巧解高中重点题难题丛书

数学

北京师范大学附属中学等编写

中国人事出版社

巧解高中重点题难题丛书

ISBN 7-80076-247-5

9 787800 762475 >

ISBN 7—80076—247—5/G·084

定 价: 56.00 元 每册 14.00 元

重点题难题丛书

数学

图书在版编目(CIP)数据

巧解高中重点题难题丛书:数学分册/《巧解高中重点题难题丛书》编写组编．—北京:中国人事出版社,1997.11．重印．

ISBN 7-80076-247-5

Ⅰ.巧…　Ⅱ.巧…　Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料　Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(94)第 14873 号

数　学

巧解高中重点题难题丛书

*

中国人事出版社出版发行

秦皇岛市卢龙印刷厂印刷

850×1168 毫米　大 32 开　13 印张

1994 年 10 月第一版　1997 年 11 月第二次印刷

印数:15001—18500 套

ISBN7—80076—247—5/G・084

全套定价:56.00 元(本册:14.00 元)

前　　言

精选典型的难题重点题型进行系统剖析是中学教学的重要一环，对典型难题重点题的系统剖析能起到举一反三、以点带面、拓展思路的特殊功效。学生通过对典型难题重点的理解，能更透彻、更灵活地掌握各种基本概念、基础知识，并能显著地提高考试应变能力。

根据大多数中学师生的经验，我们按照教学大纲的基本要求和较高要求，组织具有多年实践经验的大学教授和高中特级教师都是精心编写了这套《丛书》，供全体高中学生学习之用。

《丛书》既注意到学科的系统性、指导性、科学性和综合性，又考虑到学生在解题中存在的疑点和难点。编写时力求选题典型、分析透彻、重点突出，并着重对解题思路和容易发生的错误进行剖析。

《丛书》的编写历经三载、数易其稿，力求选题典型、剖析精僻，但书中难免有不妥之处，恳请读者朋友们提出宝贵意见和修改建议，以便修正。

《巧解高中难题重点题丛书》编委会

目　　录

第一章　函　　数

集合与映射

1. 已知全集 $I=[1,3)$，$A=\{x|x^2+(a-1)x-a>0,x\in I\}$，$B=\{x|\frac{x+a}{x+b}>0,x\in I\}$，且 $a<b$.

(1)若 $\overline{B}=I$，求 a 的最大值，b 的最小值；

(2)若 $\overline{A}\cup B=I$，且 $-3<a<-1$，求 b 满足的条件；

(3)若 $|a|<1$，$|b|<1$，求 $A\cap B$；

(4)设 $x_0=a^2-1$，且 $-3<a<-1$，若 $x_0\in\overline{A}$，求 a 的取值范围.

本题主要涉及集合交集、并集、补集的概念，空集和全集的意义.

要求集合 A、B，需要解不等式，在解不等式时，要借助数轴进行运算，利用数形结合，加强形象，简化运算.

解(1)$\because$ 集合 $\overline{B}=I$，$\therefore B=\Phi$，条件 $\frac{x+a}{x+b}>0$，

$x\in I$，相当于 $(x+a)(x+b)>0$，$x\in I$.

$\because a<b$，$\therefore$ 解为 $x<-b$ 或 $x>-a$

$\because I=[1,3)$，要 $B=\Phi$，即 $\{x|x<-b$ 或 $x>-a,x\in I\}=\Phi$

$$\therefore\begin{cases}-b\leqslant-1\\-a\geqslant3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b\geqslant1\\a\leqslant-3\end{cases}$$

$\therefore a$ 的最大值为 -3，b 的最小值为 1.

(2)$\because -3<a<-1$，$1<-a<3$

$\therefore\overline{A}=\{x|x^2+(a-1)x-a\leqslant0,x\in I\}=[1,-a]$

又 $\because a<b$，$-a>-b$

$\therefore B=\{x|\dfrac{x+a}{x+b}>0, x\in I\}$

$=\{x|(x+a)(x+b)>0, x\in I\}$

$=[-1, -b)\cup(-a, 3]$

$\because \overline{A}\cup B=I \therefore [1, -a]\cup(-a, 3)\cup[-1, -b)=[-1, 3)$

$\therefore -b\geqslant 1$. 即 $b\leqslant -1$. $\therefore b$ 满足的条件为 $a<b\leqslant -1$

