)$
	 ($a=1$)	$x^2 + y^2 = a(-x + \sqrt{x^2 + y^2})$	$r = a(1 - \cos \theta)$
	 ($a=1$)	$x^2 + y^2 = a(y + \sqrt{x^2 + y^2})$	$r = a(1 + \sin \theta)$
	 ($a=1$)	$x^2 + y^2 = a(-y + \sqrt{x^2 + y^2})$	$r = a(1 - \sin \theta)$