

科学计算及其软件教学丛书 / 石钟慈主编

# 小波分析

陈仲英 巫 斌◎编著



科学出版社

[www.sciencep.com](http://www.sciencep.com)

0241.86/19

2007

科学计算及其软件教学丛书

# 小波分析

陈仲英 巫 斌 编著

科学出版社

北 京

## 内 容 简 介

本书为“科学计算及其软件教学丛书”之一,主要介绍小波分析的基本理论、方法和应用,其内容包括:有限离散小波,无限离散小波,实数集上的小波,多种重要和常用的小波,以及小波在信息处理和科学计算领域的一些重要应用.全书由浅入深,注重原理,联系应用.每章附有习题,可供练习.

本书可作为信息与计算科学、数学与应用数学,以及相近专业的高年级大学生的教材和参考书,也可供从事信息处理或科学与工程计算的科技人员学习参考.具有数学分析和线性代数知识的读者也可以自学本书.

### 图书在版编目(CIP)数据

小波分析/陈仲英,巫斌编著—北京:科学出版社,2007

(科学计算及其软件教学丛书)

ISBN 978-7-03-019057-4

I. 小… II. ①陈… ②巫… III. 小波分析 IV. O177

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第081341号

责任编辑:李鹏奇 李晓鹏/责任校对:曾茹

责任印制:张克忠/封面设计:陈敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

铁成印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2007年8月第 一 版 开本: B5(720×1000)

2007年8月第一次印刷 印张: 12

印数: 1—3 500 字数: 220 000

定价: 21.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈铁成〉)

## 《科学计算及其软件教学丛书》序

随着国民经济的快速发展,科学和技术研究中提出的计算问题越来越多,越来越复杂.计算机及其应用软件的迅猛发展为这些计算问题的解决创造了良好的条件,而培养一大批以数学和计算机为主要工具,研究各类问题在计算机上求解的数学方法及计算机应用软件的专业人才也越来越迫切.

1998年前后,教育部着手对大学数学专业进行调整,将计算数学及其应用软件、信息科学、运筹与控制专业合并,成立了“信息与计算科学专业”.该专业成立之初,在培养目标、指导思想、课程设置、教学规范等方面存在不少争议,教材建设也众说纷纭.科学出版社的编辑曾多次找我,就该专业的教材建设问题与我有过多次的讨论.2005年11月在大连理工大学召开的第九届全国高校计算数学会年会上,还专门讨论了教材编写工作,并成立了编委会.在会上,编委会就教材编写的定位和特色等问题进行了讨论并达成了共识.按照教育部数学与统计学教学指导委员会起草的“信息与计算科学专业教学规范”的要求,决定邀请部分高校教学经验丰富的教师编写一套教材,定名为“科学计算及其软件教学丛书”.该丛书涵盖信息与计算科学专业的大部分核心课程,偏重计算数学及应用软件.丛书主要面向研究与教学型、教学型大学信息与计算科学专业的本科生和研究生.为此,科学出版社曾调研了国内不同层次的上百所学校,听取了广大教师的意见和建议.这套丛书将于今年秋季问世,第一批包括《小波分析》、《数值逼近》等十余本教材.选材上强调科学性、系统性,内容力求深入浅出,简明扼要.

丛书的编委和各位作者为丛书的出版做了大量的工作,在此表示衷心的感谢.我们诚挚地希望这套丛书能为信息与计算科学专业教学的发展起到积极的推动作用,也相信丛书在各方面的支持与帮助下会愈出愈好.

石钟慈  
2007年7月

## 前 言

小波分析是近年来数学与应用数学领域中一个迅速发展的新分支,在理论和应用方面都取得了令人瞩目的成就.