如图 1—1

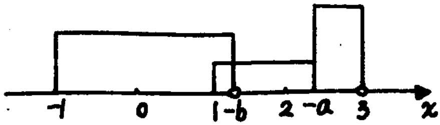


图 1—1

(3) $\because -1<a<1$ $\qquad -1<-a<1$

$\therefore A=\{x|x^2+(a-1)x-a>0, x\in I\}$

$=[-1, -a)\cup(1, 3)$

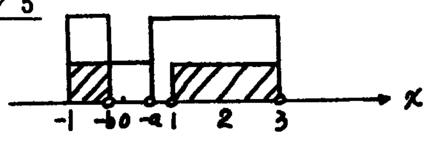
$\because a<b, -b<-a \therefore B=[-1, -b)\cup(-a, 3)$

$\therefore A\cap B=[-1, -b)\cup(1, 3)$ 如图 1—2.

(4) $\because \overline{A}=[1, -a], x_0=a^2-1\in\overline{A}, -3<a<-1$

$$\therefore\begin{cases}1\leqslant a^2-1\leqslant -a\\-3<a<-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2\geqslant 2\\a^2+a-1\leqslant 0\\-3<a<-1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a\geqslant\sqrt{2}\text{ 或 }a\leqslant-\sqrt{2}\\\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\leqslant a\leqslant\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\\-3<a<-1\end{cases}$$



$$\Rightarrow -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\leqslant a\leqslant -\sqrt{2}$$

图 1—2

在解不等式时, 一定要考虑参数 a、b 的大小, 在借助数轴求交集时, 要找出参数的确切位置.

2. 数集 $X=\{x|x=(2n+1)\pi, n$ 是整数$\}$与数集 $Y=\{y|y=$

$(4k\pm1)\pi$, k 是整数$\}$之间的关系是

(A)$X\subset Y$.　　(B)$X\supset Y$.　　(C)$X=Y$.　　(D)$X\neq Y$

本题主要考察集合的相等、包含概念.

判断或证明集合与集合之间是否具有某种关系, 如包含关系、相等关系等, 基本方法是运用文氏图或根据有关的概念定义去判断, 有时要将二者结合起来, 此题要求判断的是包含关系、相等关系, 可以从子集、等集的定义出发进行判断.

解:因 n 是整数, 故 n 是奇数或偶数, 故可设 $n=2m$ 或 $n=2m-1$. (m 是整数)

$\therefore 2n+1=4m+1$ 或 $2n+1=4m-1$

$\therefore X\subseteq Y$, 反之, 又有

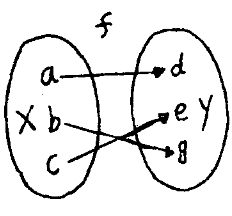
$4k+1=2\cdot 2k+1$ 及 $4k-1=2(2k-1)+1$, 其中 $2k$, $2k-1$ 都是整数

$\therefore$有 $Y\subseteq X$

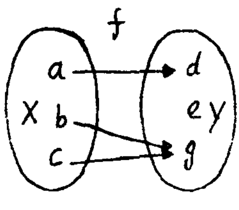
$\therefore Y=X$ 故选(C).

凡是判断或证明集合之间的关系问题, 都应根据文氏图或定义去分析解决.

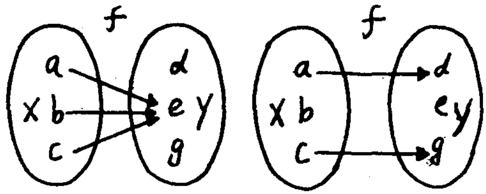
3. 下列各图分别表示从集合 X 到集合 Y 的对应, 其中不是映射的是(　　)



(A)



(B)



(C)　　　　　　(D)

判断对应是否为映射，主要依据是映射的定义，满足映射定义即为映射，否则就不是映射.

按照映射的定义，要求原象集合中每一元素都有象集合中的唯一元素与之对应，而在图(D)中，集合 X 中的元素 b 在 Y 中没有与之对应的元素，故不满足映射的定义，它不是映射，所以应选(D).

在映射定义中要求有两点：(1)原象集合中每一元素有元素与之对应；(2)有象集合中唯一的元素与之对应．若只注意其中一点而忽视另一点，就会得到错误的结论．在解决有关的一一映射问题时，主要依据也是一一映射的定义.

4．已知集合 $A=\{x\mid x\geqslant-\frac{1}{2}\}$，$B=\{y\mid y\geqslant-\frac{1}{4}\}$，从 A 到 B 的映射 $f:x\to y=x^2+x$，求证映射 f 是一一映射.