小波的历史最早可以追溯至 1910 年 A. Haar 提出的 Haar 基,它是最早出现的小波基.然而当时小波的理论基础尚未建立, Haar 基也没有得到广泛的应用. 1936 年, Littlewood-Paley 对 Fourier 级数建立了 L-P 理论,它具有在频域以任意尺度分析函数的能力,可以看作是多尺度分析的雏形.而 A. Calderón, R. Coifman 在 20 世纪六七十年代建立的对  $H^p$  空间的原子分解,其离散形式已接近于小波展开. 1982 年, J. Stromberg 构造了  $C^k$  空间指数衰减的正交基,它实际上是一组标准正交小波基,但仍然没有受到大家的重视和关注.小波变换的概念是由法国从事石油勘探信号处理的地球物理学家 J. Morlet 在 1983 年提出的.他在分析信号的时频局部特性时期望得到时频窗口的自适应变换.他通过将高斯余弦调制函数伸缩平移得到的函数系后来被称为 Morlet 小波基.但是,他通过物理直观和信号处理的实际经验建立的反演公式当时未能得到数学家的认可.著名数学家 Y. Meyer 在 1985 年构造了一个小波基,并在 1986 年与从事信号处理的专家 S. Mallat 一道建立了多分辨率分析的框架,给出构造小波基的一般方法. Mallat 还在塔式分解算法的启发下提出了现在称为 Mallat 算法的小波快速分解与重构算法.小波分析从此开始了蓬勃发展的时期. 1988 年, I. Daubechies 首先给出了具有任意阶消失矩和光滑性的紧支集小波的构造方法,按照这种方法构造得到的小波基称为 Daubechies 小波族.她撰写的 *Ten Lectures on Wavelets* (《小波十讲》) 是最经典的小波著作之一,极大地推动了小波的普及和发展.近二十年来小波分析理论逐步得到系统化.从数学的角度看,小波分析是在 Fourier 分析的基础上发展起来的数学分支,它是 Fourier 分析、泛函分析、数值分析的完美结晶.从信息科学的角度看,小波分析是时频分析、多尺度分析的进一步发展,已经成为信号分析和信息处理的新的强有力的工具.

由于小波分析理论包含的内容深刻而丰富,且应用极其广泛,其理论成果和高新技术遍及众多学科和领域,因此,了解、学习和掌握小波分析的理论和方法成为许多大学生、研究生和科技工作者的愿望,在大学本科开设小波分析选修课也成为一种重要需求.然而,对于缺乏足够数学基础的读者来说,小波分析的数学理论往往成为难于承受的重;而对于希望了解小波分析数学原理的读者来说,工程应用类书籍对小波方法的介绍又是一种难于解渴之轻.有鉴于此,本书将面向具有本科数学分析和线性代数知识的读者,力求容易入门、由浅入深、讲透原理、联系应用.在

介绍小波的基本理论时,本书参照 Frazier 的思路分三步走,从最简单的有限离散小波入手,经过有限到无限的转换得到无限离散小波,再经过离散到连续的转换得到实数集上的小波.而在小波应用的部分将介绍在信息处理应用中非常重要的紧支集小波,以及与科学计算应用相适应的分片多项式小波.本书将以信息与计算科学专业及相近专业的大学生为主要读者,主要介绍小波方法在信息处理和科学计算中的一些应用.我们在讲述小波分析的数学原理时力求联系和渗透信息与计算科学的基本概念和思想,而在讲述小波方法的应用时力求说清其基本数学原理,期望能够达到由此及彼、由表及里、触类旁通、掌握精要的效果.

受编者的学识所限,本书缺陷难免,敬请读者和专家批评指正.

编 者

2007 年 1 月于中山大学数学与计算科学学院

# 目 录

<b>第 1 章 有限离散小波</b> .....	1
1.1 离散 Fourier 变换的定义和性质 .....	1
1.2 信号系统与 Fourier 变换 .....	8
1.3 $\mathbb{Z}_N$ 上小波的引入 .....	17
1.4 $\mathbb{Z}_N$ 上的多层小波 .....	27
习题 1 .....	37
<b>第 2 章 无限离散小波</b> .....	39
2.1 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 和一般 Hilbert 空间 .....	39
2.2 Fourier 级数 .....	47
2.3 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 上的 Fourier 变换 .....	57
2.4 $\mathbb{Z}$ 上的单层小波 .....	61
2.5 $\mathbb{Z}$ 上的多层小波 .....	66
习题 2 .....	73
<b>第 3 章 实数集上的小波</b> .....	76
3.1 $L^2(\mathbb{R})$ 空间 .....	76
3.2 $L^2(\mathbb{R})$ 上的 Fourier 变换 .....	83
3.3 多分辨分析和 $L^2(\mathbb{R})$ 的小波 .....	92
3.4 多分辨分析的构造方法 .....	99
习题 3 .....	118
<b>第 4 章 小波与信号处理</b> .....	120
4.1 小波与滤波器 .....	120
4.2 应用上重要的小波 .....	128
4.3 小波与信号和图像压缩 .....	136
习题 4 .....	147
<b>第 5 章 小波与科学计算</b> .....	148
5.1 分片多项式小波 .....	148
5.2 函数逼近 .....	159
5.3 微分方程的小波 Galerkin 方法 .....	162

---

5.4 积分方程的小波 Galerkin 方法·····	167
习题 5·····	174
<b>参考文献</b> ·····	<b>176</b>
<b>索引</b> ·····	<b>178</b>



# 第 1 章 有限离散小波

本章讲述定义在有限整数集上的小波, 简称为有限离散小波(finite discrete wavelets).

小波的起源可以追溯到近百年前, 但小波分析的蓬勃发展还是近 20 年的事情(参见文献 [1]–[23]). 小波分析的发展与 Fourier 分析有着非常紧密的联系, 因此本章我们就从介绍定义在有限整数集上的离散 Fourier 变换开始. 1.1 节首先在有限整数集上引进离散 Fourier 变换, 讨论其基本性质及其与几种基本运算的关系. 1.2 节联系信号分析的一些基本概念, 着重研究了平移不变线性变换可被 Fourier 基对角化的重要性质. 1.3 节通过基底的时频局部性的讨论, 利用平移变换引入有限整数集上的单层小波, 并讨论生成标准正交小波基的充分必要条件. 最后, 在 1.4 节通过引进上下采样算子对空间进一步分解, 导出多层小波.

## 1.1 离散 Fourier 变换的定义和性质

在本书中我们分别用  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{R}$  和  $\mathbb{C}$  表示全体自然数、整数、实数和复数构成的集合. 全体  $N$  维复向量构成的集合用  $\mathbb{C}^N$  来标记, 类似地  $\mathbb{R}^N$  表示全体  $N$  维实向量构成的集合. 对  $z \in \mathbb{C}^N$ , 我们记其分量形式为  $z = (z(0), z(1), \dots, z(N-1))$ . 这里, 我们用  $z(j)$  而不是  $z_j$  来标记  $z$  的分量, 这是因为我们将采用函数的观点来看待向量. 定义

$$\mathbb{Z}_N := \{0, 1, \dots, N-1\},$$

则每个向量  $z \in \mathbb{C}^N$  都可以看作是  $\mathbb{Z}_N \rightarrow \mathbb{C}$  的一个函数. 注意  $\mathbb{Z}_N$  中的数不是从 1 排到  $N$ , 而是从 0 排到  $N-1$ , 它可以看作是整数集关于  $N$  的同余类构成的集合. 此外, 如果没有特别说明, 我们所指的向量都是列向量, 但为节省空间和记号简便起见, 我们通常还是写成行向量的形式. 在通常的复向量加法和数乘运算下,  $\mathbb{C}^N$  是复数域上的一个  $N$  维线性空间.

本章我们将考虑  $\mathbb{C}^N$  上的变换, 其中需要用到向量之间的内积及由其导出的范数. 我们将由全体  $N$  维复向量及定义在这些向量上的内积运算构成的内积空间记为  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ , 其内积和范数按照标准的方式定义, 即对  $z, w \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ ,

$$\langle z, w \rangle := \sum_{k \in \mathbb{Z}_N} z(k) \overline{w(k)},$$

$$\|z\| := \langle z, z \rangle^{1/2} = \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}_N} |z(k)|^2 \right)^{1/2}$$

对  $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ , 虽然  $z$  由  $N$  个分量构成, 但为了某些运算的定义形式以及一些推导过程的简洁性的需要, 我们将  $z$  等同于一个周期为  $N$  的无限长向量, 即任给  $j \in \mathbb{Z}$ , 我们找  $m \in \mathbb{Z}$  使  $j - mN \in \mathbb{Z}_N$  (这样的  $m$  是存在唯一的), 并令  $z(j) = z(j - mN)$ . 这一对应过程是从  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$  到  $\mathbb{Z}$  上的周期为  $N$  的向量集合的双射. 今后在涉及向量  $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  的运算过程中出现  $j \notin \mathbb{Z}_N$  的分量  $z(j)$  时, 我们自动地利用这种周期性对  $z(j)$  进行赋值. 这一约定将使许多定义和叙述大大简化.

有了内积就可以定义正交性, 我们称  $z$  和  $w$  正交, 若  $\langle z, w \rangle = 0$ , 并记为  $z \perp w$ .  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$  上的最简单的基底是  $E := \{e_0, e_1, \dots, e_{N-1}\}$ , 其中

$$e_j(n) = \begin{cases} 1, & n = j, \\ 0, & n \neq j. \end{cases}$$

按照  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$  中内积和范数的定义, 容易验证上述基底是标准正交的, 我们把它称为 Euclid (标准) 基. 下面, 我们再引进另一组基底, 它也是标准正交基.

**定义 1.1** 定义  $N$  个向量  $E_0, E_1, \dots, E_{N-1} \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  为

$$E_m(n) := \frac{1}{\sqrt{N}} e^{2\pi i m n / N}, \quad m, n \in \mathbb{Z}_N, \quad (1.1)$$

其中  $i := \sqrt{-1}$  表示虚数单位.