证明集合 $A\to B$ 的对应是一一映射，要完成两步：

(1)先证 f 是从 A 到 B 的映射；

(2)再证 f 是从 A 到 B 的一一映射，即 1°集合 A 中的不同元素在集合 B 中的对应元素也不同(即不同的原象对应不同的象)；2°B 中的每一元素在 A 中都有对应元素(即映射为满射).

本题只须完成第二步的证明.

证明：1°设 x_1，x_2 均 $\in A$，即 $x_1 \neq x_2$ 且均 $\geqslant -\frac{1}{2}$，不妨设 $x_2 > x_1 \geqslant -\frac{1}{2}$，由对应法则 f 得：

$$y_1 = x_1^2 + x_1; y_2 = x_2^2 + x_2$$

$$\begin{aligned} y_2 - y_1 &= x_2^2 + x_2 - (x_1^2 + x_1) \\ &= (x_2^2 - x_1^2) + (x_2 - x_1) \\ &= (x_2 - x_1)(x_2 + x_1 + 1) \end{aligned}$$

$\because x_1 \neq x_2 \quad \therefore x_2 - x_1 \neq 0$ (1)

$\because x_2 > x_1 \geqslant -\frac{1}{2}$，$\therefore x_2 + x_1 > -1$，$x_2 + x_1 + 1 > 0$ (2)

由(1)(2)知 $y_2 - y_1 \neq 0$，即 $y_1 \neq y_2$，故 A 中的不同元素在 B 中有不同的象.

2°设 $y_0 \in B$，即 $y_0 \geqslant -\frac{1}{4}$，则由对应法则 f 知：

$$x^2 + x = y_0.$$

现在需要证明由此方程所确定的 $x \in A$，即要证 $x \geqslant -\frac{1}{2}$.

$$x^2 + x - y_0 = 0$$

$$x = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{4y_0 + 1}}{2} \qquad (3)$$

$\because y_0 \geqslant -\frac{1}{4}$，$\therefore \sqrt{4y_0 + 1} \in R$ 从而 $x \in R$.

又(3)中的 $x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{4y_0 + 1}}{2} \geqslant -\frac{1}{2}$

$\therefore y_0$ 在 A 中有原象.

综上，知映射 f 是 $A \to B$ 的一一映射.

在此题中已经告知是映射，故只须完成对第二步的证明，若只知是对应，则两步都要证明.

二 函数的性质(I)

5. 求函数 $y=\sqrt{27-3^{\log_2(x^2-3x-10)}}$ 的定义域

求函数的定义域一般有三类问题.

第一类是给出函数的解析式，此时函数的定义域是使解析式有意义的自变量的集合，在具体求的时候要遵循以下原则：1°自变量的取值不能使分母为零；2°自变量的取值不能使偶次根号出现负值；3°自变量的取值不能使对数的真数为负数或零，不能使对数的底数为负数零或1. 第二类是实际问题或几何问题，此时除要考虑使函数的解析式有意义外，还应考虑使实际问题或几何问题有意义；第三类是不给出函数的解析式，而由 $f(x)$ 的定义域确定函数 $f[\varphi(x)]$ 的定义域. 就此题属于第一种类型的定义域.

解：由 $27-3^{\log_2(x^2-3x-10)}\geqslant 0$，得

$3^{\log_2(x^2-3x-10)}\leqslant 3^3$.

即 $\log_2(x^2-3x-10)\leqslant 3$.

$\therefore 0<x^2-3x-10\leqslant 2^3$.

即 $\begin{cases} x^2-3x-10>0, \\ x^2-3x-18\leqslant 0. \end{cases}$

解得函数定义域为 $[-3,-2]\cup[5,6]$

求复合函数的定义域可以从外向里逐步求解，注意函数的单调性及对数函数的真数条件.

6. 线段 $|BC|=4$，BC 的中点 M，点 A 与 B、C 两点距离之和为 6，设 $|AM|=y$，$|AB|=x$，求 $y=f(x)$ 的函数表达式及这函数的定义域.

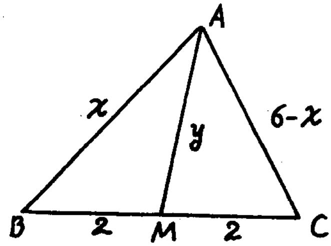


图 2—1

由椭圆定义知，点 A 与 B、C 两定点的距离之和为一定值，故 A

点的轨迹是以 B、C 为焦点，半长轴为 3 的椭圆.