**引理 1.1**  $\{E_0, E_1, \dots, E_{N-1}\}$  是  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$  的一组标准正交基.

**证明** 对任意  $j, k \in \mathbb{Z}_N$ , 直接计算可得

$$\langle E_j, E_k \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}_N} E_j(n) \overline{E_k(n)} = \frac{1}{N} \sum_{n \in \mathbb{Z}_N} e^{2\pi i (j-k)n/N} = \frac{1}{N} \sum_{n \in \mathbb{Z}_N} \left( e^{2\pi i (j-k)/N} \right)^n.$$

当  $j = k$  时,  $e^{2\pi i (j-k)/N} = 1$ , 即上面的求和式中每一项都是 1, 因此  $\langle E_j, E_k \rangle = 1$ . 若  $j \neq k$ , 则  $e^{2\pi i (j-k)/N} \neq 1$ , 从而

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}_N} \left( e^{2\pi i (j-k)/N} \right)^n = \frac{1 - \left( e^{2\pi i (j-k)/N} \right)^N}{1 - e^{2\pi i (j-k)/N}}.$$

这时

$$\left( e^{2\pi i (j-k)/N} \right)^N = e^{2\pi i (j-k)} = 1,$$

所以  $\langle E_j, E_k \rangle = 0$ . 于是知  $\{E_0, E_1, \dots, E_{N-1}\}$  标准正交. □

例 1.1 设  $N = 2$ , 则由定义得

$$E_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{2\pi i 0/2}, e^{2\pi i 0/2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 1),$$

$$E_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{2\pi i 0/2}, e^{2\pi i 1/2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, -1).$$

例 1.2 设  $N = 4$ , 则

$$E_0 = \frac{1}{2} (e^{2\pi i 0/4}, e^{2\pi i 0/4}, e^{2\pi i 0/4}, e^{2\pi i 0/4}) = \frac{1}{2} (1, 1, 1, 1),$$

$$E_1 = \frac{1}{2} (e^{2\pi i 0/4}, e^{2\pi i 1/4}, e^{2\pi i 2/4}, e^{2\pi i 3/4}) = \frac{1}{2} (1, i, -1, -i),$$

$$E_2 = \frac{1}{2} (e^{2\pi i 0/4}, e^{2\pi i 2/4}, e^{2\pi i 4/4}, e^{2\pi i 6/4}) = \frac{1}{2} (1, -1, 1, -1),$$

$$E_3 = \frac{1}{2} (e^{2\pi i 0/4}, e^{2\pi i 3/4}, e^{2\pi i 6/4}, e^{2\pi i 9/4}) = \frac{1}{2} (1, -i, -1, i).$$

标准正交基有许多优良性质, 例如对  $z, w \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ , 有

$$z = \sum_{m \in \mathbb{Z}_N} \langle z, E_m \rangle E_m, \quad (1.2)$$

$$\langle z, w \rangle = \sum_{m \in \mathbb{Z}_N} \langle z, E_m \rangle \overline{\langle w, E_m \rangle}, \quad (1.3)$$

$$\|z\|^2 = \sum_{m \in \mathbb{Z}_N} |\langle z, E_m \rangle|^2, \quad (1.4)$$

其中

$$\langle z, E_m \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}_N} z(n) \frac{1}{\sqrt{N}} e^{2\pi i mn/N} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n \in \mathbb{Z}_N} z(n) e^{-2\pi i mn/N}. \quad (1.5)$$

在使用上面的公式进行数值计算时, 需要频繁地计算内积  $\langle z, E_m \rangle$ , 而在计算公式 (1.5) 时, 因子  $\frac{1}{\sqrt{N}}$  给计算增加了额外的工作量. 因此在实际应用中, 我们通常不使用  $\{E_0, E_1, \dots, E_{N-1}\}$  而使用以下“非标准”的正交基.

定义 1.2 定义  $N$  个向量  $F_0, F_1, \dots, F_{N-1} \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  为

$$F_m(n) := \frac{1}{N} e^{2\pi i mn/N}, \quad m, n \in \mathbb{Z}_N. \quad (1.6)$$

我们称

$$\mathbf{F} := \{F_0, F_1, \dots, F_{N-1}\} \quad (1.7)$$

为  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$  上的 Fourier 基.

由定义可以直接看出

$$F_m = \frac{1}{\sqrt{N}} E_m,$$

因此 Fourier 基  $F$  是非标准的正交基. 将这一关系代入 (1.2) 得

$$z = \sum_{m \in \mathbb{Z}_N} \left( \sqrt{N} \langle z, E_m \rangle \right) F_m,$$

这是  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$  中的向量在 Fourier 基下的展开式. 我们记第  $m$  个展开系数为

$$\hat{z}(m) := \sqrt{N} \langle z, E_m \rangle,$$

则  $\hat{z} := (\hat{z}(0), \hat{z}(1), \dots, \hat{z}(N-1))$  是向量  $z$  在 Fourier 基下的表示向量. 如果我们把向量  $z$  在某个基底  $B$  下的表示向量记为  $[z]_B$ , 则

$$\hat{z} = [z]_F.$$

于是有

$$z = \sum_{m \in \mathbb{Z}_N} \hat{z}(m) F_m. \quad (1.8)$$

由基底展开的向量具有存在唯一性, 变换  $z \mapsto \hat{z}$  是  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$  到  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$  的双射. 利用公式 (1.5), 我们给出以下定义.

**定义 1.3** 任给  $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ , 定义  $\hat{z} := (\hat{z}(0), \hat{z}(1), \dots, \hat{z}(N-1)) \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ , 其中

$$\hat{z}(m) := \sum_{n \in \mathbb{Z}_N} z(n) e^{-2\pi i m n / N}, \quad m \in \mathbb{Z}_N. \quad (1.9)$$

我们称变换  $\hat{\cdot} : z \mapsto \hat{z}$  为离散 Fourier 变换 (discrete Fourier transform), 并简记为 DFT.

前面我们曾将  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$  中的向量等同于周期为  $N$  的无限长向量, 而  $\hat{z} \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ , 因此也可作类似的周期延拓. 而且, 它的周期延拓可以直接用 (1.9) 来计算. 事实上,

$$\hat{z}(m+N) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_N} z(n) e^{-2\pi i (m+N)n / N} = \sum_{n \in \mathbb{Z}_N} z(n) e^{-2\pi i m n / N} e^{-2\pi i n} = \hat{z}(m)$$

对任意  $m \in \mathbb{Z}$  成立.

我们利用  $F_m$  与  $E_m$  的关系, 将性质 (1.2)–(1.4) 归纳为以下定理.

**定理 1.1** 设  $z, w \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ , 则有

(i) Fourier 求逆公式

$$z(n) = \frac{1}{N} \sum_{m \in \mathbb{Z}_N} \hat{z}(m) e^{2\pi i m n / N}, \quad n \in \mathbb{Z}_N. \quad (1.10)$$

(ii) Parseval 恒等式

$$\langle z, w \rangle = \frac{1}{N} \sum_{m \in \mathbb{Z}_N} \hat{z}(m) \overline{\hat{w}(m)} = \frac{1}{N} \langle \hat{z}, \hat{w} \rangle. \quad (1.11)$$

(iii) Plancherel 公式

$$\|z\|^2 = \frac{1}{N} \sum_{m \in \mathbb{Z}_N} |\hat{z}(m)|^2 = \frac{1}{N} \|\hat{z}\|^2. \quad (1.12)$$

我们已经知道, 变换  $\hat{\cdot}$  是  $\ell^2(\mathbb{Z}_N) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  的双射, 所以其逆映射存在, 而 (1.10) 恰好给出了逆映射的具体计算公式 (因此我们称 (1.10) 为 Fourier 求逆公式), 我们用记号  $\check{\cdot}$  来记这个逆映射.

**定义 1.4** 对  $w \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ , 定义

$$\check{w}(n) := \frac{1}{N} \sum_{m \in \mathbb{Z}_N} w(m) e^{2\pi i m n / N}, \quad n \in \mathbb{Z}_N, \quad (1.13)$$

并记

$$\check{w} := (\check{w}(0), \check{w}(1), \dots, \check{w}(N-1)).$$

映射  $\check{\cdot} : \ell^2(\mathbb{Z}_N) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  称为离散 Fourier 逆变换 (inverse discrete Fourier transform), 简记为 IDFT.

利用这一记号, (1.10) 可以写成

$$(\hat{z})^\check{\cdot}(n) = z(n), \quad n \in \mathbb{Z}_N, \quad (1.14)$$

即  $(\hat{z})^\check{\cdot}$  和  $z$  的各分量对应相等, 所以

$$(\hat{z})^\check{\cdot} = z. \quad (1.15)$$

任给  $w \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ , 必能找到  $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  满足  $\hat{z} = w$ . 于是由上式得

$$\check{w} = z,$$

对两边同时取 DFT 即得

$$(\check{w})^\wedge = w, \quad (1.16)$$

对任意  $w \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  成立. 以上推断表明  $\hat{\cdot}$  与  $\check{\cdot}$  互为逆变换.