解：如图，由题设及余弦定理得

$$\begin{cases}(6-x)^2=y^2+2^2-4y\cos(180^\circ-\angle AMB)\\ x^2=y^2+2^2-4y\cos\angle AMB\end{cases}\Rightarrow$$

$$x^2+(6-x)^2=2y^2+8$$

$\because$ $y>0$, $\therefore y=\sqrt{x^2-6x+14}$

$3-2=a-c\leqslant x\leqslant a+c=3+2$.

$\therefore$ $1\leqslant x\leqslant 5$.

若运用不等式去求该函数的定义域，则运算量较大，且易出错.

7. 设 $f(x)$ 的定义域是 $[-1,4)$，求 $f(\frac{1}{x}+2)$ 的定义域.

本题主要涉及的知识有：复合函数定义域的概念及求法.

此为上述的第三类定义域，已知原函数的定义域，求复合函数的定义域，对这类问题，只需要让中间变量满足已给的定义域，求出 x 的范围即可：

解：令 $-1\leqslant\frac{1}{x}+2<4$ 得

$-3\leqslant\frac{1}{x}<0$ 或 $0<\frac{1}{x}<2$.

$\therefore$ $x\leqslant-\frac{1}{3}$，或 $x>\frac{1}{2}$ 为所求定义域.

对不等式应用倒数运算时，注意不等式两边必须同号，取倒数后不等号反向，可以简述为“同号倒数反向”. 已知原函数的定义域可以求得复合函数的定义域，但若已知复合函数的定义域，并不能确定复合原函数的定义域，如：“若函数 $f(x)$ 满足 $f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}$，求 $f(x)$ 的定义域.”

8. 求函数 $y=\frac{x}{x+1}$ 的值域.

对于一些较简单的函数，可通过函数的定义域对应法则以及

函数图象，就可确定其定义域.

解：$\because y=\frac{x}{x+1}=1-\frac{1}{x+1}$，而$\frac{1}{x+1}\neq 0$，$\therefore$除 0 以外其它的值都可以取到

$\therefore 1-\frac{1}{x+1}\neq 1$

$\therefore$此函数的值域是$\{y \mid y\in R, y\neq 1\}$

也可考虑函数的图象，求得其值域.

9. 求函数 $y=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$的值域.

若函数的反函数存在，且其表达式可以求得，则可通过求反函数的定义域来确定原函数的值域.

解：由 $y=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$得

$$(y-1)e^x=-(y+1)e^{-x}$$

$$\therefore \quad e^{2x}=\frac{1+y}{1-y},$$

$$\therefore \quad x=\frac{1}{2}ln\frac{1+y}{1-y}$$

由 $\frac{1+y}{1-y}>0\Rightarrow\begin{cases}1+y>0\\1-y>0\end{cases}$或$\begin{cases}1+y<0\\1-y<0\end{cases}$

$$\therefore \quad -1<y<1$$

故 y 的值域为$(-1,1)$.

并不是所有的有反函数的函数都可以用反函数法求得其值域，在用此法求函数的值域时，往往会扩大原函数的值域，因为用反函数的表达式求得的反函数的自变量的取值范围，不一定是反函数的定义域．反函数的定义域按照定义，应是原函数的值域，而不是使其表达式有意义的 x 的全体．因此当由反函数表达式求得的范围与反函数的定义域一致时可以用此法，不一致时便不能用．当 1°函数的定义域为 R，且存在反函数时，可用此法；2°函数为 $y=\frac{ax+b}{cx+a}$这一类时，可以用此法，其它情况最好不要用，例如：

求函数 $y=2x+\sqrt{3x+2}$ 的值域.

解法一:(反函数法)

$\because\quad y=2x+\sqrt{3x+2}$,

$\therefore\quad y-2x=\sqrt{3x+2}$,

$\therefore\quad (y-2x)^2=3x+2$.

$\therefore\quad 4x^2-(4y+3)x+y^2-2=0$.

$$x=\frac{4y+3\pm\sqrt{24y+41}}{8}.$$

不论反函数的表达式是取正号还是取负号,求得的 y 的范圍都是 $y\geqslant-\frac{41}{24}$,故值域为$[-\frac{41}{24},+\infty)$.

解法二:(单调性法)

易知函数的定义域为$[-\frac{2}{3},+\infty)$,又函数在其定义域上是单增的.

$\therefore y_{\min}=f(-\frac{2}{3})=-\frac{4}{3}$

又当 $x\to+\infty$时　$y\to+\infty$,

$\therefore$函数的值域为$[-\frac{4}{3},+\infty)$.