我们通常把用 Fourier 基展开向量的过程称为频率分解, 并称 Fourier 变换前的向量  $z$  “在时域 (或空间域) 中”, 称 Fourier 变换后的向量  $\hat{z}$  “在频域中”. 因此, Fourier 变换也称为 “时频” 变换. 这些说法都是由于 Fourier 变换在物理学中的广泛应用

而产生的. 19 世纪初法国数学家 Fourier 在热力学研究中广泛使用 Fourier 级数展开

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)),$$

并对这种级数展开作了比较系统的研究, 因此我们现在用他的名字来命名这个级数以及相关的概念. 受声学研究的影响,  $\sin(kx)$  和  $\cos(kx)$  这种以恒定的速度上下“波动”的图形被称为“单频”, 其振动速度称为频率, 它与  $k$  的大小有关.  $k$  的值越大, 振动速度越快, 频率就越“高”. 将各种单频按照一定的比例叠加, 就形成了特定的声音. 在数学上这种叠加就是 Fourier 级数. 相应地,  $e^{ikx}$  是复的“单频”, 因为

$$e^{ikx} = \cos(kx) + i \sin(kx),$$

其实部和虚部都是单频振动. 本章我们研究的是离散情形的 Fourier 变换, 所用的 Fourier 基也是离散形式的. 如果忽略掉常数因子  $\frac{1}{N}$ , 基向量  $F_m$  的第  $n$  个分量恰好是复单频  $e^{i2\pi mx/N}$  在点  $n$  处的值.

在图 1-1 中我们用虚线画出了  $\cos(2\pi mx/16)$  的图形, 并用“\*”标出  $F_m$  各分量的实部的值. 如果只看虚线部分, 则  $m$  越大时, 图形的波动越快, 显示出的频率越高; 然而当我们只看来“\*”标出的离散点时, 所得到的印象却有所不同.

比较图 1-1 的子图 (a) 和 (f) 可以发现, 虽然两图中的虚线差异很大, 但用“\*”标出的离散点的位置却完全相同. 类似地, 子图 (c) 和 (e) 中的离散点位置也完全相同. 离散点位置的波动随着  $m$  的增大而增大, 并在  $m = 8$  时达到最快; 而当  $m$  的值进一步增大时, 其波动速度开始下降, 到  $m = 15$  时达到最低. 由此可见, 在  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$  的 Fourier 基中,  $m$  的值越靠近 0 和  $N$  的向量  $F_m$  代表的频率越低, 而  $m$  的值越靠近  $N/2$  的  $F_m$  的频率越高.

上面我们已经定义了 DFT 及其逆运算, 下面我们讨论 DFT 与几种基本运算的关系. 首先引进平移变换的定义.

**定义 1.5** 设  $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . 定义

$$(\mathcal{R}_k z)(n) := z(n - k), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

我们称  $\mathcal{R}_k z$  为  $z$  的  $k$  次平移向量,  $\mathcal{R}_k$  为  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$  上的  $k$  次平移变换(translation).

事实上, 将以上定义看作是作用于与  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$  中向量等同的周期为  $N$  的无限长向量更自然一点. 对有限长向量, 上面定义的  $k$  次平移运算的实际效果是一种“循环平移”. 此外, 从记号的严格性要求来说, 我们应该用  $\mathcal{R}_k(z)$  来表示平移后的向量, 但为避免出现太多的括号, 我们通常直接写成  $\mathcal{R}_k z$ , 这一般也不会造成误解. 容易验证  $\mathcal{R}_k$  是可逆变换, 且  $\mathcal{R}_k^{-1} = \mathcal{R}_{-k}$ .

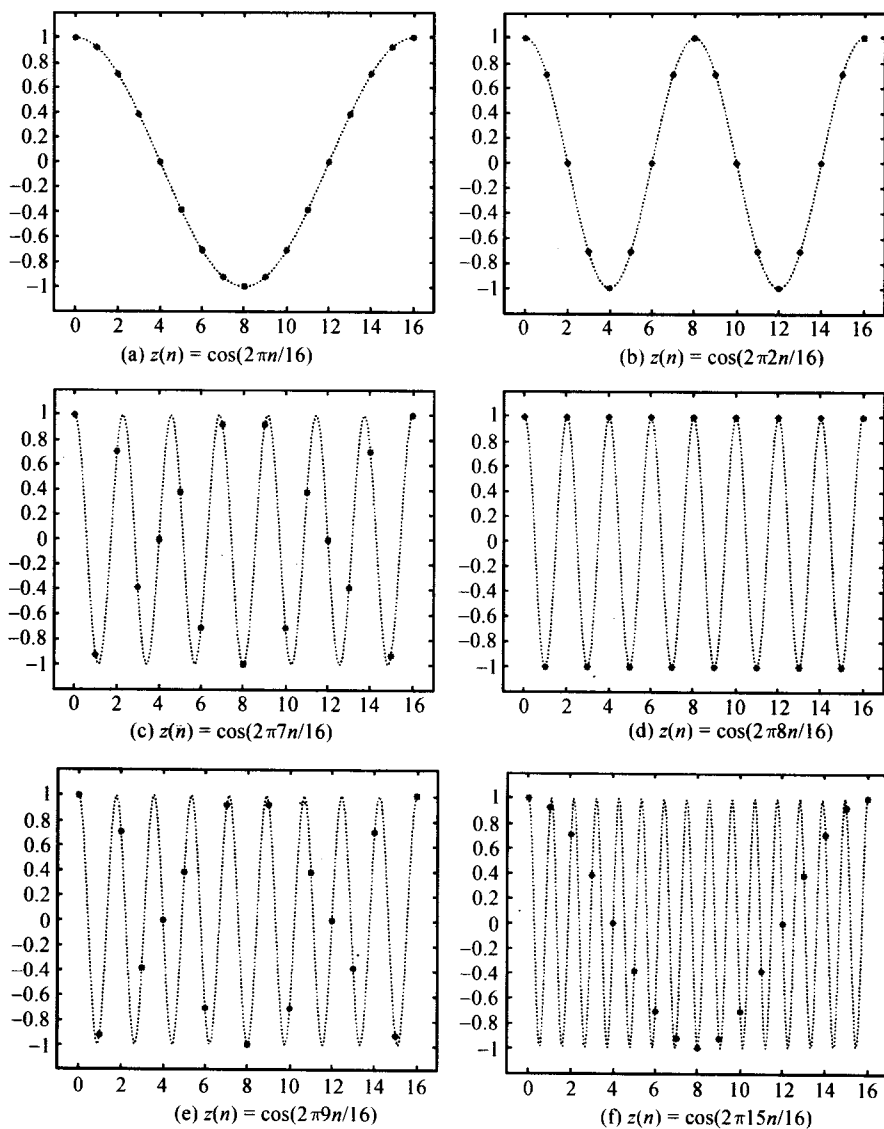


图 1-1

下面的引理给出了  $\mathcal{R}_k z$  的 DFT 的计算公式.

**引理 1.2** 设  $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , 则

$$(\mathcal{R}_k z)^\wedge(m) = e^{-2\pi i m k / N} \hat{z}(m), \quad m \in \mathbb{Z}.$$

**证明** 根据定义,

$$(\mathcal{R}_k z)^\wedge(m) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_N} (\mathcal{R}_k z)(n) e^{-2\pi i m n / N} = \sum_{n \in \mathbb{Z}_N} z(n-k) e^{-2\pi i m n / N}.$$

令  $\ell = n - k$ , 则  $n = \ell + k$ , 因此

$$(\mathcal{R}_k z)^\wedge(m) = \sum_{\ell=-k}^{N-k-1} z(\ell) e^{-2\pi i m (\ell+k) / N} = e^{-2\pi i m k / N} \sum_{\ell=-k}^{N-k-1} z(\ell) e^{-2\pi i m \ell / N}.$$

由于求和项  $z(\ell) e^{-2\pi i m \ell / N}$  的值随  $\ell$  变化的周期为  $N$ , 所以

$$\sum_{\ell=-k}^{N-k-1} z(\ell) e^{-2\pi i m \ell / N} = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}_N} z(\ell) e^{-2\pi i m \ell / N} = \hat{z}(m).$$

从而引理得证. □

引理证明中最后一步将求和限从  $-k$  和  $N-k-1$  变到  $0$  和  $N-1$ , 这是一个常用的技巧. 在习题中我们要求对这一性质给出一般证明.

由引理可知,  $|(\mathcal{R}_k z)^\wedge(m)| = |\hat{z}(m)|$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ . 也就是说, 如果只看  $(\mathcal{R}_k z)^\wedge$  和  $\hat{z}$  的 DFT 的分量的模, 是无法区分这两个具有不同位置信息的向量的. 换句话说, 位置信息完全包含于  $\hat{z}$  的分量的幅角中. 但是  $\hat{z}$  的幅角信息有时候很难表现出来, 因此用 DFT 不方便获取向量的位置信息, 这是 DFT 的一个局限性. 后面我们将看到, 小波可以非常方便地提供向量的位置信息, 这是小波相对于 DFT 的一个优点.