比较两种解法求得的函数的值域,前者求出的已扩大了原函数的值域.

10. 求函数 $y=-2x+\sqrt{3x+2}$ 的值域.

本题涉及的知识有函数的最值概念及其求法.

若能求出函数的最大值和最小值,则可确定出函数的值域.对于无理函数的值域,可设法将其转化为二次函数的最值问题,然后用配方法求其最值.

解:设 $t=\sqrt{3x+2}$　　　$t\geqslant0$

则 $t^2=3x+2$

$x=\frac{1}{3}t^2-\frac{2}{3}$

$\therefore y=-2(\frac{1}{3}t^2-\frac{2}{3})+t$

$=-\frac{2}{3}t^2+t+\frac{4}{3}$

$=-\frac{2}{3}(t-\frac{3}{4})^2+\frac{41}{24}$

$\because t\geqslant 0$, $\therefore y_{max}=\frac{41}{24}$.

当 $t\to+\infty$时，$y\to-\infty$

$\therefore$函数的值域为$(-\infty,\frac{41}{24}]$.

凡 $y=ax+b\pm\sqrt{cx+d}$此类无理函数，都可以考虑用换元法转化为二次函数的最值问题从而确定出函数的值域.但在考虑二次函数最值时，一定要注意 t 的取值范围.

11. 求下列函数的值域：

(1)$y=\frac{x^2-x}{x^2-1}$

(2)$y=\frac{x^2-2x+3}{x^2+2x+3}$

对于有理函数的值域问题，可用判别式法去解决.在具体解题时要分两处情况加以讨论：1°若分子分母有公因式，这时可先约去公因式，再求值域，但要从求得的值域中除去使公因式为零的 x 所对应的 y 值；2°若分子分母无公因式，可将其变形为关于 x 的一元二次方程，利用判别式求得值域.

解：(1)$y=\frac{x^2-x}{x^2-1}=\frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{x}{x+1}=1-\frac{1}{x+1}$

$\therefore$值域为 $y\neq1$，$y\neq\frac{1}{2}$($x=1$ 时，$y=\frac{1}{2}$).

(2)$(y-1)x^2+2(y+1)x+3(y-1)=0$.

当 $y=1$ 时 $x=0$；

当 $y\neq1$ 时$\Delta=4(y+1)^2-12(y-1)^2\geqslant0$.

解得　$2-\sqrt{3}\leqslant y\leqslant2+\sqrt{3}$且 $y\neq1$.

综上得值域为$[2-\sqrt{3},2+\sqrt{3}]$.

注意不要忘了验证二次项系数的比是否在值域中，否则求出的值域可能不确切，例如：函数 $y=\frac{2x^2+2x+3}{x^2+x+1}$. 按照判别式 $\triangle\geqslant0$ 解得为 $2\leqslant y\leqslant\frac{10}{3}$，但事实上 y 取不到 2，其值域应为 $2<y\leqslant\frac{10}{3}$

12. 求函数 $y=\frac{\sin x}{2-\cos x}$的值域.

只要将给出的函数表达式变形为：$y=\frac{0-(-\sin x)}{2-\cos x}$，且与直线的斜率联系起来考虑，则函数值 y 表示的是定点(2, 0)与动点$(\cos x, -\sin x)$联线斜率，所求的值域就是斜率的取值范围.

解法一：设$\begin{cases}x=\cos t\\y=-\sin t\end{cases}$则

$x^2+y^2=1$，可知动点的轨迹为单位圆，建立平面直角坐标系如图：

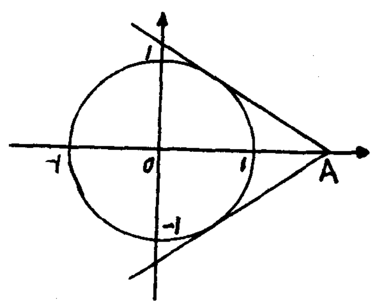


图 2—2

设切线的斜率为 k，则其方程为：

$y=k(x-2)$

把它与圆方程联立且令$\triangle=0$

$$\begin{cases}y=k(x-2)\\x^2+y^2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}k_1=-\frac{\sqrt{3}}{3},\\k_2=\frac{\sqrt{3}}{3}\end{matrix}$$

∴函数的值域为$[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}]$

解法二：函数化为：

$$2y-y\cos x=\sin x,$$

即 $\sin x+y\cos x=2y$