对  $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ , 记  $\bar{z}$  为将  $z$  各分量分别取复共轭后得到的同维数向量, 即

$$\bar{z} := (\overline{z(0)}, \overline{z(1)}, \dots, \overline{z(N-1)}) \in \ell^2(\mathbb{Z}_N).$$

**引理 1.3** 设  $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ , 则

$$(\bar{z})^\wedge(m) = \overline{\hat{z}(-m)} = \overline{\hat{z}(N-m)}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

**证明** 留作习题. □

## 1.2 信号系统与 Fourier 变换

信号是传递信息的载体, 而信号分析的研究对象正是各种各样的信号. 从数学的角度来看, 信号可以分为两种, 连续的和离散的. 前一类信号的例子包括电信号, 光信号, 声信号等, 它们在某连续时间范围内有定义. 后一类信号的典型例子是数字图像, 其定义域为整数集的一个子集. 在数学上信号都被看作函数来处理, 前一类



信号相当于定义在实数区间上的函数, 后一类相当于定义在  $\mathbb{Z}_N$  (有限信号) 或  $\mathbb{Z}$  (无限长信号) 上的函数. 各种信号处理设备接受输入信号, 经过特定的处理后输出一些信号, 这些设备我们都统称为信号系统. 用数学的语言来说, 一个信号系统实际上就是一个变换, 把输入信号按特定的变换规则变成输出信号.

要用数学的方法来研究和分析信号系统, 首先必须对系统作一些假设, 即假设系统具有哪些性质. 为了使数学的分析结果能应用得尽量广泛, 我们所作的假设应当是各种信号系统共同具有的基本性质. 那么, 哪些性质是一个信号系统通常具备的呢? 我们以扩音器为例作一些分析. 首先, 如果两个不同的声音同时输入到扩音器中, 则输出的声音应该是这两个声音独立经过扩音器放大后的输出声音的迭加. 因此, 若扩音器的作用相当于一个变换  $T$ , 则  $T$  应该满足  $T(u+v) = T(u) + T(v)$ . 其次, 若增大输入到扩音器中的声音, 则输出的声音也应该相应增大. 相应地,  $T$  应具有性质  $T(\alpha u) = \alpha T(u)$ . 由此可知  $T$  是一个线性变换. 当然, 以上两个性质应该是一个理想扩音器所具有的, 实际的扩音器由于受电子元件的性质和制造工艺的限制, 不可能严格地满足这两个性质. 例如当输入的声音充分大时, 扩音器不可能保持同样倍率的输出声音, 甚至可能损坏.

此外, 还有一个重要的性质也是各种信号系统通常都具备的, 即当信号延迟一定的时间输入时, 输出信号也延迟相同的时间输出同样的内容. 换句话说, 信号系统对信号的处理方式不随时间而变化. 这样的系统称为时 (间) 不变 (time invariant) 或平移不变 (translation invariant) 的, 对应于这样的系统的线性变换也称为平移不变的. 其严格的数学定义如下.

**定义 1.6** 设  $T: \ell^2(\mathbb{Z}_N) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  为线性变换. 我们称  $T$  是平移不变的 (translation invariant), 若

$$T(\mathcal{R}_k z) = \mathcal{R}_k T(z) \quad (1.17)$$

对所有  $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  和  $k \in \mathbb{Z}$  成立. 换句话说,  $T$  与所有平移变换  $\mathcal{R}_k$  都可交换.

线性代数的理论告诉我们, 若  $\mathbb{V}$  是一个  $N$  维线性空间,  $T: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$  是线性变换, 则任取  $\mathbb{V}$  的一组基底  $B$ , 存在  $N$  阶方阵  $A$  使  $[T(z)]_B = A[z]_B$  对所有  $z \in \mathbb{V}$  成立. 我们称  $A$  为  $T$  在基底  $B$  下的表示矩阵, 记为  $A_{T,B}$ . 若存在  $\mathbb{V}$  的基底  $B$  使  $A_{T,B}$  是对角阵, 则称  $T$  是可对角化的 (diagonalizable). 我们常利用表示矩阵来研究线性变换的各种性质, 而对角矩阵是非常容易处理和分析的一类矩阵, 因此可对角化的线性变换是性质比较简单的变换.

我们在上一节中定义的 Fourier 基与平移不变线性变换的可对角化性质有非常紧密的联系, 事实上, 这也是 Fourier 基最重要的性质之一. 具体地说, 任一平移不变线性变换在 Fourier 基下的表示矩阵都是对角阵, 从而都是可对角化的. 为证明这一结论, 我们要利用线性代数中的一个基本结论: 线性变换  $T: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$  可对角化当